



Übungsblatt 5

Mini-Quiz 5. In der Übung wird die Definition von einem der folgenden Begriffe/Eigenschaften abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung.

- Unter welcher Bedingung ist ein kommutativer Ring mit Eins ein Körper?
- Wie definiert man das Supremum einer Teilmenge A in einer geordneten Menge M ?
- Geben Sie eine Teilmenge von \mathbb{Q} an, die ein Supremum in \mathbb{Q} , aber kein Maximum besitzt.

Auf diesem gesamten Blatt sei $(K, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper. Wir bezeichnen mit 0_K und mit 1_K das Null- und das Einselement in K .

1. Aufgabe (1+0.5+1+0.5+1 Punkte).

Zeigen Sie allein unter Verwendung der Axiome eines geordneten Körpers :

a) Für alle $x \in K$ gilt

$$0_K \leq x \iff -x \leq 0_K.$$

b) Ist $z \leq 0$, dann gilt für alle $x, y \in K$

$$x \leq y \implies z \cdot x \geq z \cdot y.$$

c) Für alle $x \in K$ gilt $x \cdot x \geq 0$.

d) $0_K < 1_K$

e) Ist $z < 0$, so ist $z^{-1} < 0$.

2. Aufgabe (2+1+1 Punkte).

Wir definieren rekursiv eine Abbildung $i: \mathbb{N} \rightarrow K$ durch $i(0_{\mathbb{N}}) := 0_K$ und $i(n + 1_{\mathbb{N}}) := i(n) + 1_K$. Hierbei bezeichnen die Indizes $-_{\mathbb{N}}$ und $-_K$ die Null- und Einselemente in \mathbb{N} und K .

a) Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$:

$$n < m \iff i(n) < i(m)$$

Hinweis: Hier ist $n < m$ für natürliche Zahlen n, m wie in Kapitel II.1 definiert, d.h.

$$n < m \iff \text{Es existiert } k \in \mathbb{N}, k \neq 0, \text{ mit } m = n + k.$$

Sie dürfen verwenden, dass dies eine totale Ordnung auf \mathbb{N} definiert.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $i: \mathbb{N} \rightarrow K$ injektiv ist.

c) Folgern Sie, dass es auf einem Körper $(F, +, \cdot)$ mit endlich vielen Elementen keine totale Ordnung \leq geben kann, so dass $(F, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper wird.

3. Aufgabe: (Bernoullische Ungleichung) (4 Punkte).

- a) Sei $x \in K$ mit $x \geq -1$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

- b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei $x_k \in K$ mit $x_k \geq 0$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n x_k.$$

Gilt diese Ungleichung auch unter der Voraussetzung: für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $x_k \in K$ mit $x_k \geq -1$?

Hinweis: Eine Antwort auf eine derartige Frage muss immer begründet werden.

4. Aufgabe (4 Punkte).

Wir definieren rekursiv Zahlen a_n für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$, über:

$a_1 := 1$, $a_2 := 1$, und für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$: $a_{n+2} := a_{n+1} + a_n$.

Hinweis: Die explizite Formel für a_n aus der Zentralübung vom 11.11. darf hier nicht benutzt werden. Sie sollte die Aufgabe unabhängig von der Formel des Zentralübungsblatts zu lösen.

- a) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach m , dass für alle natürliche Zahlen m mit $m \geq 1$ gilt:

$$a_{n-1} \cdot a_m + a_n \cdot a_{m+1} = a_{n+m}.$$

Tipp: Sie dürfen und sollten dazu die starke Induktion von Blatt 4, Aufgabe 4 benutzen, das heißt für den Induktionsschritt nehmen Sie an, dass die Aussage für alle $m \in \{1, \dots, k\}$ gilt, und Sie müssen daraus folgern, dass die Aussage auch für $m = k + 1$ gilt.

- b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach k , dass für alle $k, n \in \mathbb{N}_{>0}$ die Zahl a_{kn} durch a_n teilbar ist.

Hinweis: Benutzen Sie a) mit $m := kn$.