Analysis I: Übungen

Universität Regensburg, Wintersemester 2025/26
Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Freitag, 14.11., 12:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 4

Mini-Quiz 4. In der Übung wird die Definition von einem der folgenden Begriffe/Eigenschaften abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung.

X und Y sind **gleichmächtig**
Y ist **mächtiger** als X
X ist **abzählbar**

---

1. Aufgabe (4 Punkte).
Beweisen Sie:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)2^k = n2^{n+1}.$$

2. Aufgabe (1+1+2 Punkte).
Zeigen Sie:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, gilt $2\binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n}$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, gilt $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = 0$.
Hinweis: Binomische Formel!

c) Für alle $n, l \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{l+k}{k} = \binom{l+n+1}{n}.$$

Hinweis: Induktion über n.

3. Aufgabe (4 Punkte).

a) Zeigen Sie, dass für alle $n, k \in \mathbb{N}, k \neq 0$, das Produkt $\prod_{j=1}^{k}(n+j)$ durch $k!$ teilbar ist.
Hinweis: Binomialkoeffizienten!
Erinnerung: $c \in \mathbb{N}$ durch $d \in \mathbb{N}$ teilbar $\Leftrightarrow$ Es existiert $t \in \mathbb{N}$ mit $c = td$.

b) Seien $k, n \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n, dass $(kn)!$ durch $(k!)^n$ teilbar ist.

4. Aufgabe (4 Punkte).
In der Vorlesung haben Sie den Satz über vollständigen Induktion kennengelernt. Wenn $A(\,\cdot\,)$ eine auf $\mathbb{N}$ definierte Aussageform ist, so ist dabei der Induktionsschritt

$$\forall n \in \mathbb{N} : \big(A(n) \Rightarrow A(n+1)\big).$$

Bei der sogenannten *starken vollständigen Induktion* wird dieser Induktionsschritt durch die folgende Aussage ersetzt, genannt den *Induktionsschritt der starken vollständigen Induktion*:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \Big(\big(A(0) \wedge A(1) \wedge \ldots \wedge A(n-1) \wedge A(n)\big) \Rightarrow A(n+1)\Big). \tag{1}$$

Zeigen Sie:
Falls $A(0)$ wahr ist und falls (1) gilt, so ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ wahr.

Hinweis: Betrachten Sie die Aussage $B(n) := A(0) \wedge A(1) \wedge \ldots \wedge A(n-1) \wedge A(n)$.

Bemerkung: Den hiermit erhaltenen Satz nennt man den *Satz der starken vollständigen Induktion.*