

## Übungsblatt 3

**Mini-Quiz 3.** In der Übung wird die Definition von einem der folgenden Begriffe/Eigenschaften abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung.

### Äquivalenzrelation

### Ordnungsrelation

Wann ist eine Ordnungsrelation eine totale Ordnung?

#### 1. Aufgabe (4 Punkte).

Seien  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  Abbildungen.

a) Seien  $A \subset X$ ,  $M \subset Y$ . Zeigen Sie:

$$f_{\#}(A) \subset M \Leftrightarrow A \subset f^{\#}(M)$$

b) Zeigen Sie: Für alle  $M \subset Y$  gilt

$$f_{\#}(f^{\#}(M)) \subset M. \tag{1}$$

c) In Gleichung (1) von Teil b) gilt Gleichheit für alle  $M \subset Y$  genau dann, wenn  $f$  surjektiv ist.

d) Zeigen Sie

$$(g \circ f)^{\#} = f^{\#} \circ g^{\#}$$

(als Gleichheit von Abbildungen  $\mathcal{P}(Z) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ ).

#### 2. Aufgabe (4 Punkte).

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung:

a) Zeigen Sie: Für alle  $A, B \subset X$ ,  $V, W \subset Y$  gilt

$$\begin{aligned} f^{\#}(V \cup W) &= f^{\#}(V) \cup f^{\#}(W) \\ f_{\#}(A \cup B) &= f_{\#}(A) \cup f_{\#}(B) \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie: Für alle  $A, B \subset X$ ,  $V, W \subset Y$  gilt

$$\begin{aligned} f^{\#}(V \cap W) &= f^{\#}(V) \cap f^{\#}(W) \\ f_{\#}(A \cap B) &\subset f_{\#}(A) \cap f_{\#}(B), \end{aligned} \tag{2}$$

und in (2) gilt Gleichheit für alle  $A, B \subset X$  genau dann, wenn  $f$  injektiv ist.

**3. Aufgabe** (4 Punkte).

Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $h : Y \rightarrow Z$  Abbildungen.

- a) Zeigen Sie: Ist  $h \circ f$  injektiv, so ist auch  $f$  injektiv. Ist  $h \circ f$  surjektiv, so ist auch  $h$  surjektiv.
- b) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
- $f$  ist surjektiv.
  - Es existiert eine Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  mit  $f \circ g = \text{id}_Y$ .
- c) Sei  $X \neq \emptyset$ . Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
- $f$  ist injektiv.
  - Es existiert eine Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  mit  $g \circ f = \text{id}_X$ .
- d) Sei  $X \neq \emptyset$ . Es gibt eine injektive Abbildung  $F : X \rightarrow Y$  genau dann, wenn es eine surjektive Abbildung  $G : Y \rightarrow X$  gibt.

**4. Aufgabe: Satz von Schröder-Bernstein** (4 Punkte).

Seien  $X$  und  $Y$  Mengen, so dass zwei injektive Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow X$  existieren. Wir wollen in dieser Aufgabe als  $f$  und  $g$  eine bijektive Abbildung  $X \rightarrow Y$  konstruieren.

Wir definieren die folgenden Mengen:  $A_0 := X \setminus g_{\#}(Y)$  und für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$A_{n+1} := g_{\#}(f_{\#}(A_n)) \subset X.$$

Sei  $A \subset X$  die Vereinigung dieser Mengen:

$$A := \bigcup \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

- a) Zeigen Sie, dass  $g_{\#}(Y \setminus f_{\#}(A)) \subset X \setminus A$ .
- b) Zeigen Sie, dass  $X \setminus A \subset g_{\#}(Y \setminus f_{\#}(A))$ .  
Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, wieso  $X \setminus A \subset g_{\#}(Y)$ .
- c) Folgern Sie aus a) und b), dass  $g_A := g|_{Y \setminus f_{\#}(A)} : Y \setminus f_{\#}(A) \rightarrow X \setminus A$  bijektiv ist.
- d) Wir definieren nun die Abbildung

$$h : X \rightarrow Y, \quad h(x) := \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g_A^{-1}(x), & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass  $h$  bijektiv ist.