

Zentralübung Analysis I

Aufgabe 1.

Leiten Sie ab:

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto a^x, \quad a \in \mathbb{R}_{>0}$$

$$]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan(x)$$

$$\mathbb{R} \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[, \quad x \mapsto \arctan(x)$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \operatorname{arsinh}(x), \quad \operatorname{arsinh} := \sinh^{-1}$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \operatorname{artanh}(x), \quad \operatorname{artanh} := \tanh^{-1}$$

Aufgabe 2.

Man untersuche die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3 + ax^2 + bx$ auf lokale Extrema in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3.

Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie, dass $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^r e^{-x}$ in r ein lokales Maximum annimmt, dass f sonst nirgendwo ein lokales Maximum annimmt und dass es auch ein (globales) Maximum ist.

Aufgabe 4.

Sei $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie: für $f': [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt der Zwischenwertsatz (ohne dass wir die Stetigkeit von f' annehmen müssen), das heißt: gilt $f'(a) < c < f'(b)$, so gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit $f'(\xi) = c$.

Aufgabe 5.

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Überprüfen Sie, ob die folgenden Aussagen richtig sind. Falls Ja, beweisen Sie sie. Falls Nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

- (a) Die Funktion f ist injektiv oder hat ein lokales Maximum oder hat ein lokales Minimum.
- (b) Hat f ein lokales Maximum (oder Minimum), so ist f nicht injektiv.