

Zentralübung Analysis I

Stetigkeit

Aufgabe 1.

Seien (M, d) und (N, d') metrische Räume, $f : M \rightarrow N$. Welche Aussagen sind dazu äquivalent, dass f stetig ist?

- (a) die Urbilder von allen offenen Mengen sind offen,
- (b) die Urbilder von alle abgeschlossenen Mengen sind abgeschlossen,
- (c) die Bilder aller folgenkompakten Mengen sind folgenkompakt
- (d) für alle $x \in M$ gilt: ist U eine Umgebung von $f(x)$ in N , dann ist $f^\#(U)$ eine Umgebung von x
- (e) $\forall x_0 \in M : \forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : f_\#(B_\delta^M(x_0)) \subset B_\epsilon^N(f(x_0))$
- (f) $\forall \epsilon > 0 : \forall x_0 \in M : \exists \delta > 0 : f_\#(B_\delta^M(x_0)) \subset B_\epsilon^N(f(x_0))$
- (g) $\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_0 \in M : f_\#(B_\delta^M(x_0)) \subset B_\epsilon^N(f(x_0))$

Lösung. **Ad (a):** Diese Aussage ist äquivalent. Dies ist im wesentlichen die Aussage von Proposition IV.5.11.

Ad (b): Ist äquivalent zu (a), da für alle $A \subset N$ gilt $f^\#(N \setminus A) = M \setminus f^\#(A)$.

Ad (c): Nicht äquivalent. Beispiel $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $f(x) = 1$ für $x > 0$.

Ad (d): Diese Aussage ist äquivalent. Dies ist im wesentlichen die Aussage des Umgebungskriterium für Stetigkeit, Proposition IV.5.10.

Ad (e): Die Stetigkeit von f in x_0 ist in Definition IV.5.4 (Gleichung (IV.5.1)) definiert als

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0} : \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} : \forall x \in M : (d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \tilde{d}(f(x), f(x_0)) < \epsilon). \quad (*)$$

Aussage $(*)$ ist äquivalent zu

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : f_\#(B_\delta^M(x_0)) \subset B_\epsilon^N(f(x_0)).$$

Also ist (e) äquivalent zur Stetigkeit.

Ad (f): Wenn man die beiden Allquantoren vertauscht, bleibt die Aussage unverändert. Also ist (f) äquivalent.

Ad (g): Wenn man den Allquantor und den Existenzquantor vertauscht, kann sich die Aussage verändern. Die Aussage (g) impliziert Stetigkeit, aber sie folgt nicht aus Stetigkeit. Man nennt (g) gleichmäßige Stetigkeit. Die Funktion $\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto 1/x$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. $\square$

Berechnung von Ableitungen

Unser Problem: wir haben noch sehr wenige Methoden, Ableitungen zu berechnen.

Aufgabe 2.

Zeigen Sie, dass $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in 0 differenzierbar ist und berechnen Sie $\cos'(0)$.

Hinweis erste Lösung: In der Vorlesung haben wir gezeigt:

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

Hinweis zweite Lösung: Denken Sie daran, wie wir gezeigt haben, dass $\exp$ differenzierbar ist und dass $\exp' = \exp$.

Aufgabe 3.

Rationale Funktionen

$$f : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_r\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_k x^k + \dots + b_1 x + b_0}$$

(x_i Nullstellen des Nenners) sind auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar. Berechnen Sie die Ableitung.

Aufgabe 4.

Man betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0, \end{cases}$$

Ist f differenzierbar? Wenn ja, ist f' ebenfalls differenzierbar? Wenn ja, existieren auch höhere Ableitungen?

Hinweis: Sie dürfen die folgende noch nicht bewiesene Aussage nutzen: Ist eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodass $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ existiert, so ist f differenzierbar in 0 und $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$. (Auf Blatt 14 werden Sie eine dazu ganz analoge Aussage zeigen.)