

Zentralübung Analysis I

Stetigkeit

Aufgabe 1.

Für ein Intervall I unterscheiden wir die Fälle:

- (1) I ist offen und beidseitig beschränkt, also $I =]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$,
- (2) I ist offen und nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt, also $I =]a, \infty[$, $a \in \mathbb{R}$,
- (3) $I = \mathbb{R}$
- (4) I ist abgeschlossen und beidseitig beschränkt, also $I = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$,
- (5) I ist abgeschlossen und nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt, also $I = [a, \infty[$, $a \in \mathbb{R}$,
- (6) I ist halboffen und beschränkt, also $I = [a, b[$ oder $I =]a, b]$.

(Die verbleibenden Möglichkeiten $I =]-\infty, a[$ und $I =]-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir nicht, dass sie aus (2) und (5) durch Spiegelung an 0 hervorgehen.)

Sei I ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $J := f_{\#}(I)$ ebenfalls ein Intervall. Fügen Sie in der folgenden Tabelle an der Stelle $(i), (j)$ ein:

- Ja, wenn es eine stetige Funktion f gibt mit I vom Typ (i) und $J := f_{\#}(I)$ vom Typ (j) . Geben Sie Beispiele an.
- Nein, wenn es keine solche Funktion gibt. Wieso gibt es sie nicht?

$I \setminus J$	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
(1)						
(2)						
(3)						
(4)						
(5)						
(6)						

Metrische Räume

Aufgabe 2. (Übung IV.5.17 im Skript) Aufgabenteil (b)

Eine Teilmenge X eines metrischen Raumes (M, d) ist abgeschlossen genau dann, wenn für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X gilt:

ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent in M , dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in X$.

Aufgabe 3.

Sind d und d' Metriken auf M , $k \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann sind auch

$$\begin{aligned}d_1(x, y) &:= kd(x, y) & d_2(x, y) &:= d(x, y) + d'(x, y) \\d_3(x, y) &:= \max\{d(x, y), d'(x, y)\} & d_4(x, y) &:= \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \\d_5(x, y) &:= \min\{1, d(x, y)\}\end{aligned}$$

Metriken auf M .

Aufgabe 4.

Sei ℓ^2 die Menge aller Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n)^2 < \infty$. Wir definieren eine Metrik auf ℓ^2 wie folgt:

$$d\left((a_n), (b_n)\right) := \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)^2} \in [0, \infty].$$

- (a) Zeigen Sie: $d\left((a_n), (b_n)\right) < \infty$
- (b) $d: \ell^2 \times \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist eine Metrik auf ℓ^2 .

Bemerkung: Der metrische Raum (ℓ^2, d) ist ein sogenannter „separabler Hilbertraum“. Er (und die Variante mit $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$) spielt eine zentrale Rolle in der Quantenmechanik und der angewandten Mathematik.