Zentralübung Analysis I

Konvergenz von Folgen

Aufgabe 1.
Untersuchen Sie folgende $\mathbb{R}$-wertigen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenfalls den Grenzwert:

(a) $a_n \coloneqq \sqrt{n}$

(b) $a_n \coloneqq \dfrac{1}{n^2 - 2}$

(c) $a_n \coloneqq \dfrac{1}{2^n}$

(d) $a_n \coloneqq \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$

(e) $k \in \mathbb{N}$, $a_n \coloneqq \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$

(f) $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $a_n \coloneqq \sqrt[n]{a}$

(g) $a_n \coloneqq \sqrt[n]{n}$

(h) $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $a_n \coloneqq \sqrt[n]{a^n + b^n}$

(i) $a_n \coloneqq \dfrac{n!}{n^n}$

(j) $a_n \coloneqq \dfrac{\sin(n)}{n}$

(k) $s \in \mathbb{Q}, a_n \coloneqq n^s$

(l) $a_n \coloneqq \dfrac{P(n)}{Q(n)}$, mit P, Q Polynome.

(m) $q \in \mathbb{R}$, $a_n \coloneqq q^n$

(n) $k \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a_n \coloneqq \dfrac{n^k}{q^n}$

(o) $s \in \mathbb{Q}$, $a_n \coloneqq \sqrt[n]{n^s}$

(p) $s \in \mathbb{Q}$, $a_n \coloneqq \sqrt[n]{|P(n)|}$, mit P Polynom.

Konvergenz von Reihen

Aufgabe 2.
Bestimme den Konvergenzradius von

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^s x^n$$
$$\text{(c)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} x^n \qquad \text{(d)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

wobei $s \in \mathbb{Q}$, $q \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{C}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$: $a_{2n} = a^n$, $a_{2n-1} = b^n$.

Aufgabe 3.
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen mit $a_n \to 0$.
Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \wedge z \neq 1\}$ konvergiert.
Tipp: Schätzen Sie $(1-z)\sum_{k=n+1}^{m} a_k z^k$ ab.

Aufgabe 4.
Bestimmen Sie den Konvergenzradius von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$$