Universität Regensburg, Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann

WiSe 2025/26
Zentralübung 8 vom 9.12.2025
Zentralübungsblatt Nr. 7

Zentralübung Analysis I

Dezimal-Zahlen

Aufgabe 1. (Vergleich zu Bemerkung III.2.3) Wir werden sehen: Jede Dezimal-Darstellung „beschreibt" eine reelle Zahl. Genauer die Reihe

$$x = \sum_{n=\ell}^{\infty} 10^{-n} \cdot a_n.$$

der Vorlesung konvergiert. Zeigen Sie:

(a) Jede positive reelle Zahl besitzt eine Dezimal-Darstellung.

(b) Die Dezimal-Darstellung ist nicht eindeutig. Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq\ell}}$, $a_\ell \neq 0$, und $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq k}}$, $b_k \neq 0$, verschiedene Dezimal-Darstellungen derselben positiven Zahl, so hat eine der beiden Darstellungen eine Periode $\overline{9}$.

Aufgabe 2. (Übung III.2.2 im Skript) Gegeben sei die Dezimal-Darstellung $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ einer positiven rationalen Zahl $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Wir zerlegen

$$q = 2^a 5^b q_1^{c_1} \cdots q_r^{c_r}$$

wobei $2, 5, q_1, \ldots, q_r$ verschiedene Primzahlen sind, $a, b \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann teilt die Periodenlänge die Zahl $\prod_{j=1}^{r}(q_j - 1)q_j^{c_j - 1}$. Die Zahl der Ziffern zwischen dem Komma und dem Beginn der Periode ist $\max\{a, b\}$.

Ob Sie diese Aufgabe lösen können, hängt sehr davon ab, wieviel Sie bereits in der Linearen Algebra über die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ gelernt haben. Evtl. zeigen wir nur: Die Periodenlänge maximal $q - 1$ Stellen lang.

Monotone Folgen

Aufgabe 3. (Wallissches Produkt. Beispiele III.1.15 und Abschnitt 5.3 in Köngisberger). Definiere

$$a_n := \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1}.$$

Zeige

$$b := \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$$

existiert und $b \in [\sqrt{2}, 2]$.
Empfohlene Schritte

(a) $\left(\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

(b) $\left(\frac{a_n}{\sqrt{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

(c) Beide Grenzwerte existieren.

(d) b ist im gesuchten Intervall.

Limes superior und inferior

Aufgabe 4. (Übung III.1.34 im Skript) Zeigen Sie, dass für eine reell-wertige Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$\limsup_{j\to\infty} a_j = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \text{Für alle bis auf endlich viele } j \in \mathbb{N} \text{ gilt: } x \geq a_j\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

$$\liminf_{j\to\infty} a_j = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid \text{Für alle bis auf endlich viele } j \in \mathbb{N} \text{ gilt: } x \leq a_j\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$