Zentralübung Analysis I

Aufgabe 1. (Übung III.1.10 im Skript)
(auf $\overline{\mathbb{R}}$ erweiterte Version)

(a) Sind $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ reell-wertige Folgen, die beide in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergieren. Es gelte $\forall j \in \mathbb{N} : a_j \leq b_j$. Dann folgt

$$\lim_{j\to\infty} a_j \leq \lim_{j\to\infty} b_j \,.$$

(b) Angenommen es gilt sogar $\forall j \in \mathbb{N} : a_j < b_j$. Haben wir dann

$$\lim_{j\to\infty} a_j < \lim_{j\to\infty} b_j \,?$$

Aufgabe 2.
Wir betrachten im folgenden Folgen mit Indexmenge $\mathbb{N}_{>0}$.

(a) Beweisen Sie, dass die folgende Folge konvergiert, und geben Sie ihren Grenzwert an:

$$v_k := \frac{k \cdot \left(\sqrt{1 + 1/k} + 1\right)}{2k}.$$

Hinweis: Benutzen Sie das Sandwich-Lemma

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Folge konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert:

$$w_k := k \cdot \left(\sqrt{1 + 1/k} - 1\right).$$

Hinweis: Benutzen Sie Teil a) dieser Aufgabe.

Monotone Folgen

Aufgabe 3.
Sei $r \in \mathbb{R}$, $0 < r < 1$. Zeigen Sie ohne Verwendung der Bernoulli-Ungleichung, dass

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten beschränkt ist. Diskutieren Sie dann, welche Grenzwerte möglich sind.

Aufgabe 4.
Sei $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$. Zeigen Sie ohne Verwendung der Bernoulli-Ungleichung, dass

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Aufgabe 5. (Wallissches Produkt. Beispiele III.1.15 und Abschnitt 5.3 in Köngisberger). Definiere

$$a_n := \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1}\,.$$

Zeige

$$b := \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$$

existiert und $b \in [\sqrt{2}, 2]$.
Empfohlene Schritte

(a) $\left(\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

(b) $\left(\frac{a_n}{\sqrt{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

(c) Beide Grenzwerte existieren.

(d) b ist im gesuchten Intervall.

Limes superior und inferior

Aufgabe 6. (Übung III.1.34 im Skript) Zeigen Sie, dass für eine reell-wertige Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$\limsup_{j\to\infty} a_j = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \text{Für alle bis auf endlich viele } j \in \mathbb{N} \text{ gilt: } x \geq a_j\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

$$\liminf_{j\to\infty} a_j = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid \text{Für alle bis auf endlich viele } j \in \mathbb{N} \text{ gilt: } x \leq a_j\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$