

Zentralübung Analysis I

1 Geordnete Körper

Aufgabe 1 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung).

Sei $(K, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper. Beweisen Sie: Für alle $a_1, \dots, a_k \in K$ und $b_1, \dots, b_k \in K$ gilt

$$\left(\sum_{j=1}^k a_j b_j \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^k a_j^2 \right) \left(\sum_{j=1}^k b_j^2 \right).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Differenz der linken und rechten Seite gleich

$$\frac{1}{2} \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^k (a_r b_s - a_s b_r)^2$$

ist.

2 Komplexe Zahlen

Aufgabe 2.

Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von $z = \frac{3+4i}{2+5i}$.

Aufgabe 3.

Schreiben Sie die folgenden Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$i^7 + i + (1 + 2i)^2, \quad (2 + 2i)^5.$$

Aufgabe 4.

Schreiben Sie die folgenden Zahlen in Polardarstellung $r(\cos \phi + i \sin \phi)$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\phi \in [0, 2\pi[$:

$$5, \quad 4i, \quad \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{2025}.$$

Aufgabe 5.

Berechnen Sie alle Lösungen von

$$z^k = 1, \quad z^2 = i, \quad z^4 = -i.$$

Aufgabe 6.

Finde alle Lösungen z von

$$z^2 - 3 \cdot z + (3 - i) = 0 \tag{1}$$

Lösung.

$$\begin{aligned}(1) &\iff \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (3 - i) = 0 \\ &\iff \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + (3 - i) = 0 \\ &\iff \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(-\frac{3}{4} + i\right)\end{aligned}$$

Suche nun $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$(a + bi)^2 = \left(-\frac{3}{4} + i\right). \quad (2)$$

Zum einen betrachte den Realteil beider Seiten: $a^2 - b^2 = -\frac{3}{4}$.
Für $w = a + bi$ gilt $w\bar{w} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$ und

$$(w\bar{w})^2 = w^2\bar{w}^2 = \left(-\frac{3}{4} + i\right)\left(-\frac{3}{4} - i\right) = \frac{9}{16} + 1 = \left(\frac{5}{4}\right)^2,$$

also $a^2 + b^2 = \frac{5}{4}$. Daraus folgt $a^2 = \frac{1}{4}$ und $b^2 = 1$. Dies hat 4 Lösungen für (a, b) , aber (2) hat nur 2, wir haben also Information verloren. Dies ist ersichtlich, wenn wir den Imaginärteil beider Seiten von (2) bilden: $2ab = 1$. Wir erhalten

$$w = a + bi = \pm \left(\frac{1}{2} + i\right)$$

Daraus ergibt sich

$$(1) \iff z - \frac{3}{2} = \pm \left(\frac{1}{2} + i\right).$$

Es folgt $z = 2 + i$ oder $z = 1 - i$. □

Aufgabe 7.

Finde alle $z \in \mathbb{C}$ mit

$$\operatorname{Im}((2 - i) \cdot z) = 1. \quad (3)$$

Lösung. Wir schreiben $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(3) &\iff \operatorname{Im}((2a + b) + (2b - a)i) = 1 \\ &\iff 2b - a = 1\end{aligned}$$

Dies ist eine Gerade in der a - b -Ebene durch $(0, \frac{1}{2})$ mit Steigung $\frac{1}{2}$. □

Aufgabe 8.

Bestimme eine Zahl $a \in \mathbb{R}$, so dass $-i$ eine „Wurzel“ (gemeint: eine Nullstelle) von

$$P(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + a$$

ist. Zeige, dass dann i ebenfalls eine Wurzel ist. Zerlege dann $P(z)$ in Linearfaktoren.

Lösung. Wir rechnen

$$P(-i) = -2 + a,$$

also ist $a = 2$. Da alle Koeffizienten von P reell sind, gilt $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$. Wir haben somit: z ist Wurzel¹ von P genau dann, wenn \bar{z} Wurzel von P ist. Also ist auch i Wurzel von P . Da wir nun i und $-i$ als Wurzeln identifiziert haben, bekommen wir

$$P(z) = (z + i) \cdot (z - i) \cdot Q(z)$$

für eine polynomiale Funktion Q mit $\deg Q = 2$. Polynom-Division liefert $Q(z) = z^2 - 2z + 2$.

Wir rechnen nun

$$\begin{aligned} Q(z) = 0 &\iff z^2 - 2z + 2 = 0 \\ &\iff (z - 1)^2 = -1 \\ &\iff z - 1 = \pm i \\ &\iff z = 1 \pm i \end{aligned}$$

Da der Leitkoeffizient von Q die Zahl 1 ist, ergibt sich

$$P(z) = (z + i) \cdot (z - i) \cdot (z - (1 + i)) \cdot (z - (1 - i)).$$

□

¹Wiederholung: gemeint ist „eine Nullstelle“