

Zentralübung Analysis I

1 Äquivalenzrelationen und Ordnungsrelationen

Aufgabe 1.

Sei R eine Äquivalenzrelation auf M . Wir definieren für $x \in M$ die Äquivalenzklasse von x als

$$[x] := \{y \in M \mid xRy\}$$

Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in M$ gilt:

(a)

$$y \in [x] \iff [x] = [y]$$

(b)

$$[x] = [y] \quad \vee \quad [x] \cap [y] = \emptyset.$$

Aufgabe 2.

Sei R eine Ordnungsrelation auf M .

- Ein Element $x \in M$ heißt *Maximum*, falls $\forall y \in M : yRx$.
- Ein Element $x \in M$ heißt *maximales Element*, falls $\forall y \in M : (xRy \rightarrow x = y)$.

- (a) Zeigen Sie, dass jedes Maximum ein maximales Element ist.
- (b) Ist R eine totale Ordnung, so ist jedes maximale Element ein Maximum.
- (c) Belegen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass maximale Elemente nicht immer Maxima sind.

2 Ein Modell für \mathbb{Z}

Aufgabe 3.

Wir definieren $M := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Wir definieren eine Relation $\sim \subset M \times M$:

$$(a, b) \sim (n, m) \quad : \iff \quad a + m = b + n$$

Zeigen Sie: \sim ist eine Äquivalenzrelation auf M .

Aufgabe 4.

Sei \sim die in Aufgabe 3 definierte Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Sei Z die Menge der Äquivalenzklassen. Es bezeichne $[(a, b)]$ die Äquivalenzklasse von (a, b) . Zeigen Sie:

- (a) Es gibt eine Abbildung $+$: $Z \times Z \rightarrow Z$ mit $([(a, b)], [(c, d)]) \mapsto [(a + c, b + d)]$.
- (b) Es gibt eine Abbildung \cdot : $Z \times Z \rightarrow Z$ mit $([(a, b)], [(c, d)]) \mapsto [(ac + bd, ad + bc)]$.
- (c) $(Z, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit 1.
- (d) Die Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow Z, n \mapsto [n, 0]$ ist injektiv und mit den Additionen und Multiplikationen verträglich.

Man erhält, dass Z ein Modell der ganzen Zahlen ist.

3 Mächtigkeiten

Aufgabe 5.

\mathbb{N} und \mathbb{Q} sind gleich mächtig.

Aufgabe 6.

Für jede Menge X gilt: $\mathcal{P}(X)$ ist mächtiger als X .

4 Vollständige Induktion

Aufgabe 7.

Beweisen Sie durch Induktion über n : Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $2^{4n+2} + 3^{n+2}$ durch 13 teilbar.

5 Kombinatorik

Aufgabe 8. (Trinomische Formel)

- (a) Wenn M eine Menge mit $n = \#M \in \mathbb{N}$ ist. Seien $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$ mit $k_1 + k_2 + k_3 = n$. Wieviele Möglichkeiten gibt es M in drei disjunkte Teilmengen Q_1, Q_2 und Q_3 mit $\#Q_i = k_i$ zu zerlegen? (Das heißt: für $i \neq j$ haben wir $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ und es gilt $M = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$.)
- (b) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_{ijk} in der Formel

$$(x + y + z)^n = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n a_{ijk} x^i y^j z^k.$$

Bemerkung: dies ist die trinomische Formel.

6 Supremum, Infimum etc

Aufgabe 9.

Besitzen die folgenden Mengen A ein Minimum oder ein Infimum in \mathbb{R} oder in \mathbb{Q} ? Wenn ja, bestimmen Sie es bitte.

$$A =] - 3, 2[$$

$$A = \mathbb{Q} \cap [-2, 0]$$

$$A = \mathbb{Q} \cap [-\sqrt{2}, 0]$$

$$A = \emptyset$$

Aufgabe 10.

Sei nun $M = [0, 1]$ mit der Standard-Ordnung \leq und $A = \emptyset$. Bestimmen Sie die Menge aller oberen Schranken $\overline{S}(A, M)$ und die Menge aller unteren Schranken $\underline{S}(A, M)$. Existieren dann Supremum und Infimum von \emptyset ?

Aufgabe 11.

Sei $M = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ mit der Ordnung \subset , und $A = \{\{1\}, \{2\}\}$. Bestimmen Sie die Menge aller oberen Schranken $\overline{S}(A, M)$ und die Menge aller unteren Schranken $\underline{S}(A, M)$.