

Zentralübung Analysis I

1 Äquivalenzrelationen und Ordnungsrelationen

Aufgabe 1.

Zeigen Sie: Ist R eine antisymmetrische Äquivalenzrelation auf M , so ist R die Diagonale δ_M in $M \times M$.

Aufgabe 2.

Sei $M = \{1, 2, 3\}$.

- (a) Bestimmen Sie alle Äquivalenzrelationen R auf M mit $1R2$.
- (b) Bestimmen Sie alle Ordnungsrelationen Q auf M mit $1Q2$. Welche dieser Ordnungsrelationen sind total?

Aufgabe 3.

Sei R eine Äquivalenzrelation auf M . Wir definieren für $x \in M$ die Äquivalenzklasse von x als

$$[x] := \{y \in M \mid xRy\}$$

Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in M$ gilt:

(a)

$$y \in [x] \iff [x] = [y]$$

(b)

$$[x] = [y] \iff [x] \cap [y] = \emptyset.$$

Aufgabe 4.

Sei R eine Ordnungsrelation auf M .

- Ein Element $x \in M$ heißt *Maximum*, falls $\forall y \in M : yRx$.
- Ein Element $x \in M$ heißt *maximales Element*, falls $\forall y \in M : (xRy \rightarrow x = y)$.

Zeigen Sie, dass jedes Maximum ein maximales Element ist. Belegen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass maximale Elemente nicht immer Maxima sind.

2 Mächtigkeiten

Aufgabe 5.

\mathbb{N} und \mathbb{Q} sind gleich mächtig.

Aufgabe 6. (Übung 8.17 im Skript) Sei \mathcal{M} ein Mengensystem. Für $A, B \in \mathcal{M}$ definieren wir

$$A \sim B \quad : \iff \quad A \text{ und } B \text{ sind gleich mächtig}$$

und

$$A \lesssim B \quad : \iff \quad (A \text{ und } B \text{ sind gleich mächtig) \text{ oder} \\ (B \text{ ist mächtiger als } A)$$

- (a) Zeigen Sie, dass \sim eine Äquivalenzrelation auf \mathcal{M} ist. Das heißt, zeigen Sie, dass \sim reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
- (b) Zeigen Sie, dass \lesssim reflexiv und transitiv ist.
Zeigen Sie, dass folgende abgeschwächte Form der Antisymmetrie gilt:
Für alle $A, B \in \mathcal{M}$ gilt:

$$A \lesssim B \wedge B \lesssim A \Rightarrow A \sim B.$$

Aufgabe 7.

Für jede Menge X gilt: $\mathcal{P}(X)$ ist mächtiger als X .

3 Vollständige Induktion

Aufgabe 8.

Zeigen Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 1$:

(a) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- (b) (Fibonacci-Folge) Sei $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$, und für alle natürlichen Zahlen $k \geq 3$ gelte

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2}.$$

Zeige, dass dann

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

4 Kombinatorik

Aufgabe 9. (Gleichung nach Satz II.2.3 im Skript)

Zeigen Sie

$$\#(\text{Abb}(M, N)) = (\#N)^{(\#M)}.$$

Hinweis: nutzen Sie Induktion über $m \in \mathbb{N}$ (oder über $m \in \mathbb{N}_{>0}$), wobei $m = \#M$.

Lösung. Die Aussage ist offensichtlich richtig für $m = 0$, also $M = \emptyset$. Dann hat $\text{Abb}(M, N)$ als einziges Element $\emptyset: \emptyset \rightarrow N$.

Induktionsanfang: $m = 1$.

Die Aussage ist für $m = 1$ offensichtlich.

Induktionsschritt von m auf $m + 1$.

Nun sei $\#M = m + 1$ und sei $x \in M$. Definiere $M' := M \setminus \{x\}$.

Wir definieren $F: \text{Abb}(M', N) \times N \rightarrow \text{Abb}(M, N)$ wie folgt: Wenn $f: M' \rightarrow N$ und $z \in N$, so definieren wir $F(f, z): M \rightarrow N$ durch

$$F(f, z)(y) := \begin{cases} f(y) & \text{falls } y \neq x \\ z & \text{falls } y = x. \end{cases}$$

Wir definieren ebenfalls

$$\begin{aligned} G: \text{Abb}(M, N) &\longrightarrow \text{Abb}(M', N) \times N \\ f &\mapsto (f|_{M'}, f(x)). \end{aligned}$$

Man überprüft leicht, dass $G \circ F = \text{id}_{\text{Abb}(M', N) \times N}$ und $F \circ G = \text{id}_{\text{Abb}(M, N)}$. Also ist G die Umkehrfunktion von F ist, und somit ist F bijektiv. Wir erhalten nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} \#\text{Abb}(M, N) &= \#(\text{Abb}(M', N) \times N) \stackrel{\text{Satz 2.1}}{=} (\#\text{Abb}(M', N)) \cdot (\#\{0, 1\}) \\ &= (\#N)^m \cdot 2 = 2^{m+1}. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 10. (Siehe Satz II.2.3 im Skript)

Zeigen Sie: Angenommen, eine Menge M hat $n \in \mathbb{N}$ Elemente, dann gibt es 2^n Elemente in $\mathcal{P}(M)$.

Lösung. Eine auf M definierte Aussageform A ist eine Abbildung

$$M \longrightarrow \{w, f\}, \quad x \mapsto A(x).$$

Es gibt also nach der vorigen Aufgabe 2^n auf M definierte Aussageformen. Jede Aussageform auf M definiert eine Teilmenge von M und jede Teilmenge kommt von genau einer solchen Aussageform. Also ist auch die Anzahl der Teilmengen von M gleich 2^n . □

Aufgabe 11. (Trinomische Formel)

- (a) Wenn M eine Menge mit $n = \#M \in \mathbb{N}$ ist. Seien $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$ mit $k_1 + k_2 + k_3 = n$. Wieviele Möglichkeiten gibt es M in drei disjunkte Teilmengen Q_1, Q_2 und Q_3 mit $\#Q_i = k_i$ zu zerlegen? (Das heißt: für $i \neq j$ haben wir $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ und es gilt $M = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$.)
- (b) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_{ijk} in der Formel

$$(x + y + z)^n = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n a_{ijk} x^i y^j z^k.$$

Bemerkung: dies ist die trinomische Formel.