

Zentralübung Analysis I

1 Zuordnungen, Abbildungen und Funktionen

Aufgabe 1. (Übung 8.11 im Skript)

- (a) Sei f eine Zuordnung. Dann ist f^{-1} genau dann eine Zuordnung, wenn f injektiv ist.
- (b) Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, so ist $f^{-1} : Y \rightarrow X$ genau dann eine Abbildung, wenn $f : X \rightarrow Y$ bijektiv ist.
- (c) Ist $f : X \rightarrow Y$ eine bijektive Abbildung, so gilt $f^{-1} \circ f = \delta_X$ und $f \circ f^{-1} = \delta_Y$.

Aufgabe 2. (Übung 8.12 im Skript)

- (a) Sind $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ surjektiv, dann ist auch $g \circ f : X \rightarrow Z$ surjektiv.
- (b) Sind $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ injektiv, dann ist auch $g \circ f : X \rightarrow Z$ injektiv.

2 Äquivalenzrelationen und Ordnungsrelationen

Aufgabe 3.

Zeigen Sie: Ist R eine antisymmetrische Äquivalenzrelation auf M , so ist R die Diagonale δ_M in $M \times M$.

Aufgabe 4.

Zu $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Relation $R := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x - y \in k\mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie: R ist eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{Z} .

Aufgabe 5.

Sei $M = \{1, 2, 3\}$.

- (a) Bestimmen Sie alle Äquivalenzrelationen R auf M mit $1R2$.
- (b) Bestimmen Sie alle Ordnungsrelationen Q auf M mit $1Q2$. Welche dieser Ordnungsrelationen sind total?

Aufgabe 6.

Sei R eine Äquivalenzrelation auf M . Wir definieren für $x \in M$ die Äquivalenzklasse von x als

$$[x] := \{y \in M \mid xRy\}$$

Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in M$ gilt:

(a)

$$y \in [x] \iff [x] = [y]$$

(b)

$$[x] = [y] \vee [x] \cap [y] = \emptyset.$$

Aufgabe 7.

Sei R eine Ordnungsrelation auf M .

- Ein Element $x \in M$ heißt *Maximum*, falls $\forall y \in M : yRx$.
- Ein Element $x \in M$ heißt *maximales Element*, falls $\forall y \in M : (xRy \rightarrow x = y)$.

Zeigen Sie, dass jedes Maximum ein maximales Element ist. Belegen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass maximale Elemente nicht immer Maxima sind.

3 Mächtigkeiten

Aufgabe 8.

\mathbb{N} und \mathbb{Z} sind gleich mächtig.

Aufgabe 9. (Übung 8.17 im Skript) Sei \mathcal{M} ein Mengensystem. Für $A, B \in \mathcal{M}$ definieren wir

$$A \sim B \quad : \iff \quad A \text{ und } B \text{ sind gleich mächtig}$$

und

$$A \lesssim B \quad : \iff \quad (A \text{ und } B \text{ sind gleich mächtig}) \text{ oder } (B \text{ ist mächtiger als } A)$$

- (a) Zeigen Sie, dass \sim eine Äquivalenzrelation auf \mathcal{M} ist. Das heißt, zeigen Sie, dass \sim reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
- (b) Zeigen Sie, dass \lesssim reflexiv und transitiv ist.
Zeigen Sie, dass folgende abgeschwächte Form der Antisymmetrie gilt:
Für alle $A, B \in \mathcal{M}$ gilt:

$$A \lesssim B \wedge B \lesssim A \Rightarrow A \sim B.$$

Aufgabe 10.

Für jede Menge X gilt: $\mathcal{P}(X)$ ist mächtiger als X .

4 Vollständige Induktion

Zeigen Sie für jede natürliche Zahl ≥ 1 :

(a) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

(b) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) (Fibonacci-Folge) Sei $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$, und für alle natürlichen Zahlen $k \geq 3$ gelte

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2}.$$

Zeige, dass dann

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$