
Präsenzblatt Woche 2

Mini-Quiz 1. *In der Übung wird die Wahrheitstafel für eine der folgenden (zufällig ausgewählten) aussagenlogischen Verknüpfungen abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung.*

$$\neg A \quad A \wedge B \quad A \vee B \quad A \rightarrow B \quad A \leftrightarrow B$$

Die folgenden Aussagen werden in der ersten Übung (die in der zweiten Woche stattfinden) bearbeitet und besprochen:

1. Aufgabe (0 Punkte).

Wir definieren die folgenden zwei Aussagen:

P Ich mag Mathematik.

Q Ich werde mindestens 40 Stunden die Woche für mein Studium aufwenden.

Schreiben Sie folgende Aussagen auf Deutsch auf:

a) $P \wedge Q$

b) $P \rightarrow Q$

c) $\neg P \vee \neg Q$

2. Aufgabe (0 Punkte).

Wir definieren die folgenden Aussagen:

P Paola freut sich.

Q Paola malt ein Bild.

R Ralf freut sich.

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe von aussagenlogischen Verknüpfungen:

a) Wenn Paola sich freut, so malt sie ein Bild.

b) Wenn Paola sich freut und ein Bild malt, so freut sich Ralf nicht.

c) Paola freut sich nur, wenn sie ein Bild malt.

3. Aufgabe (0 Punkte).

Beweisen Sie mit Hilfe von Wahrheitstabellen, dass für alle Belegungen der Aussage A durch die Wahrheitswerte *wahr* oder *falsch* die folgenden Aussagen wahr sind:

a) $A \vee \neg A$

b) $A \leftrightarrow \neg\neg A$

4. Aufgabe (0 Punkte).

a) Wie viele Elemente haben die folgenden Mengen X_1, X_2 ?

(a) $X_1 := \{\{\{\}\}, \{\}, \{\}\}$

(b) $X_2 := \{\{x, y\}, y, \{x\}, x\}$ für $x \neq y$

b) Seien $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B := \{2, 4, 6\}$.

Bestimmen Sie die Mengen $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$.

Analysis I: Übungen

Universität Regensburg, Wintersemester 2025/26

Prof. Dr. Bernd Ammann, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Freitag, 24.10., 12:00 im Zettelkasten



Übungsblatt 1

1. Aufgabe (4 Punkte).

Zeigen Sie, dass für alle Belegungen von A , B und C mit Wahrheitswerten *wahr* und *falsch*, die folgenden Aussagen wahr sind:

- $\neg(A \wedge \neg A)$ (Widerspruchsfreiheit)
- $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ (eine der de Morganschen Regeln)
- $(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ (eines der Distributivgesetze)
- $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B))$
- $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\neg(A \underline{\vee} B))$
- $B \rightarrow (A \vee B)$
- $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

2. Aufgabe (4 Punkte).

- Gibt es eine Belegung der Aussagen A , B und C durch die Wahrheitswerte *wahr* oder *falsch*, so dass die folgende Aussage wahr wird?

$$((A \wedge B) \wedge (\neg(A \wedge C))) \vee (B \wedge C)$$

Wenn *nein*, so beweisen Sie, dass es keine geben kann. Wenn *ja*, so geben Sie eine solche Belegung an und zeigen sie, dass der Ausdruck wahr ist für diese Belegung.

- Gibt es eine Belegung der Aussagen D , E und F durch die Wahrheitswerte *wahr* oder *falsch*, so dass die folgende Aussage wahr wird?

$$(\neg D \vee E) \wedge (E \rightarrow (\neg F \wedge \neg D)) \wedge (D \vee F)$$

Wenn *nein*, so beweisen Sie, dass es keine geben kann. Wenn *ja*, so geben Sie eine solche Belegung an und zeigen sie, dass der Ausdruck wahr ist für diese Belegung.

3. Aufgabe (4 Punkte).

Nach Ermittlungen der Polizei sind die folgenden drei Aussagen alle wahr:

- Ist Max oder Bruno ein Täter, so ist Karl unschuldig.
- Ist Karl oder Max unschuldig, so ist Bruno ein Täter.
- Ist Max ein Täter, so auch Karl.

Ist es möglich aus ihnen heraus den Täter **eindeutig** zu bestimmen? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Aufgabe (4 Punkte).

Wir definieren die folgenden Aussagen:

- **A** Leo kommt mit dem Fahrrad zur Uni
- **B** Leo kommt mit dem Auto zur Uni
- **C** Hannah kommt mit dem Fahrrad zur Uni
- **D** Hannah kommt mit dem Auto zur Uni
- **E** Es schneit
- **F** Es ist warm
- **G** Die Busse sind voll
- **H** Es ist Stau

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe von aussagenlogischen Verknüpfungen:

- a) Wenn es warm ist oder wenn die Busse nicht voll sind, dann kommt Hannah entweder mit dem Fahrrad zur Uni oder, falls kein Stau ist, mit dem Auto.
- b) Wenn es nicht schneit, dann folgt aus dem, dass Hannah mit dem Fahrrad zur Uni kommt, dass es entweder nicht warm ist oder dass Leo mit dem Fahrrad zur Uni kommt.

Analysis I: Übungen

Universität Regensburg, Wintersemester 2025/26

Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Freitag, 31.10., 12:00 im Zettelkasten



Übungsblatt 2

Mini-Quiz 2. In der Übung (in der Woche vom 24.10.-31.10.) wird die Definition von einer der folgenden Mengenoperationen abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung.

$$A \cup B, A \cap B, A \Delta B, A \setminus B.$$

1. Aufgabe: (*Distributivität des kartesischen Produktes*) (4 Punkte).

a) Seien M , N und Z drei Mengen. Zeigen Sie die folgende „Rechenregeln“:

$$(M \cup N) \times Z = (M \times Z) \cup (N \times Z)$$

$$(M \cap N) \times Z = (M \times Z) \cap (N \times Z)$$

b) i) Gilt für alle Mengen M_1, M_2, N_1, N_2 die Gleichheit

$$(M_1 \cup M_2) \times (N_1 \cup N_2) = (M_1 \times N_1) \cup (M_2 \times N_2)?$$

Wenn ja, so beweisen Sie es. Wenn nein, so geben Sie ein Gegenbeispiel an.

ii) Gilt für alle Mengen M_1, M_2, N_1, N_2 die Gleichheit

$$(M_1 \cap M_2) \times (N_1 \cap N_2) = (M_1 \times N_1) \cap (M_2 \times N_2)?$$

Wenn ja, so beweisen Sie es. Wenn nein, so geben Sie ein Gegenbeispiel an.

2. Aufgabe (4 Punkte).

Betrachten Sie die Aussage

“In keiner Stadt der Oberpfalz hat kein Erwachsener kein Auto”.

Zu welchen der folgenden Aussagen ist diese Aussage äquivalent? (mehrere Antworten können richtig sein)

Begründen Sie für jede der Aussagen bitte kurz Ihre Antwort.

a) Es gibt keinen Erwachsenen in der Oberpfalz, der ein Auto hat.

b) In jeder Stadt der Oberpfalz gibt es mindestens einen Erwachsenen, der kein Auto hat.

c) In jeder Stadt der Oberpfalz gibt es mindestens einen Erwachsenen, der mindestens ein Auto hat.

d) In jeder Stadt der Oberpfalz haben alle Erwachsenen kein Auto.

3. Aufgabe (4 Punkte).

Verneinen Sie die folgende Aussage und vereinfachen Sie die verneinte Aussage, bis keine explizite Verneinung \neg mehr dasteht:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} : \forall x, y \in \mathbb{R} : (|x - y| < \delta) \rightarrow (|x^2 - y^2| < \varepsilon).$$

4. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $X := \{1\}$.

- a) Bestimmen Sie die Menge $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.
- b) Bestimmen Sie die Menge $\{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))) \mid Q \text{ hat genau zwei Elemente}\}$.

Übungsblatt 3

Mini-Quiz 3. In der Übung wird die Definition von einem der folgenden Begriffe/Eigenschaften abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung.

Äquivalenzrelation

Ordnungsrelation

Wann ist eine Ordnungsrelation eine totale Ordnung?

1. Aufgabe (4 Punkte).

Seien $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen.

a) Seien $A \subset X$, $M \subset Y$. Zeigen Sie:

$$f_{\#}(A) \subset M \Leftrightarrow A \subset f^{\#}(M)$$

b) Zeigen Sie: Für alle $M \subset Y$ gilt

$$f_{\#}(f^{\#}(M)) \subset M. \tag{1}$$

c) In Gleichung (1) von Teil b) gilt Gleichheit für alle $M \subset Y$ genau dann, wenn f surjektiv ist.

d) Zeigen Sie

$$(g \circ f)^{\#} = f^{\#} \circ g^{\#}$$

(als Gleichheit von Abbildungen $\mathcal{P}(Z) \rightarrow \mathcal{P}(X)$).

2. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung:

a) Zeigen Sie: Für alle $A, B \subset X$, $V, W \subset Y$ gilt

$$\begin{aligned} f^{\#}(V \cup W) &= f^{\#}(V) \cup f^{\#}(W) \\ f_{\#}(A \cup B) &= f_{\#}(A) \cup f_{\#}(B) \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie: Für alle $A, B \subset X$, $V, W \subset Y$ gilt

$$\begin{aligned} f^{\#}(V \cap W) &= f^{\#}(V) \cap f^{\#}(W) \\ f_{\#}(A \cap B) &\subset f_{\#}(A) \cap f_{\#}(B), \end{aligned} \tag{2}$$

und in (2) gilt Gleichheit für alle $A, B \subset X$ genau dann, wenn f injektiv ist.

3. Aufgabe (4 Punkte).

Seien $f : X \rightarrow Y$ und $h : Y \rightarrow Z$ Abbildungen.

- a) Zeigen Sie: Ist $h \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv. Ist $h \circ f$ surjektiv, so ist auch h surjektiv.
- b) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
- f ist surjektiv.
 - Es existiert eine Abbildung $g : Y \rightarrow X$ mit $f \circ g = \text{id}_Y$.
- c) Sei $X \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
- f ist injektiv.
 - Es existiert eine Abbildung $g : Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$.
- d) Sei $X \neq \emptyset$. Es gibt eine injektive Abbildung $F : X \rightarrow Y$ genau dann, wenn es eine surjektive Abbildung $G : Y \rightarrow X$ gibt.

4. Aufgabe: Satz von Schröder-Bernstein (4 Punkte).

Seien X und Y Mengen, so dass zwei injektive Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow X$ existieren. Wir wollen in dieser Aufgabe als f und g eine bijektive Abbildung $X \rightarrow Y$ konstruieren.

Wir definieren die folgenden Mengen: $A_0 := X \setminus g_{\#}(Y)$ und für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$A_{n+1} := g_{\#}(f_{\#}(A_n)) \subset X.$$

Sei $A \subset X$ die Vereinigung dieser Mengen:

$$A := \bigcup \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

- a) Zeigen Sie, dass $g_{\#}(Y \setminus f_{\#}(A)) \subset X \setminus A$.
- b) Zeigen Sie, dass $X \setminus A \subset g_{\#}(Y \setminus f_{\#}(A))$.
Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, wieso $X \setminus A \subset g_{\#}(Y)$.
- c) Folgern Sie aus a) und b), dass $g_A := g|_{Y \setminus f_{\#}(A)} : Y \setminus f_{\#}(A) \rightarrow X \setminus A$ bijektiv ist.
- d) Wir definieren nun die Abbildung

$$h : X \rightarrow Y, \quad h(x) := \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g_A^{-1}(x), & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass h bijektiv ist.

Übungsblatt 4

Mini-Quiz 4. In der Übung wird die Definition von einem der folgenden Begriffe/Eigenschaften abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung.

X und Y sind **gleichmächtig**

Y ist **mächtiger** als X

X ist **abzählbar**

1. Aufgabe (4 Punkte).

Beweisen Sie:

- a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

- b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^n (k+1)2^k = n2^{n+1}.$$

2. Aufgabe (1+1+2 Punkte).

Zeigen Sie:

- a) Für alle $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, gilt $2^{\binom{2n-1}{n}} = \binom{2n}{n}$.
- b) Für alle $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, gilt $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0$.
Hinweis: Binomische Formel!
- c) Für alle $n, l \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^n \binom{l+k}{k} = \binom{l+n+1}{n}.$$

Hinweis: Induktion über n .

3. Aufgabe (4 Punkte).

- a) Zeigen Sie, dass für alle $n, k \in \mathbb{N}, k \neq 0$, das Produkt $\prod_{j=1}^k (n+j)$ durch $k!$ teilbar ist.

Hinweis: Binomialkoeffizienten!

Erinnerung: $c \in \mathbb{N}$ durch $d \in \mathbb{N}$ teilbar \Leftrightarrow Es existiert $t \in \mathbb{N}$ mit $c = td$.

- b) Seien $k, n \in \mathbb{N}, k \neq 0$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n , dass $(kn)!$ durch $(k!)^n$ teilbar ist.

4. Aufgabe (4 Punkte).

In der Vorlesung haben Sie den Satz über vollständigen Induktion kennengelernt. Wenn $A(\cdot)$ eine auf \mathbb{N} definierte Aussageform ist, so ist dabei der Induktionsschritt

$$\forall n \in \mathbb{N} : (A(n) \Rightarrow A(n+1)).$$

Bei der sogenannten *starken vollständigen Induktion* wird dieser Induktionsschritt durch die folgende Aussage ersetzt, genannt den *Induktionsschritt der starken vollständigen Induktion*:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left((A(0) \wedge A(1) \wedge \dots \wedge A(n-1) \wedge A(n)) \Rightarrow A(n+1) \right). \quad (1)$$

Zeigen Sie:

Falls $A(0)$ wahr ist und falls (1) gilt, so ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ wahr.

Hinweis: Betrachten Sie die Aussage $B(n) := A(0) \wedge A(1) \wedge \dots \wedge A(n-1) \wedge A(n)$.

Bemerkung: Den hiermit erhaltenen Satz nennt man den *Satz der starken vollständigen Induktion*.

Übungsblatt 5

Mini-Quiz 5. In der Übung wird die Definition von einem der folgenden Begriffe/Eigenschaften abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung.

- Unter welcher Bedingung ist ein kommutativer Ring mit Eins ein Körper?
 - Wie definiert man das Supremum einer Teilmenge A in einer geordneten Menge M ?
 - Geben Sie eine Teilmenge von \mathbb{Q} an, die ein Supremum in \mathbb{Q} , aber kein Maximum besitzt.
-

Auf diesem gesamten Blatt sei $(K, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper. Wir bezeichnen mit 0_K und mit 1_K das Null- und das Einselement in K .

1. Aufgabe (1+0.5+1+0.5+1 Punkte).

Zeigen Sie allein unter Verwendung der Axiome eines geordneten Körpers :

- a) Für alle $x \in K$ gilt

$$0_K \leq x \iff -x \leq 0_K.$$

- b) Ist $z \leq 0$, dann gilt für alle $x, y \in K$

$$x \leq y \implies z \cdot x \geq z \cdot y.$$

- c) Für alle $x \in K$ gilt $x \cdot x \geq 0$.

- d) $0_K < 1_K$

- e) Ist $z < 0$, so ist $z^{-1} < 0$.

2. Aufgabe (2+1+1 Punkte).

Wir definieren rekursiv eine Abbildung $i: \mathbb{N} \rightarrow K$ durch $i(0_{\mathbb{N}}) := 0_K$ und $i(n + 1_{\mathbb{N}}) := i(n) + 1_K$. Hierbei bezeichnen die Indizes $-_{\mathbb{N}}$ und $-_K$ die Null- und Einselemente in \mathbb{N} und K .

- a) Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$:

$$n < m \iff i(n) < i(m)$$

Hinweis: Hier ist $n < m$ für natürliche Zahlen n, m wie in Kapitel II.1 definiert, d.h.

$$n < m \iff \text{Es existiert } k \in \mathbb{N}, k \neq 0, \text{ mit } m = n + k.$$

Sie dürfen verwenden, dass dies eine totale Ordnung auf \mathbb{N} definiert.

- b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $i: \mathbb{N} \rightarrow K$ injektiv ist.

- c) Folgern Sie, dass es auf einem Körper $(F, +, \cdot)$ mit endlich vielen Elementen keine totale Ordnung \leq geben kann, so dass $(F, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper wird.

3. Aufgabe: (Bernoullische Ungleichung) (4 Punkte).

- a) Sei $x \in K$ mit $x \geq -1$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

- b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei $x_k \in K$ mit $x_k \geq 0$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\prod_{k=1}^n (1+x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n x_k.$$

Gilt diese Ungleichung auch unter der Voraussetzung: für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $x_k \in K$ mit $x_k \geq -1$?

Hinweis: Eine Antwort auf eine derartige Frage muss immer begründet werden.

4. Aufgabe (4 Punkte).

Wir definieren rekursiv Zahlen a_n für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$, über:

$a_1 := 1$, $a_2 := 1$, und für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$: $a_{n+2} := a_{n+1} + a_n$.

Hinweis: Die explizite Formel für a_n aus der Zentralübung vom 11.11. darf hier nicht benutzt werden. Sie sollte die Aufgabe unabhängig von der Formel des Zentralübungsblatts zu lösen.

- a) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach m , dass für alle natürliche Zahlen m mit $m \geq 1$ gilt:

$$a_{n-1} \cdot a_m + a_n \cdot a_{m+1} = a_{n+m}.$$

Tipp: Sie dürfen und sollten dazu die starke Induktion von Blatt 4, Aufgabe 4 benutzen, das heißt für den Induktionsschritt nehmen Sie an, dass die Aussage für alle $m \in \{1, \dots, k\}$ gilt, und Sie müssen daraus folgern, dass die Aussage auch für $m = k + 1$ gilt.

- b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach k , dass für alle $k, n \in \mathbb{N}_{>0}$ die Zahl a_{kn} durch a_n teilbar ist.

Hinweis: Benutzen Sie a) mit $m := kn$.



Übungsblatt 6

Mini-Quiz 6. In der Übung wird eine der folgenden Definitionen abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung.

- Definieren Sie präzise: „Die K -wertige Folge $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \in K$.“
- Was ist die Supremumseigenschaft?
- Wann nennt man einen geordneten Körper archimedisch?

1. Aufgabe (1+1+2 Punkte).

- Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von $z := \frac{i-4}{3-2i}$.
- Bestimmen Sie alle $k \in \mathbb{Z}$, für die $(1+i)^k \in \mathbb{R}$.
- Finden Sie alle $z \in \mathbb{C}$ so, dass

$$\operatorname{Re}(2z(1+i)) + z\bar{z} + 1 = 0.$$

2. Aufgabe (1+3 Punkte).

- Seien A, B nicht-leere, nach oben beschränkte Mengen. Zeigen Sie, dass $A \cup B$ nach oben beschränkt ist und zeigen Sie $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.
- Sei I eine nicht-leere Menge und für alle $j \in J$ sei A_j eine nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge von \mathbb{R} . Wir schreiben

$$\bigcup_{j \in J} A_j := \bigcup \{A_j \mid j \in J\}$$

für die Vereinigung aller A_j .

Zeigen Sie: $\bigcup_{j \in J} A_j$ ist nach oben beschränkt, genau dann, wenn die Menge $\{\sup A_j \mid j \in J\}$ nach oben beschränkt ist und in diesem Fall gilt

$$\sup\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \sup\{\sup A_j \mid j \in J\}.$$

3. Aufgabe (4 Punkte).

Wir betrachten die folgenden Teilmengen der reellen bzw. komplexen Zahlen:

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R},$$

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}i] := \{a + b\sqrt{2}i \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{2}i]$ ein Körper ist.

b) Wir definieren die folgende Teilmenge von $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$:

$$P := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ und } 0 \leq a - b\sqrt{2}\},$$

wobei \leq die übliche Ordnung auf \mathbb{R} ist.

Wir definieren weiterhin für alle $x, y \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$:

$$x \preceq y :\Leftrightarrow y - x \in P.$$

Sie dürfen die Aussage aus der Vorlesung verwenden, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ein Körper ist. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], \preceq)$ ein geordneter Körper ist.

Begründen Sie dann, dass der Körper $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ zwei verschiedene Ordnungen trägt, die daraus einen geordneten Körper machen.

c) *Bonusaufgabe* (+2 Bonuspunkte): Zeigen Sie, dass es keine Ordnung \preceq auf $\mathbb{Q}[\sqrt{2}i]$ gibt, so dass $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}i], \preceq)$ ein geordneter Körper ist.

4. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $(K, +, \cdot, \leq)$ ein archimedisch geordneter Körper. Wir betrachten \mathbb{N} und \mathbb{Q} als Teilmengen von K vermöge der injektiven Abbildungen $i_{\mathbb{N}}$ bzw. $i_{\mathbb{Q}}$. Zeigen Sie:

a) Für alle $\varepsilon \in K_{>0}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

b) Zu jedem $x \in K$ existiert ein eindeutiges $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x < n + 1$.

(Man schreibt dann $\lfloor x \rfloor$ für n und nennt $\lfloor x \rfloor$ die Gauß-Klammer von x).

Hinweis: Für $x > 0$ wende man die Wohlordnung von \mathbb{N} auf eine geeignete Teilmenge von \mathbb{N} an! Benutzen Sie, dass K archimedisch geordnet ist, um den allgemeinen Fall auf $x > 0$ zu reduzieren.

c) Für alle $x, y \in K$ mit $y - x > 1$, existiert $a \in \mathbb{Z}$, so dass $x < a < y$.

Hinweis: Betrachten Sie $\lfloor x + 1 \rfloor$.

d) Für alle $x, y \in K$ mit $y > x$, existiert $q \in \mathbb{Q}$, so dass $x < q < y$.

Hinweis: Nutzen Sie c) und zusätzlich die archimedische Eigenschaft oder a).

Übungsblatt 7

Mini-Quiz 7. In der Übung wird eine der folgenden Definitionen abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung.

- Beschränktheit einer Folge
 - Teilfolge
 - Häufungspunkt einer Folge
-

1. Aufgabe (4 Punkte).

Bestimmen Sie in den folgenden Fällen, ob die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ in \mathbb{R} konvergiert und falls ja, finden Sie den Grenzwert. Benützen Sie dabei nur die in der Vorlesung gezeigten Sachverhalte. Geben Sie jeweils an, welche Aussage (inklusive der Nummerierung im Skript) Sie benutzt haben:

- a) $a_n := 1 + (-2)^{-n}$,
- b) $a_n := \frac{(-1)^n}{1 + n^7}$,
- c) $a_n := (-1)^n \frac{n^3 + 3}{2n^3 + 1}$,
- d) $a_n := \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$.

2. Aufgabe (4 Punkte).

Zeigen Sie:

- a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reell-wertige Nullfolge und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine komplex-wertige Folgen. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte: $|b_n| \leq a_n$. Dann folgt, dass $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.
- b) (*Sandwich-Lemma.*) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reell-wertige Folgen, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Wir nehmen zudem an dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert $\ell \in \mathbb{R}$ konvergieren. Dann konvergiert auch die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ℓ .

3. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ Abbildung. Für jede K -wertige Folge $a : \mathbb{N} \rightarrow K$ können wir eine neue Folge $a^\phi := a \circ \phi$ definieren, d.h. $a_n^\phi = a_{\phi(n)}$.

- a) Angenommen für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\phi^\#(\{n\})$ endlich. Zeigen Sie für alle $x \in K$:

$$a_n \rightarrow x \text{ für } n \rightarrow \infty \implies a_n^\phi \rightarrow x \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis nutzen, dass jede endliche Teilmenge $X \subset \mathbb{N}$ eine obere Schranke in \mathbb{N} besitzt.

- b) (*Invarianz des Grenzwertes unter Umordnung*) Sei σ eine Permutation von \mathbb{N} . Folgern Sie: Der Grenzwert von $(a_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ existiert genau dann, wenn der Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert, und in diesem Fall gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{\sigma(n)}.$$

4. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ eine K -wertige Folge. Betrachten wir die Folge der Mittelwerte, definiert durch:

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

- a) Zeigen Sie: Falls die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ konvergiert, so konvergiert auch die Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- b) Gilt die Umkehrung auch? D.h. folgt aus der Konvergenz der Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ konvergiert?

Übungsblatt 8

Mini-Quiz 8. In der Übung wird eine der folgenden Definitionen abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung:

- die \mathbb{R} -wertige Folge $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen ∞ ,
 - Limes superior einer \mathbb{R} -wertigen Folge,
 - die Folge der Partialsummen.
-

1. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine \mathbb{C} -wertige Folge und sei $C > 0$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq C \cdot |a_{n+1} - a_n|$$

Zeigen Sie:

- a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_{n+1} - a_n| \leq C^n \cdot |a_1 - a_0|.$$

- b) Ist $C < 1$, so ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge.

2. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die \mathbb{R} -wertige Folge, die wie folgt rekursiv definiert ist: $a_0 := 5$ und für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} := \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{5}{a_n} \right),$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert (in \mathbb{R}) und dass der Grenzwert x die Gleichung $x^2 = 5$ erfüllt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $(a_n)^2 \geq 5$, indem Sie geometrisches und arithmetisches Mittel vergleichen. Beweisen Sie dann, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt ist. Um dann zu zeigen, dass der Grenzwert die gewünschte Gleichung erfüllt, benützen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$.

3. Aufgabe (2+2+1 Punkte).

Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Zeigen Sie:

- a) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ ist monoton wachsend.

Hinweis: Zeigen Sie die Ungleichung

$$\left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} \geq 1 - \frac{1}{n+1},$$

indem Sie die linke Seite auf die Form $(1+x)^{n+1}$ bringen und dann die Bernoullische Ungleichung (Blatt 5, Aufgabe 3) anwenden. Benützen Sie dann diese Ungleichung, um $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ abzuschätzen.

- b) Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt: $2 \leq a_n < 3$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$ gilt: $\frac{\binom{n}{k}}{n^k} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$.

- c) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ konvergiert in \mathbb{R} .

Zur weiteren Information: den Grenzwert nennt man die Eulersche Zahl e .

4. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen.

- a) Zeigen Sie: gilt für ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > c, \tag{1}$$

dann gibt es ein $j_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{k+j_0} \geq c^k a_{j_0}.$$

- b) Zeigen Sie: aus der Voraussetzung (1) folgt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \geq c.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{r} = 1.$$

- c) Zeigen Sie folgende Ungleichung: $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Übungsblatt 9

Mini-Quiz 9. In der Übung wird eine der folgenden Aussagen abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung:

- Leibniz- Regel
- Wurzel-Kriterium für absolute Konvergenz (*ohne Divergenzteil*)
- Quotienten-Kriterium für absolute Konvergenz (*ohne Divergenzteil*)

1. Aufgabe (4 Punkte).

a) Zeigen Sie, dass folgende Reihen konvergieren:

i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^m}{k!}$, mit $m \in \mathbb{N}$,

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (k^2 - k + \frac{1}{k+1})}{3^{2k+1} + k}$.

b) Bestimmen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$, die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^n}$$

konvergiert.

2. Aufgabe (4 Punkte).

Überprüfen Sie für jede der folgenden Reihen, ob sie konvergiert oder divergiert. Im Falle von Konvergenz, prüfen Sie bitte, ob sie absolut konvergiert.

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5n - 3n^3}{7n^3 + 2i} \right)^n$$

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n \cdot ((n+1)!)^2}{(2n)!}$$

3. Aufgabe (4 Punkte).

Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, mit $a_k := \begin{cases} (\frac{1}{2})^k, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ (\frac{1}{3})^k, & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$.

4. Aufgabe (4 Punkte).

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ \mathbb{C} -wertige Folgen und sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt.

a) Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge, so auch $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$.

c) Stimmt die Aussage von b) immer noch, wenn wir „absolut konvergent“ durch „konvergent“ ersetzen? Wenn ja, beweisen Sie es, wenn nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Übungsblatt 10

Mini-Quiz 10. In der Übung wird eine der folgenden Aussagen abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung:

- Umordnungssatz
- Definition einer Produktreihe
- Satz vom Cauchy-Produkt

Auf diesem Blatt können Sie 24 Punkte erreichen, wo von also 8 Punkte Bonuspunkte sind.

1. Aufgabe (2 Punkte).

Zeigen Sie für $q \in \mathbb{C}, |q| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $(1-q) \sum_{n=0}^N nq^n$, analog zum Beweis der geometrischen Summenformel.

2. Aufgabe (4 Punkte).

- a) Berechnen Sie für folgende Reihe die Folge der $3n$ -ten Partialsummen s_{3n} mit $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie, ob die Reihe konvergiert. Falls ja, bestimmen Sie den Grenzwert.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{3}i} \right)^k.$$

- b) Berechnen Sie für folgende Reihe die Folge der Partialsummen. Bestimmen Sie, ob die Reihe konvergiert. Falls ja, bestimmen Sie den Grenzwert.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (3\sqrt{k} - 6\sqrt{k+1} + 3\sqrt{k+2}).$$

3. Aufgabe (4 Punkte).

Prüfen Sie jeweils mit dem Majoranten-, Quotienten- und Wurzel-Kriterium nach¹, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2k}}.$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7k}{5k+1}.$

¹Also jeweils mit allen drei Kriterien!

4. Aufgabe (4 Punkte).

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$\text{a) } \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{k^2 - 1}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{1}{n}.$$

Hinweis: Für b) fassen Sie Summenglieder passend zusammen. (Sie dürfen benutzen, dass jedes $n \in \mathbb{N}$ als $n = 4k + r$ für $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ geschrieben werden kann.)

5. Aufgabe (4 Punkte).

a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$, $a_n \geq 0$, eine monoton fallende Nullfolge.

Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $2^k a_{2^{k+1}} \leq \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n \leq 2^k a_{2^k}$.

b) Folgern Sie für $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$:

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ konvergiert genau dann, wenn $q > 1$.

6. Aufgabe (6 Punkte).

Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $a_n := \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert

nach der Regel von Leibnitz, also sei $S := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$ der Grenzwert dieser Reihe.

a) Zeigen Sie $S \geq \frac{1}{2}$.

Hinweis: Betrachten Sie die Partialsummen s_{2n} , $n \in \mathbb{N}$.

b) Sei $f : \mathbb{N}_{>0} \rightarrow \mathbb{N}_{>0}$ die wie folgt definierte Abbildung:

$$\forall k \in \mathbb{N} : f(3k - 2) := 2k - 1, f(3k - 1) := 4k - 2, f(3k) := 4k.$$

Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass jede Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ eindeutig geschrieben werden kann als

$$n = 3k - r \text{ mit } r \in \{0, 1, 2\} \text{ und } k \in \mathbb{N}_{>0},$$

bzw. als

$$n = 4k' - r' \text{ mit } r' \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ und } k' \in \mathbb{N}_{>0}.$$

c) Seien s_n die n -te Partialsumme von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und s'_n die n -te Partialsumme von $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$, die durch f gegebene Umordnung der harmonischen alternierenden Reihe. Zeigen Sie für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$

$$s'_{3k} = \frac{1}{2} s_{2k}$$

und folgern Sie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = \frac{1}{2} S \neq S$.

Frohe Weihnachten!

Übungsblatt 11

Mini-Quiz 11. In der Übung wird eine der folgenden Aussagen bzw. Definitionen abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung:

- Additionstheorem für den Kosinus
 - Eine Funktion ist folgenstetig in x_0
 - Eine Funktion ist stetig in x_0
-

1. Aufgabe (4 Punkte).

a) Zeigen Sie mit dem ε - δ -Kriterium¹, dass folgende Funktion stetig ist:

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) := \bar{z}^2.$$

b) Die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert über

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{wenn } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{wenn } x \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Punkte, in denen diese Funktion stetig ist.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass sowohl $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ als auch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ dicht sind. Eine Teilmenge M von \mathbb{R} heißt dicht, wenn es für jede reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $x \in M$ gibt mit $|r - x| < \varepsilon$.

2. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $D \subset \mathbb{C}$, $x_0 \in D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir fixieren weiterhin ein $r > 0$ und definieren die Menge $B_r(x_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - x_0| < r\}$.

Zeigen Sie: f ist stetig in x_0 genau dann, wenn $f|_{D \cap B_r(x_0)}$ stetig in x_0 ist.

3. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $D \subset \mathbb{C}$. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Lipschitz-stetig, falls eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $x, y \in D$ gilt: $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$.

a) Zeigen Sie, dass eine Lipschitz-stetige Funktion stetig ist.

b) Sei nun $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$. Zeigen Sie f ist Lipschitz-stetig (mit $L = 1$).

c) Sei $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \sqrt{x}$.

Zeigen Sie: Für alle $r \in \mathbb{R}_{> 0}$ ist $g|_{[r, \infty[}$ Lipschitz-stetig und ist $g|_{]0, r]}$ nicht Lipschitz-stetig.

Hinweis: die Ihnen aus der Schule bekannte 3. binomische Formel

¹d. h. geben Sie in der Definition von Stetigkeit für jedes ε ein passendes δ an.

4. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $z \in \mathbb{C}$. Für alle $k, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ setze

$$a_{n,k} := \frac{1}{k!} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$$

a) Zeigen Sie:

$$\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n a_{n,k} z^k$$

und für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,k} z^k = 0$$

b) Zeigen Sie: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} |z|^k$ konvergiert und ist eine Majorante der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z^k$.

c) Folgern Sie: Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_{n,k} z^k| < \varepsilon$$

d) Zeigen Sie

$$\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

und folgern Sie $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ (hier ist e die in Blatt 8, Aufgabe 3c) definierte Eulersche Zahl).

Hinweis: Zeigen Sie für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und ein dazu passendes k_0 wie oben

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{k_0-1} |a_{n,k} z^k| + \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_{n,k} z^k| \right) < \varepsilon$$

mithilfe von a) und c).

Übungsblatt 12

Mini-Quiz 12. In der Übung wird eine der folgenden Definitionen abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung:

- Definition von π
 - Was ist ein folgenkompakter metrischer Raum?
 - Umgebung eines Punktes
-

1. Aufgabe (4 Punkte).

a) Bestimmen Sie, ob folgende Teilmengen von $(\mathbb{R}^2, d_{\text{eukl}})$ offen und/oder abgeschlossen sind:

i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$.

ii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$.

iii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y = x^2) \wedge (-1 < x < 1)\}$.

b) Bestimmen Sie, ob die Teilmenge $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$ des metrischen Raumes $(\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}, d_{\text{eukl}})$ offen und/oder abgeschlossen ist.

2. Aufgabe (4 Punkte).

a) Sei (M, d) ein metrischer Raum.

Zeigen Sie, dass eine Teilmenge von M genau dann abgeschlossen ist, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.

b) Sei M eine nicht-leere Menge. Wir definieren auf $M \times M$ die Abbildung

$$d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 1 & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

i) Zeigen Sie, dass (M, d) ein metrischer Raum ist.

ii) Sei $O \subset M$ eine beliebige Teilmenge. Zeigen Sie, dass O offen und abgeschlossen ist.

3. Aufgabe ($\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 + 1 = 4$ Punkte).

Seien $r, r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{>0}, z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die folgenden Rechenregeln für Potenzen mithilfe von Definition IV.3.6:

a) $r^{z_1+z_2} = r^{z_1}r^{z_2}$

b) $(r_1r_2)^z = r_1^z r_2^z$

c) $\log(r^x) = x \log(r)$

d) $(r^x)^z = r^{xz}$

e) Zeigen Sie, dass für $r \neq 1$ die Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto r^x$ bijektiv ist und bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

4. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn f streng monoton ist.

Übungsblatt 13

Mini-Quiz 13. In der Übung wird eine der folgenden Definitionen abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung:

- Wie definiert man 7^π ?
 - Definieren Sie mit dem ε - δ -Kriterium die Aussage $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = 11$ für eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - Definition der Ableitung einer Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}$.
-

1. Aufgabe (4 Punkte).

Bestimmen Sie jeweils alle Stellen, in denen folgende Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie in allen diesen Stellen die Ableitung.

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := |x|$.

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \begin{cases} x^3, & \text{falls } x < 0 \\ 0, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$

2. Aufgabe (4 Punkte).

Für die Lösung dieser Aufgabe dürfen Ergebnisse aus dem Kapitel V der Vorlesung nicht benutzt werden. Entscheiden Sie, ob folgende Grenzwerte existieren und falls ja, berechnen Sie sie:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, wobei $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$, mit $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Hinweis: $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)$

b) $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$, wobei $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(z) := \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$.

c) $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$, wobei $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(z) := \frac{\operatorname{Im}(z)}{\sqrt{|z|}}$.

d) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, wobei $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

3. Aufgabe (4 Punkte).

a) Seien $f_1, f_2, f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und $x_0 \in]a, b[$ mit

- f_1 und f_2 differenzierbar,
- $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ für alle $x \in]a, b[$ und
- $f_1(x_0) = f(x_0) = f_2(x_0)$.

Dann ist f differenzierbar in x_0 und $f'_1(x_0) = f'(x_0) = f'_2(x_0)$.

Hinweis: Betrachten Sie zuerst $g := f_2 - f_1$ und zeigen Sie, dass $g'(x_0) = 0$ mit einem geeigneten Satz aus der Vorlesung.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

differenzierbar ist.

(Sie dürfen hier ohne Beweis nutzen, dass $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist mit Ableitung $\sin' = \cos$.)

c) (Bonus +2 Punkte): Zeigen Sie, dass die Ableitung f' der Funktion f aus b) nicht stetig in 0 ist.

4. Aufgabe (4 Punkte).

Eine Funktion $f : (M_1, d_1) \rightarrow (M_2, d_2)$ zwischen metrischen Räumen heißt Lipschitz-stetig (mit Lipschitz-Konstante $L \in \mathbb{R}_{>0}$), falls für alle $x, y \in M_1$ gilt

$$d_2(f(x), f(y)) \leq L \cdot d_1(x, y).$$

Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass eine Lipschitz-stetige Funktion stetig ist.

a) Sie M ein metrischer Raum. Zeigen Sie die umgekehrte Dreiecksungleichung, das heißt das für alle $x, y, z \in M$ gilt

$$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$$

und folgern Sie, dass für jeden Punkt $x_0 \in M$ die Abbildung

$$M \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto d(x_0, x)$$

Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$ ist.

b) Wir nennen einen metrischen Raum M beschränkt, falls $x_0 \in M$ und $C \in \mathbb{R}_{>0}$ existieren sodass für alle $x \in M$ gilt $d(x_0, x) \leq C$.

Folgern Sie mit der Vorlesung: Ein folgenkompakter metrischer Raum M ist beschränkt.

5. Aufgabe (+4 Bonus Punkte).

Für eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ ist die Aufrundung $\lceil r \rceil$ definiert als

$$\lceil r \rceil := \min\{a \in \mathbb{Z} \mid a \geq r\}$$

(also ist $\lceil r \rceil = \lfloor r \rfloor + 1$ falls $r \notin \mathbb{Z}$).

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} +\sqrt{\frac{1}{\lceil 1/x^2 \rceil}} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{\lceil 1/x^2 \rceil}} & x < 0 \end{cases}$$

a) Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ gilt

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \leq f(x) \leq x.$$

b) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

c) Entscheiden Sie für jede Zahl $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ob f in x von links stetig ist oder ob f in x von rechts stetig ist.

d) Bestimmen Sie die Menge A aller reellen Zahlen, in denen f differenzierbar ist, und bestimmen Sie in diesen Punkten die Ableitung.

e) Ist die Ableitung $f' : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig?

Übungsblatt 14 (Bonusblatt)

Dieses Blatt soll nur von denjenigen Studenten abgegeben werden, die noch Punkte brauchen!

Mini-Quiz 14. In der Übung wird eine der folgenden Definitionen abgefragt. Bei richtiger Beantwortung erhalten Sie einen Bonuspunkt für die 50%-Grenze zum Erhalt der Studienleistung:

- Was besagt der 1. Mittelwertsatz?
 - Hinreichende Bedingung für ein lokales Minimum in x_0 einer zweimal differenzierbaren Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - Notwendige Bedingung an $f'(x_0)$ und $f''(x_0)$ für ein lokales Maximum in x_0 einer zweimal differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
-

1. Aufgabe: (Ableitung des Sinus) (4 Punkte).

a) Wir setzen $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{\sin x}{x}$.

Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert und berechnen Sie ihn.

Hinweis: Sie können entweder den Beweis von Lemma V.1.8 anpassen, oder eine geeignete Abschätzung für den Sinus aus der Vorlesung benutzen.

b) Zeigen Sie $\sin' x = \cos x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Setzen Sie direkt mit dem Differenzenquotienten an, und benutzen Sie ein Additionstheorem zusammen mit a) und der Berechnung $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ aus der Zentralübung.

Bemerkung: Nutzt man $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x - \frac{\pi}{2})$ und benutzt die Ableitungsregeln, so erhält man aus b) sofort $\cos'(x) = -\sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. Aufgabe (4 Punkte).

a) Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' = g'$. Zeigen Sie, dass $c \in \mathbb{R}$ existiert, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = g(x) + c$.

b) Finden Sie alle differenzierbaren $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f' = \text{id}_{\mathbb{R}}$.

c) Finden Sie alle differenzierbaren $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f'(x) = |x|$.

d) Zeigen Sie, dass es kein differenzierbares $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f'(x) = \Theta(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ gibt.

3. Aufgabe (4+2 Punkte).

- a) Für $b > 0$ seien $f, g: [0, b[\rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit $f(0) = 0$ und $g(0) = 0$, die differenzierbar auf $]0, b[$ sind. Wir nehmen ferner an, dass für alle $x \in]0, b[$ gilt $g'(x) \neq 0$ und dass der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert.

Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert, und dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

gilt.

Hinweis: geeigneter Mittelwertsatz

(Dies ist eine Version der Regel von de l'Hospital, welche in dieser Aufgabe somit bewiesen werden soll.)

- b) Folgern Sie: Ist eine stetige Funktion $h: [0, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf $]0, b[$, sodass $\lim_{x \rightarrow 0} h'(x)$ existiert, so ist h differenzierbar in 0 und $h'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} h'(x)$.

Hinweis: Wenden Sie a) für $f(x) = h(x) - h(0)$ und für geeignetes g an.

4. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

- a) Bestimmen Sie $T_2^2 f$, das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f in 2.
- b) Zeigen Sie für all $x \in]1, 3[$ die Abschätzung $|R_2^2(x)| \leq \frac{1}{16}$.
- Hinweis: Stellen Sie das Restglied passend dar und schätzen Sie es ab.*