Geometrie für Lehramt Gymnasium: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2025
Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Präsenzblatt für Übungen von 2. Mai bis 6. Mai

1. Aufgabe.
Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ irgendeine Abbildung. Zeigen Sie: F ist genau dann affin, wenn

a) $F(x + y - z) = F(x) + F(y) - F(z)$

b) $F(\lambda x) - F(\lambda y) = \lambda(F(x) - F(y))$

für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt.

2. Aufgabe.
Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ der linearen Teil einer affinen Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Gilt $\det A - \operatorname{tr} A + 1 \neq 0$, dann besitzt f genau einen Fixpunkt.

3. Aufgabe.
Man bestimme alle $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ mit $f \circ f = \mathrm{id}$.

4. Aufgabe: *Normalteiler von* $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$.

a) Zeigen Sie: Die Translationen bilden einen Normalteiler von $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$

b) Versuchen Sie möglichst viele Normalteiler von $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ zu finden.

5. Aufgabe.
Sei $A \neq \emptyset$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent?

(A) A ist ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^n$

(B) $\{p - q \mid p, q \in A\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$

Untersuchen Sie, ob die Implikationen $(A) \Rightarrow (B)$ und $(B) \Rightarrow (A)$ gelten, indem Sie jeweils entweder die Implikation zeigen oder ein Gegenbeispiel angeben.