Geometrie für Lehramt Gymnasium: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2025
Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Dieses Blatt ist nur von denen abzugeben, die noch nicht ausreichend viele Punkte haben (Tutor fragen)
Abgabe bis Mittwoch, 23.7., 14:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 13 (Bonusblatt)

1. Aufgabe (3 Punkte).

a) (1 Punkt) Sei $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 3$ und und für $i = \mathbb{N}_0$ sei

$$P_i := \begin{pmatrix} \cos\left(2\pi \frac{i}{N}\right) \\ \sin\left(2\pi \frac{i}{N}\right) \end{pmatrix} .$$

Bestimen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $\mathcal{P}(0, P_i, P_{i+1})$ als

$$\mathrm{vol}_2\big(\mathcal{P}(0, P_i, P_{i+1})\big) = \tfrac{1}{2}\sin(2\pi/N)\,,$$

wobei Sie entweder Wissen aus Ihren Grundvorlesungen oder Definition V.14 des Skripts nutzen dürfen.

b) (1 Punkte) Leiten Sie nun den Flächeninhalt eines regelmäßigen N-Ecks mit Seitenlänge a her.

c) (1 Punkt) Bestimmen Sie nun den Flächeninhalt des Randes (= die Vereinigung aller Seitenflächen) eines regelmäßigen Oktaeders mit Kantenlänge a.

2. Aufgabe (4 Punkte).
Im Dreieck $\mathcal{P}(A, B, C)$ sei g die Winkelhalbierende in B. Sei D der Schnittpunkt von g und $[A, C]$. Es gelt nun

$$\|B - A\| = \|D - B\| = \|C - D\|\,.$$

Bestimmen Sie den Winkel $\sphericalangle_C(A, B)$.

3. Aufgabe: *Die Torusfläche* (4 Punkte).
Zeigen Sie, dass der Torus

$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right)^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

eine Fläche (also eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit) in $\mathbb{R}^3$ ist.

4. Aufgabe: *Volumen der n-dimensionalen Sphäre* (5 Punkte).
Ziel der folgenden Aufgabe ist die Berechnung des Volumens der n-dimensionalen Sphäre $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$, also den Oberflächeninhalt des $(n+1)$-dimensionalen Einheitsballs $\overline{B}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| \leq 1\}$.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie: Ist U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-1}$ und $\psi\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung von S^{n-1}, so ist

$$\begin{aligned} \Psi_\psi \colon U \times (0,\pi) &\to \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R} \\ (x,\theta) &\mapsto \begin{pmatrix} (\sin\theta)\cdot\psi(x) \\ \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine lokale Parametrisierung von S^n.

Im folgenden dürfen Sie ohne Beweis nutzen:

- Die Abbildung $\psi_1\colon (0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $\phi \mapsto (\cos\phi, \sin\phi)^T$ ist eine lokale Parametrisierung von S^1
- Diese Parametrisierung erfasst alles außer einer Nullmenge, d.h. $\mathrm{vol}_1(S^1 \setminus \mathrm{Bild}\,\psi_1) = 0$ und $\mathrm{vol}_1(S^1) = \mathrm{vol}_1(\mathrm{Bild}\,\psi_1)$.
- Setze iterativ $\psi_n = \Psi_{\psi_{n-1}}$für $n = 2, 3\ldots.$ Dann erfasst ψ_n die Sphäre S^n bis auf eine Nullmenge, d.h. $\mathrm{vol}_n(S^n) = \mathrm{vol}_n(\mathrm{Bild}\,\psi_n)$.

b) (1 Punkt) Für die Parametrisierung ψ_1 von S^1 verwenden wir die Notation von Definition V.14 des Skripts. Zeigen Sie $g_{11}(x) = 1$ und berechnen Sie $v_1 := \mathrm{vol}_1(S^1) = \mathrm{vol}_1(\mathrm{Bild}\,\psi_1)$

c) (2 Punkte) Die g_{ij}-Symbole zur Parametrisierung ψ_{n-1} nennen wir $\tilde{g}_{ij}(x)$ und die g_{ij}-Symbole zur Parametrisierung ψ_n nennen wir $\hat{g}_{ij}(x,\theta)$. Zeigen Sie

$$\hat{g}_{ij}(x,\theta) = \begin{cases} (\sin\theta)^2 \tilde{g}_{ij}(x) & \text{falls } 1 \leq i,j \leq n-1 \\ 0 & \text{falls } 1 \leq i \leq n-1 \text{ und } j = n \\ 0 & \text{falls } 1 \leq j \leq n-1 \text{ und } n = n \\ 1 & \text{falls } i = j = n \end{cases}$$

Zeigen Sie

$$\det\left(\left(\hat{g}_{ij}(x,\theta)\right)_{1\leq i,j\leq n}\right) = (\sin\theta)^{2n-2} \det\left(\left(\tilde{g}_{ij}(x)\right)_{1\leq i,j\leq n-1}\right).$$

d) (2 Punkte) Sei $v_n := \mathrm{vol}_n(S^n)$ das n-dimensionale Volumen der n-Sphäre. Zeigen Sie $v_n := v_{n-1}\int_0^\pi \sin(\theta)^{n-1} \mathrm{d}\theta$ für alle $n \geq 2$. Berechnen Sie damit v_2 und v_3.