

Geometrie für Lehramt Gymnasium: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2025

Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Mittwoch, 16.7., 14:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 12

1. Aufgabe (4 Punkte).

a) Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$O(m) \rightarrow O(m, 1)$$

$$A \mapsto \iota_A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbb{R} \mapsto O(m, 1)$$

$$\alpha \mapsto R_\alpha := \begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha & 0 \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_{m-1} \end{pmatrix}$$

wohldefiniert und Gruppenhomomorphismen sind.

b) Wir definieren $M_s := \{x \in \mathbb{R}^{m,1} \mid \langle x, x \rangle = s\}$ für $s \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Für alle $x \in M_s$ und $A \in O(m, 1)$ gilt $Ax \in M_s$.

2. Aufgabe (4 Punkte).

Wir identifizieren in dieser gesamten Aufgabe ein Element $X = (t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{3,1}$ mit der komplexen Matrix $X = \begin{pmatrix} t + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & t - x_3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

a) Zeigen Sie, dass unter dieser Identifikation

$$\mathbb{R}^{3,1} = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid A^* = A\},$$

wobei wie immer A^* definiert ist über

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie $\langle X, X \rangle_{m,1} = -\det(X)$ für alle $X \in \mathbb{R}^{3,1}$.

c) Folgern Sie, dass für jedes Element $S \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) := \{S \in M_2(\mathbb{C}) \mid \det(S) = 1\}$ die Abbildung

$$A_S : \mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}, \\ x \mapsto SXS^*$$

wohldefiniert und eine Isometrie ist, also $A_S \in O(3, 1)$, und dass

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow O(3, 1) \\ S \mapsto A_S$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die Formel $(AB)^* = B^*A^*$ für alle $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ verwenden.

3. Aufgabe (4 Punkte).

- a) Sei $v \in \mathbb{R}^{m,1}$ zeitartig. Zeigen Sie, dass ein $A \in O(m)$, $t, \ell \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\iota_A \cdot v = \begin{pmatrix} t \\ \ell \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } t^2 - \ell^2 = -\langle\langle v, v \rangle\rangle =: \lambda > 0.$$

Zeigen Sie nun, dass es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$R_\alpha \cdot \iota_A \cdot v = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\lambda} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: 1a)

- b) Seien $v, w \in \mathbb{R}^{m,1}$ kausal. Beweisen Sie die umgekehrte Cauchy–Schwarz–Ungleichung für v und w :

$$\langle\langle v, w \rangle\rangle^2 \geq \langle\langle v, v \rangle\rangle \langle\langle w, w \rangle\rangle$$

Hinweis: Reduzieren Sie auf den Fall, dass v zeitartig ist, und benutzen Sie a).

4. Aufgabe (4 Punkte).

Ein Kreis k berührt einen größeren Kreis K im Punkt P , und sei $Q \in k \setminus \{P\}$. Also schneidet die Tangente t an k im Punkt Q den großen Kreis K in zwei Punkten A und B . Zeigen Sie, dass die Gerade durch P und Q den Winkel $\sphericalangle_P(A, B)$ halbiert.

Hinweise: Zeigen Sie, dass es eine zentrische Streckung S mit Streckzentrum P gibt, die k auf K abbildet (insbesondere also $S(g) \parallel g$ für jede Gerade g), und wählen Sie eine der folgenden beiden Strategien:

- a) Seien C und D die Schnittpunkte der Geraden g_{AP} und g_{BP} mit $k \setminus \{P\}$, und wenden Sie den Peripherie-Zentriwinkelsatz über der Sehnen $[Q, D]$, den Wechselwinkelsatz für g_{AB} und g_{CD} und den Sehnen-Tangentensatz über der Sehne $[C, Q]$ an.
- b) Seien M der Mittelpunkt von K und Q' der Schnittpunkt von g_{QP} mit $K \setminus \{P\}$, zeigen Sie, dass $g_{MQ'}$ die Mittelsenkrechte von $[A, B]$ ist und wenden Sie den Kongruenzsatz (SSS) sowie zweimal den Peripherie-Zentriwinkelsatz an.