Geometrie für Lehramt Gymnasium: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2025

Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Mittwoch, 9.7., 14:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 11

1. Aufgabe (4 Punkte).
Wir nennen das Viereck $\mathcal{V} := P(A, B, C, D)$ ein *Drachenviereck (bezüglich der Ecke A)*, falls $\|A - B\| = \|A - D\|$ und $\|B - C\| = \|D - C\|$.

a) Sei g_{AC} die Gerade durch A und C und $d := [B, D]$ die Diagonale von $\mathcal{V}$ durch B und D, und sei M der Schnittpunkt von g_{AC} und d.
Zeigen Sie: $\mathcal{V}$ ist Drachenviereck bezüglich der Ecke A genau dann, falls g_{AC} und d senkrecht aufeinander stehen und M die Strecke d halbiert.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst: ist eine der Bedingungen erfüllt, so enthält die Symmetriegruppe „interessante“ nicht-triviale Elemente.

b) Sei wieder $\mathcal{V}$ ein Drachenviereck bezüglich der Ecke A. Zusätzlich sei $\mathcal{V}$ konvex and habe rechte Winkel in B und D. Zeigen Sie: $\mathcal{V}$ hat einen Umkreis (also einen Kreis, der A, B, C und D enthält).

2. Aufgabe: *Stereographische Projektion* (4 Punkte).
Sei $n \geq 1$ und $S^n = \{(x_1, ..., x_{n+1})^T \mid \sum_{i=1}^{n+1}(x_i)^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ wie üblich. Sei $N = (0, ..., 0, 1)^T \in S^{n+1}$ der Nordpol. Definiere die stereographische Projektion

$$P : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$$
$$x \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{1-x_{n+1}} x_1 \\ \frac{1}{1-x_{n+1}} x_2 \\ \cdots \\ \frac{1}{1-x_{n+1}} x_n \end{pmatrix}.$$

also $P(x) = \frac{1}{1-x_{n+1}} p(x)$ falls $p(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = (x_1, ..., x_n)$.
Zeigen Sie:

a) (geometrische Interpretation) Fassen wir $\mathbb{R}^n$ als die Teilmenge $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ von $\mathbb{R}^{n+1}$ auf, so ist $P(x)$ der Schnittpunkt der Geraden durch N und x mit $\mathbb{R}^n$.

b) P ist ein Homöomorphismus.
Hinweis: Benutze Teil a), um die Umkehrabbildung zu finden!

c) Bonusaufgabe (2 Punkte): Für zwei stetig differenzierbare Kurven $c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$ mit $c_1(t_0) = c_2(t_0)$ definieren wir

$$\sphericalangle_{t_0}(c_1, c_2) := \sphericalangle(c_1'(t), c_2'(t)),$$

der Winkel zwischen c_1 und c_2 zum Zeitpunkt t_0.
Zeigen Sie: P ist winkelerhaltend, d.h. für alle $c_1, c_2 : I \to S^n, t_0 \in I$ mit $c_1(t_0) = c_2(t_0)$ ist

$$\sphericalangle_{t_0}(P \circ c_1, P \circ c_2) = \sphericalangle_{t_0}(c_1, c_2).$$

Hinweis: Zeigen Sie die Behauptung für die Umkehrabbildung $F = P^{-1}$. Reduzieren Sie das Problem mit der Kettenregel darauf zu zeigen, dass für alle $y \in \mathbb{R}^n$ das Differential $dF_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ winkelerhaltend ist (berechnen Sie dazu $\langle \frac{\partial F}{\partial y_i}(y), \frac{\partial F}{\partial y_i}(y) \rangle = \lambda(y)\delta_{ij}$ für ein $\lambda(y) > 0$ und benutzen Sie das Argument von Blatt 9, Aufgabe 4 und $\frac{\partial F}{\partial y_i}(y) = DF_y(e_i)$).

3. Aufgabe (4 Punkte).
Sei $P(A, B, C)$ ein Dreieck, und sei S der von C verschiedene Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von C und dem Umkreis von $P(A, B, C)$. Zeigen Sie mit einem synthetischen Beweis, dass S auf der Mittelsenkrechten von $[A, B]$ liegt.
Hinweis: 1. Eine Möglichkeit, die Aufgabe zu lösen, ist, den Peripherie-Zentriwinkelsatz auf verschiedene Art und Weise auf Sehnen im Umkreis von $P(A, B, C)$ anzuwenden. 2. Sie dürfen ohne Beweis nutzen: Q liegt auf der Mittelsenkrechten von $[A, B]$, genau dann, wenn $\|A - Q\| = \|B - Q\|$.

4. Aufgabe (4 Punkte).
Seien D, E, F die Fußpunkte der Lote in einem spitzwinkligen Dreieck $P(A, B, C)$. Zeigen Sie: Die Lote von $P(A, B, C)$ halbieren die Winkel des Dreiecks $P(D, E, F)$.
Hinweis: Es reicht natürlich zu zeigen, dass einer der Winkel von $P(D, E, F)$ durch das zugehörigen Lot von $P(A, B, C)$ in zwei gleich große Winkel geteilt wird. Betrachten Sie dazu die drei Kreise mit Durchmessern jeweils gegeben durch die drei Seiten von A, B, C und benutzen Sie die Sätze aus der Vorlesung, um genug kongruente Dreiecke zu finden.