Geometrie für Lehramt Gymnasium: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2025
Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Mittwoch, 2.7., 14:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 10

Auf dem folgenden Übungsblatt sind sowohl analytische als auch synthetische Beweise zugelassen. Synthetische Beweise erfordern jedoch, dass die verwendeten Eigenschaften zuvor in der vorlesung oder den Übungen analytisch gezeigt wurden und dass sorgsam auf die Lage von Punkten relativ zu Geraden und der Anordnung von Winkeln geachtet wird.

1. Aufgabe (4 Punkte).
In einem Dreieck $P(A, B, C)$ seien ℓ das Lot durch C auf die Seite c und w die Winkelhalbierende des Dreiecks in C. Zeigen Sie: Der Winkel zwischen ℓ und w ist $\frac{|\alpha-\beta|}{2}$.

2. Aufgabe (4 Punkte).
Sei $P(A, B, C)$ ein Dreieck mit $\gamma = \frac{\pi}{2}$ und $\|a\| < \|b\|$. Der Kreis mit Radius $\|a\|$ um C schneidet also die Seite c in einem weiteren Punkt E echt zwischen A und B, und die Tangente an diesen Kreis in E schneidet die Seite b in einem Punkt D echt zwischen A und C.
Zeigen Sie: $\|E - D\| = \|A - D\|$.

3. Aufgabe (6 Punkte).
Zeigen Sie folgende „klassische“ Aussagen aus der Dreiecksgeometrie der gymnasialen Mittelstufe:

a) In einem Dreieck $\mathcal{P}(A, B, C)$ schneiden sich die Mittelsenkrechten der drei Seiten in einem Punkt M; der Punkt M ist der Mittelpunkt eines Kreises, genannt *Umkreis*, auf dem A, B und C liegen. Das gefüllte Dreieck $\overline{\mathcal{P}}(A, B, C)$ ist im gefüllten Kreis enthalten.

b) In einem Dreieck $\mathcal{P}(A, B, C)$ schneiden sich die Winkelhalbierenden der drei Seiten in einem Punkt I; der Punkt I ist der Mittelpunkt eines Kreises k_{inn}, genannt *Innkreis*, so dass g_{AB}, g_{BC} und g_{CA} Tangenten von k_{inn} sind. Der Innkreis ist eine Teilmenge des gefüllten Dreiecks $\overline{\mathcal{P}}(A, B, C)$.

c) In einem Dreieck schneiden sich die Lote (= die Höhen) in einem Punkt H, genannt der *Höhenschnittpunkt*. Geben Sie – kein Beweis nötig – eine hinreichende und notwendige Bedingung für $H \in \overline{\mathcal{P}}(A, B, C)$ an.

4. Aufgabe: *Kürzeste Verbindungsstrecke auf der Kugeloberfläche* S^2 (4 Punkte).

a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b |f'(t)| \geq |f(b) - f(a)|,$$

und dass Gleichheit genau dann gilt, wenn f monoton ist (d.h. $f' \geq 0$ oder $f' \leq 0$).

b) Sei F wie auf Blatt 7, Aufgabe 4.
Sei $c : [0, 1] \to S^2$ eine stetig differenzierbare Kurve. Wir nehmen an, dass stetig differenzierbare Funktionen $\phi : [0, 1] \to (0, 2\pi), \theta : [0, 1] \to (0, \pi)$ existieren mit

$$c(t) = F(\theta(t), \phi(t))$$

und $\phi(0) = \phi(1)$. Zeigen Sie, dass $L(c) \geq |\theta(1) - \theta(0)|$ und dass Gleichheit genau dann gilt, falls ϕ konstant und θ monoton ist.
Hinweis: Folgern Sie aus der Kettenregel, dass

$$c'(t) = \theta'(t)\frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta(t), \phi(t)) + \phi'(t)\frac{\partial F}{\partial \phi}(\theta(t), \phi(t))$$

gilt, und benutzen Sie Teil a).