

Geometrie für Lehramt Gymnasium: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2025

Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Mittwoch, 25.6., 14:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 9

1. Aufgabe (5 Punkte). (Je 1 Punkt pro Teilaufgabe)

- a) Sei $X \subset \mathbb{R}^n$, $F \in \text{Euk}(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie (1 Punkt)

$$\text{Sym}(F(X)) = F \text{Sym}(X) F^{-1} := \{F \circ f \circ F^{-1} \mid f \in \text{Euk}(\mathbb{R}^n)\}.$$

- b) Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $I := [0, \infty) \subset \mathbb{R}$. Bestimmen Sie (kurze Begründung ausreichend) die Mengen $\text{Sym}(\{x_0\}) \subset \text{Euk}(\mathbb{R}^n)$, $\text{Sym}(I) \subset \text{Euk}(\mathbb{R}^1)$ und $\text{Sym}(I \times \{x_0\}) \subset \text{Euk}(\mathbb{R}^{n+1})$ an.

- c) Sei $G := \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ das Standardgitter. Bestimmen Sie alle Elemente von $\text{Sym}(G)$. Ist $\text{Sym}(G) = \text{Sym}(\text{Conv}(G))$?

- d) Sei $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 3$ und

$$U_N := \left\{ \begin{pmatrix} \cos\left(2\pi \frac{n}{N}\right) \\ \sin\left(2\pi \frac{n}{N}\right) \end{pmatrix} \mid n \in \{1, \dots, N\} \right\}.$$

Dann ist $\text{Conv}(U_N)$ das gefüllte regelmäßige Standard N -gon. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von $\text{Sym}(\text{Conv}(U_N))$. Ist $\text{Sym}(U_N) = \text{Sym}(\text{Conv}(U_N))$?

- e) Nun betrachten wir $\mathbb{R}^2$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, d.h. wir identifizieren also $(x, y)^T = (x, y, 0)^T$. Dann ist U_N auch eine Teilmenge von $\mathbb{R}^3$. Sei $\text{Sym}_{\text{or}}^{\mathbb{R}^3}(U_N)$ die Gruppe der orientierungserhaltenden Symmetrien von $U_N \subset \mathbb{R}^3$. Konstruieren Sie einen Isomorphismus von Gruppen

$$\text{Sym}(U_N) \rightarrow \text{Sym}_{\text{or}}^{\mathbb{R}^3}(U_N).$$

2. Aufgabe (4 Punkte).

- a) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) A ist konvex.

ii) Für alle $k \geq 1$, $x_1, \dots, x_k \in A$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ ist

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \in A.$$

iii) Für jedes $m \geq 0$ und jede affin lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist $f(A)$ konvex.

Folgern Sie die explizite Charakterisierung von $\text{Conv}(X)$ aus der Vorlesung, d.h. zeigen Sie für $X \subset \mathbb{R}^n$

$$\text{Conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \mid k \in \mathbb{N}, x_i \in X, \lambda_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}.$$

b) Zeigen Sie:

i) Für $p_1, \dots, p_N \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\text{Conv}(\{p_1, \dots, p_N\}) = \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i p_i \mid \lambda_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \right\}.$$

ii) Für $D := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, |y| \leq 1-x\}$ und $B := \{(0, 1)^T, (0, -1)^T, (1, 0)^T\}$ ist

$$D = \text{Conv}(B),$$

aber

$$D \neq \{\lambda x + (1-\lambda)y \mid x, y \in B, \lambda \in [0, 1]\}.$$

3. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $g \in \text{Aff}(\mathbb{R}^n)$. Wir nennen g winkelerhaltend, falls für alle $p, q, r \in \mathbb{R}^n$ mit $r \neq p, q \neq p$ gilt

$$\angle_{g(p)}(g(r), g(q)) = \angle_p(r, q).$$

Zeigen Sie, dass g genau dann winkelerhaltend ist, falls ein $f \in \text{Euk}(\mathbb{R}^n)$ und ein $\lambda > 0$ existieren mit $g = \lambda f$ (d. h. für alle $p \in \mathbb{R}^n$ gilt $g(p) = \lambda f(p)$).