Geometrie für Lehramt Gymnasium: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2025
Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Mittwoch, 18.6., 14:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 8

1. Aufgabe (4 Punkte).

a) Seien $x, y \in \mathbb{R}^2$ und seien r_1 die Drehung um $0 \in \mathbb{R}^2$ um den Winkel α und r_2 die Drehung um $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ um den Winkel β. Bestimmen Sie den Typ der euklidischen Bewegung $r_2 \circ r_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gemäß Beispiel II.63 im Skript.

b) Seien $A, A' \subset \mathbb{R}^n$ Untervektorräume. Wann ist $S_{A'} \circ S_A = S_{A \cap A'}$?

2. Aufgabe (4 Punkte).

a) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ (bzw. $a', b', c' \in \mathbb{R}^2$) nicht-kollinear. Zeigen Sie mit der Vorlesung (und evtl. einer vorherigen Übung), dass genau ein $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ existiert mit $f(a) = a', f(b) = b', f(c) = c'$.

b) (1. und 2. Kongruenzsatz): Zeigen Sie, dass die folgenden Aussage äquivalent sind:

i) f ist eine euklidische Bewegung

ii) $||b' - a'|| = ||b - a||$, $||c' - a'|| = ||c - a||$ und $||c' - b'|| = ||c - b||$

iii) $||b' - a'|| = ||b - a||$, $||c' - a'|| = ||c - a||$ und $\sphericalangle_{a'}(b', c') = \sphericalangle_a(b, c)$

3. Aufgabe (4 Punkte).
Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine euklidische Bewegung mit $F^2 = \mathrm{id}$. Zeige, dass

$$A := \mathrm{Fix}(F) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = x\}$$

ein nicht-leerer affiner Unterraum ist und dass $F = S_A$, d. h. dass F die Spiegelung an A ist.
Hinweis: Für $F = \mathrm{Aff}_{b,M}$, $M \in 0(n)$ kann es hilfreich sein, Elemente von der Form $x - M \cdot x$ zu betrachten.

4. Aufgabe (4 Punkte).

a) Berechnen Sie die Länge eines Breitenkreises beschrieben durch den Winkel θ zur z-Achse (d. h. θ wie in Aufgabe 4. von Blatt 7.) in Abhängigkeit vom Erdradius R.

b) Sei die Abbildung F wie in Aufgabe 4. von Blatt 7. Finden Sie eine Kurve c nach S^2, die in $(1, 0, 0)$ startet und

$$c'(t) \neq 0, \tag{1}$$

$$\sphericalangle \left(c'(t), \frac{\partial F}{\partial \theta} (c(t)) \right) = \frac{\pi}{4} \tag{2}$$

für alle t erfüllt.
Hinweis: Wählen sie den Kugelkoordinaten-Ansatz $c(t) = F(t, \phi(t))$ und bestimmen sie $\phi(t)$ so gut wie möglich, indem sie $c'(t)$ als $c'(t) = a(t)\frac{\partial F}{\partial \theta}(c(t)) + b(t)\frac{\partial F}{\partial \phi}(c(t))$ schreiben und (2) benutzen.
Interpretation: $\frac{\partial F}{\partial \theta}(c(t))$ ist der Vektor, der von $c(t)$ nach Süden zeigt, und $c'(t)$ ist der Richtungsvektor der Kurve, also bedeutet (2), dass die Kurve $c(t)$ immer nach Südwesten oder Südosten gehen soll.