# Geometrie für Lehramt Gymnasium: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2025
Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Mittwoch, 11.6., 14:00 im Zettelkasten

---

## Übungsblatt 7

**1. Aufgabe** (4 Punkte).
Zeigen Sie Satz II.45 im Skript: Sind $x, y, z \in V \setminus \{0\}$ linear abhängig, dann ist einer der drei Winkel $\sphericalangle(x, z)$, $\sphericalangle(x, y)$ und $\sphericalangle(y, z)$ die Summe der beiden anderen, oder es gilt $\sphericalangle(x, z) + \sphericalangle(x, y) + \sphericalangle(y, z) = 2\pi$.
*Hinweis: Sie dürfen Satz II.48 nutzen.*

**2. Aufgabe** (4 Punkte).
Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ und $f : X \to \mathbb{R}^k$ Abbildung. Wir nennen $f$ Lipschitz-stetig (mit Lipschitzkonstante $K > 0$), falls

$$d(f(x), f(y)) \leq K d(x, y)$$

für alle $x, y \in X$. Dann gilt für jede parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ mit $c(I) \subset X$, dass

$$L(f \circ c) \leq K L(c).$$

*Definition zu 3. Aufgabe* Sei $V$ ein Vektorraum, $x, y \in V$. Wir definieren die *Strecke* zwischen $x$ und $y$ als die Menge

$$[x, y] := \{(1 - t)x + ty \mid t \in [0, 1]\}.$$

**3. Aufgabe** (4 Punkte).

a) Ist $V$ ein euklidischer Vektorraum, $x, y \in V$. Dann gilt

$$[x, y] = \left\{ z \in V \mid \|z - x\| + \|y - z\| = \|y - x\| \right\}. \tag{1}$$

Für $z \in V \setminus [x, y]$ gilt $\|z - x\| + \|y - z\| > \|y - x\|$. (3 Punkte)

*Hinweis: Ein Lösungsansatz ist, eine Zerlegung*

$$z - x = t(y - x) + \zeta, \quad \zeta \perp y - x$$

*zu konstruieren und dann Pythagoras anzuwenden. Man kann aber z.B. auch mit Cauchy-Schwarz argumentieren.*

b) Sei nun $V = \mathbb{R}^2$ mit der Maximumsnorm $\|(a_1, a_2)^T\|_\infty := \max\{|a_1|, |a_2|\}$ versehen. Zeigen Sie an Hand eines Beispiels, dass (1) nicht mehr gilt. (1 Punkt)

**4. Aufgabe**: *(Kugelkoordinaten der Sphäre)* (4 Punkte).
Seien $N := (0,0,1)^T$ und $S := (0,0,-1)^T$ der Nord- bzw. Südpol der Sphäre $S^2$. Wir wollen zeigen, dass die Punkte $x \in S^2$ „in Kugelkoordinaten dargestellt werden können". Hiermit ist folgendes gemeint, was Sie bitte zeigen sollen:

a) Die Abbildung

$$\begin{aligned} F : [0,\pi] \times [0,2\pi) &\to S^2 \\ (\theta,\phi) &\mapsto \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist wohldefiniert, glatt und surjektiv.

b) Die Einschränkung $F_{|(0,\pi)\times[0,2\pi)} : (0,\pi) \times [0,2\pi) \mapsto S^2 \setminus \{N,S\}$ ist bijektiv.

c) Für alle $(\theta_0,\phi_0) \in [0,\pi] \times [0,2\pi)$ sind die Vektoren $\frac{\partial F}{\partial\theta}(\theta_0,\phi_0)$ und $\frac{\partial F}{\partial\phi}(\theta_0,\phi_0)$ orthogonal, aber im Allgemeinen nicht orthonormal.
Berechnen Sie $\|\frac{\partial F}{\partial\theta}(\theta_0,\phi_0)\|$ und $\|\frac{\partial F}{\partial\phi}(\theta_0,\phi_0)\|$.

**5. Bonusaufgabe** (3 Bonuspunkte).
Sei $F$ die Abbildung aus der 4. Aufgabe. Zeigen Sie, dass $\hat{F} := F_{|(0,\pi)\times(0,2\pi)}$ ein Homöomorphismus auf sein Bild ist, d.h. dass $(\hat{F})^{-1}$ stetig ist? Bleibt die Aussage richtig für $F_{|(0,\pi)\times[0,2\pi)}$?