Geometrie für Lehramt Gymnasium: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2025
Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Mittwoch, 4.6., 14:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 6

1. Aufgabe (4 Punkte).
Berechnen Sie die Längen $\mathcal{L}(c_1)$ und $\mathcal{L}(c_2)$ der folgenden Kurven:

$$c_1 : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2, \quad c_1(t) := e^{-t}\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$$

und

$$c_2 : [-2, \ln(2\pi+1)] \to \mathbb{R}^2, \qquad c_2(t) := \begin{cases} \begin{pmatrix}1-t\\ -t\end{pmatrix} & t \leq 0 \\ \begin{pmatrix}\cos(e^t-1)\\ \sin(e^t-1)\end{pmatrix} & t \geq 0\,. \end{cases}$$

Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 2a) und 2b) nutzen.

2. Aufgabe (4 Punkte).

a) Sei $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve und seien I_1, I_2 Teilintervalle von I mit $I_1 \cup I_2 = I$ und $I_1 \cap I_2 = \{b\}$. Zeigen Sie

$$\mathcal{L}(c) = \mathcal{L}\big(c|_{I_1}\big) + \mathcal{L}\big(c|_{I_2}\big)\,.$$

b) Seien $I, I_k \subset \mathbb{R}$ Intervalle mit $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots \subset I$ und $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ und $c : I \to V$. Dann gilt

$$\mathcal{L}(c) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}(c_k).$$

3. Aufgabe (4 Punkte).
Betrachten Sie die Kurve

$$c : [-1,1] \to \mathbb{R}^2, c(t) := \begin{pmatrix}t\\ f(t)\end{pmatrix} \quad \text{mit } f(t) := \begin{cases} t^2\cos\left(\frac{1}{t^2}\right) & t \neq 0 \\ 0 & t = 0\,. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass c differenzierbar ist.
Hinweis: Benutzen Sie den Differenzenquotienten, um Differenzierbarkeit von f in 0 zu zeigen!

b) Zeigen Sie, dass c nicht rektifizierbar ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Unterteilung $t_i := -(\pi i)^{-1/2}$ für $i = 1, 2, \ldots, k$ und den Grenzwert $k \to \infty$.

c) Wieso ist das kein Widerspruch zu Satz II.31 aus der Vorlesung?

4. Aufgabe: *Koch-Kurve* (4 Punkte).
Seien

$$D_+ := \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \text{ und } D_- := D_+^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$$

die Drehmatrizen um den Winkel $\pm\frac{\pi}{3}$ und erhalten damit die affinen Bewegungen f_0, f_1, f_2 und f_3 in $\mathbb{R}^2$:

$$f_0(x) := \frac{1}{3}x \qquad f_1(x) := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}D_+x$$

$$f_2(x) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix} + \frac{1}{3}D_-x \qquad f_3(x) := \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}x$$

Definiere mit diesen f_i nun iterativ Kurven $c_n : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ wie folgt:

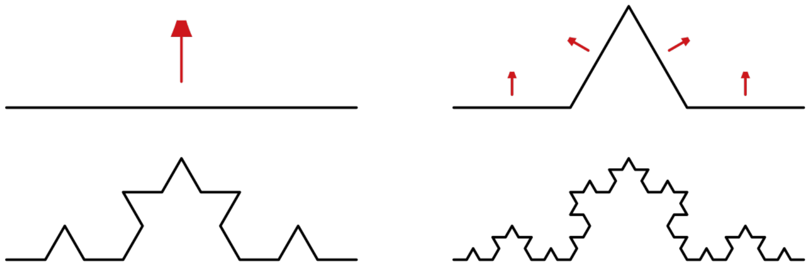
$$c_0(t) := \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_{n+1}(t) := \left\{\begin{matrix} f_0(c_n(4t)) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ f_1(c_n(4t-1)) & \text{für } \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ f_2(c_n(4t-2)) & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \\ f_3(c_n(4t-3)) & \text{für } \frac{3}{4} \le t \le 1 \end{matrix}\right\} = f_i(c_n(4t-i)) \quad \text{für } \frac{i}{4} \le t \le \frac{i+1}{4}$$

Sie dürfen ohne Beweis die Ergebnisse der unten stehende Bonusaufgabe nutzen. Die parametrisierte Kurve $c = \lim_{n\to\infty} c_n$ heißt *Koch-Kurve*.

a) Zeigen Sie, dass die Kurven c_n stetig sind (1 Punkt)

b) Zeigen Sie $L(c) = \infty$. (3 Punkte)
Hinweis: Betrachten Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Unterteilung $t_j = \frac{j}{4n}, 0 \le j \le 4n$ und zeigen Sie für all $m \ge n$, dass $c_m(t_j) = c_n(t_j)$. Nutzen Sie den zugehörigen Polygonzug.



5. Aufgabe (4 Bonuspunkte).
Zeigen Sie, dass für die f_i aus der 4. Aufgabe, alle $i \in \{0,1,2,3\}$ und alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\|f_i(x) - f_i(y)\| = \tfrac{1}{3}\|x-y\| \,.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus der 4. Aufgabe gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ konvergiert (also zu zeigen: $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist Cauchyfolge für die Metrik $d(\tilde{c}, \hat{c}) := \sup_{t\in[0,1]} \|\tilde{c}(t) - \hat{c}(t)\|$).