Geometrie für Lehramt Gymnasium: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2025

Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Mittwoch, 21.5., 14:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 4

1. Aufgabe (4 Punkte).Für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachte die Quadrik

$$Q_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha x^2 + 2xy + \alpha y^2 + 2x + 2y - 1 = 0 \right\} .$$

Man bestimme, für welche Parameter α diese Quadrik elliptisch, hyperbolisch, parabolisch oder zylindrisch ist.
Hinweis: Man schreibe diese Gleichung in der Form $p^T Ap + v^T p + s = 0$ *und bestimme* n_+, n_- *und* n_0 *für* $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$.

Definitionen zur 2. Aufgabe
Zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ heißen *orthogonal* (geschrieben als $v \perp w$), falls $\langle v, w \rangle_n = 0$. Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ ein affiner Unterraum, dann ist w orthogonal zu A (geschrieben als $w \perp A$), falls $w \perp v$ für all $v \in V_A$.

Der Abstand zweier Punkte $p_0, p_1 \in \mathbb{R}^n$ ist wie üblich definiert als die euklidische Länge des Verbindungsvektors $d(p_0, p_1) := \|p_1 - p_0\| = \sqrt{\langle p_1 - p_0, p_1 - p_0 \rangle_n}$.

2. Aufgabe (4 Punkte).
Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ affine Unterräume.

a) Sei W der von V_A und V_B aufgespannte Untervektorraum. Zeigen Sie: für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gibt es $x_\perp \in \mathbb{R}^n$ und $x_W \in W$ mit

$$x = x_\perp + x_W \text{ und } x_\perp \perp W .$$

Hinweis: Sie können zum Beispiel x_W *mit Hilfe einer Orthonormalbasis von* W *konstruieren.*

b) Es gibt $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$, so dass

$$b_0 - a_0 \perp A \text{ und } b_0 - a_0 \perp B .$$

Hinweis: Wählen Sie $a \in A$ *und* $b \in B$ *und wenden Sie Teil a) auf* $x := b - a$ *an. Konstruieren Sie dann* $a_0 \in A$ *und* $b_0 \in B$ *mit* $b_0 - a_0 = x_\perp$.

c) Seien a_0 und b_0 wie in b). Zeigen Sie für alle $a \in A$ und $b \in B$:

$$\|b - a\| \geq \|b_0 - a_0\| .$$

3. Aufgabe (4 Punkte).
Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und sei $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische bilineare Abbildung. Seien n_+, n_- und n_0 die im Trägheitssatz gegebenen Zahlen. Sie dürfen also annehmen, dass $V = \mathbb{R}^n$ und $g(x, y) = x^T \cdot I \cdot y$ mit

$$I = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{n_+} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{n_-} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

a) $n_+ = \max \left\{ \dim W \;\middle|\; W \text{ ist ein Untervektorraum von } V \text{ mit } g|_{W\times W} \text{ positiv definit} \right\}$

b) $n_0 = \dim\{x \in V \mid \forall y \in V :\ g(x, y) = 0\}$

c) Man folgere daraus, dass n_+, n_- und n_0 nicht von der Wahl der Basis im Satz von Sylvester abhängen.

Hinweis zu a) Um zu zeigen, dass $n_+ \leq \max \ldots$*), können Sie einfach einen geeigneten Unterraum* W *hinschreiben. Um zu beweisen, dass das Maximum in a) nicht größer als* n_+ *ist, nehmen Sie an, dass* $g|_{W\times W}$ *positiv definit ist für einen Untervektorraum* W*. Zeigen Sie, dass die Projektion* $\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_+}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n_+})$ *die Eigenschaft* $g(x, x) \leq \langle \Pi(x), \Pi(x) \rangle_{n_+}$ *hat. Daraus folgt, dass* $\Pi|_W : W \to \mathbb{R}^{n_+}$ *injektiv ist und somit* $\dim W \leq n_+$.

4. Aufgabe (2 Punkte).
Dies ist eine Wiederholungsaufgabe, Sie müssen nichts schriftlich abgeben, sich aber vorbereiten. Wiederholen Sie die folgenden Begriffe, die Ihnen aus den Vorlesungen des ersten Jahres bekannt sein sollten, und beantworten Sie die Fragen. In den Übungsgruppen soll reihum jeder Teilnehmer und jede Teilnehmerin einen der Punkte erklären und kann bis zu 2 Punkte dafür erhalten.

- Axiome eines normierten Vektorraums
- Axiome eines metrischen Raums
- Wie definiert man eine Metrik auf einer Teilmenge eines metrischen Raums?
- Definition von offenen und abgeschlossenen Teilmengen eines metrischen Raums
- Konvergenz von Folgen in metrischen Räumen
- (Folgen-)Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen.
- Häufungspunkte von Folgen und von Mengen
- der Rand einer Teilmenge eines metrischen Raums
- Abschluss von Teilmengen, das Innere von Teilmengen
- Wann nennt man eine Teilmenge eines metrischen Raums zusammenhängend?
- wegzusammenhängende metrische Räume und Bezüge zum Begriff „zusammenhängend“

- kompakte metrische Räume (im Sinne von überdeckungskompakt)
- folgenkompakte Mengen und Bezüge zum Begriff „kompakt“
- Wann nennt man eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar?
- Für obiges f: Was ist der Definitionsbereich und der Wertebereich der Ableitungsfunktion von f?
- Wann nennt man eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar?
- Ist jede stetige bijekte Abbildung ein Homöomorphismus?