Geometrie für Lehramt Gymnasium: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2025
Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Mittwoch, 14.5., 14:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 3

1. Aufgabe (4 Punkte).

a) Seien $p = (p_1, ..., p_n)^T$, $q = (q_1, ..., q_n)^T$, $r = (r_1, ..., r_n)^T$ drei Punkte in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie folgendes Kriterium:
p, q, r liegen genau dann auf einer affinen Geraden, falls $(1, p_1, .., p_n)^T$,$(1, q_1, ..., q_n)^T$, $(1, r_1, ..., r_n)^T$ linear abhängig sind in $\mathbb{R}^{n+1}$.

b) Seien $p, q, r \in \mathbb{R}^2$, $p \neq q$. Zeigen Sie: $r \in G_{p,q}$ genau dann wenn

$$\det(r, q-p) = \det(p, q-p).$$

c) Seien $G_{p,q}$ und $G_{r,s}$ zwei nicht-parallele affine Geraden in $\mathbb{R}^2$. Oder äquivalent: gegeben seien $p, q, r, s \in \mathbb{R}^2$ und seien $p - q$ und $r - s$ linear unabhängige Vektoren. Dann berechnet sich der Schnittpunkt $z \in \mathbb{R}^2$, d. h. $\{z\} = G_{p,q} \cap G_{r,s}$, als

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\det(q-p, s-r)} \Big(\det(r, s-r) \cdot (q-p) - \det(p, q-p) \cdot (s-r)\Big) \\ &= \frac{1}{\det(q-p, s-r)} \Big(\det(r, s) \cdot (q-p) - \det(p, q) \cdot (s-r)\Big) . \end{aligned}$$

Hinweis: Nutzen Sie b).

2. Aufgabe: *Kriterium für affin-lineare Unabhängigkeit* (4 Punkte).
Für $k \in \mathbb{N}$ gilt: $p_0, p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}^n$ sind affin linear abhängig, genau dann, wenn es ein $(a_0, \ldots, a_k)^T \in \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$ gibt mit

$$0 = \sum_{i=0}^{k} a_i p_i \text{ und } 0 = \sum_{i=0}^{k} a_i \,.$$

3. Aufgabe: *Schwerpunktsatz* (4 Punkte).
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ drei affin linear unabhängige Punkte. Wir setzen

$$m_a := \frac{1}{2}(b+c), \quad m_b := \frac{1}{2}(a+c), \quad m_c := \frac{1}{2}(a+b)$$

(die Mittelpunkte der Verbindungsstrecken). Zeigen Sie, dass die Geraden G_{a,m_a}, G_{b,m_b} und G_{c,m_c} sich in einem gemeinsamen Punkt $s(a, b, c)$ schneiden (dem sogenannten Schwerpunkt des von a, b, c aufgespannten Dreiecks). Hier ist $G_{x,y}$ wie immer die Verbindungsgerade durch x und y.
Zeigen Sie weiterhin, dass $s(a, b, c) = s(m_a, m_b, m_c)$ gilt.

4. Aufgabe: *Kleiner Satz von Desargues* (4 Punkte).
Seien F, G, H drei parallele, paarweise verschiedene Geraden und $a, a' \in F, b, b' \in G, c, c' \in H$, sodass

$$G_{a,b} \parallel G_{a',b'} \text{ und } G_{b,c} \parallel G_{b',c'}.$$

Zeigen Sie, dass dann auch $G_{a,c} \parallel G_{a',c'}$ gilt.
Hinweis: Parallelogramm-Satz