

Übungsblatt 2

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $\text{Aff}_{b,A}$ als die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ x &\mapsto Ax + b.\end{aligned}$$

$\text{Aff}(\mathbb{R}^n) := \{\text{Aff}_{b,A} \mid A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ ist invertierbar}, b \in \mathbb{R}^n\}$ nennen wir die Menge der affinen Bewegungen.

1. Aufgabe (4 Punkte).

- a) i) Bestimmen Sie die Dimension des affinen Unterraums

$$A := \langle (1, 4, 2, 3)^T, (0, 6, 2, 6)^T, (3, 5, 10, 6)^T, (2, 7, 10, 9)^T \rangle$$

von $\mathbb{R}^4$. (1 Punkt)

- ii) Bestimmen Sie den Schnitt von A mit

$$B := \langle (0, 10, 2, 13)^T, (1, 12, 2, 17)^T \rangle. \quad (1 \text{ Punkt})$$

- b) Sei $p_0 := (1, 2), p_1 := (2, 3), p_2 := (3, 2)$.

- i) Zeigen Sie, dass (p_0, p_1, p_2) eine affine Basis von $\mathbb{R}^2$ bildet. (1 Punkt)
- ii) Geben Sie Ihre Matrikelnummer an. Die letzten beiden letzten Ziffern nennen wir a . (0 Punkte)
- iii) Finden Sie $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, b \in \mathbb{R}^2$, sodass $\text{Aff}_{b,A}$ den Punkt p_0 auf $(a+4, a+4)$, den Punkt p_1 auf $(2a+6, 3a+6)$ und den Punkt p_2 auf $(3a+6, 5a+4)$ abbildet. (1 Punkt)

2. Aufgabe (4 Punkte).

Eine Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^n$ nennt man *kollinear* wenn es eine affine Gerade in $\mathbb{R}^n$ gibt, auf der mindestens drei Elemente von T liegen. Ist die Eigenschaft nicht erfüllt, so nennt man T *nicht-kollinear*.

- a) Wenn T höchstens 2 Elemente besitzt, ist dann T notwendigerweise nicht-kollinear oder notwendigerweise kollinear?
- b) Besitzt T genau drei Elemente, $T = \{p_0, p_1, p_2\}$, so zeigen Sie: (p_0, p_1, p_2) ist affin linear unabhängig genau dann, wenn T nicht-kollinear ist.
- c) Angenommen T besitzt mehr als drei, aber endlich viele Elemente. Ist dann die Aussage in b) immer noch richtig? Beweisen Sie diese Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.
- d) Angenommen T ist endlich und nicht-kollinear: Wieviele affine Geraden in $\mathbb{R}^n$ enthalten 2 Punkte von T ?

3. Aufgabe: *Affine Dimensionsformel* (4 Punkte).

Für zwei affine Unterräume $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$, $A_1 \neq \emptyset \neq A_2$, betrachten wir deren *Verbindungsraum* $\langle A_1 \cup A_2 \rangle$, dies ist also der von A_1 und A_2 erzeugte affine Unterraum.

- a) Seien $p_1 \in A_1$ und $p_2 \in A_2$ Stützvektoren. Zeigen Sie: der zu $\langle A_1 \cup A_2 \rangle$ zugeordnete Untervektorraum ist gegeben durch

$$V_{\langle A_1 \cup A_2 \rangle} = \{v_1 + v_2 + \lambda(p_2 - p_1) \mid v_1 \in V_{A_1}, v_2 \in V_{A_2}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- b) Folgern Sie die affine Dimensionsformel:

$$\dim(\langle A_1 \cup A_2 \rangle) = \begin{cases} \dim(A_1) + \dim(A_2) - \dim(A_1 \cap A_2), & \text{falls } A_1 \cap A_2 \neq \emptyset \\ \dim(A_1) + \dim(A_2) - \dim(V_{A_1} \cap V_{A_2}) + 1, & \text{falls } A_1 \cap A_2 = \emptyset. \end{cases} \quad (1)$$

Erinnerung: Für Untervektorräume $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ wissen Sie aus der Linearen Algebra, dass $\dim(\langle U_1 \cup U_2 \rangle) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$ gilt.

4. Aufgabe (4 Punkte).

- a) Die affine Bewegung $f \in \text{Aff}(\mathbb{R}^2)$ erfülle, dass $f(G) \parallel G$ gilt für jede affine Gerade G in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und ein $b \in \mathbb{R}^2$ existiert, sodass $f(x) = \lambda x + b$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$.
- b) Seien F, G zwei nicht parallele affine Geraden in $\mathbb{R}^2$ mit Schnittpunkt p . Seien $a, a' \in F \setminus \{p\}$ zwei unterschiedliche Punkte, und seien H bzw. H' zwei (von F verschiedene) affine Geraden durch a und a' , die ebenfalls nicht parallel zu G sind. Seien s bzw. s' die Schnittpunkte von H bzw. H' mit G . Zeigen Sie, dass $H \parallel H'$ genau dann gilt, wenn es ein $f \in \text{Aff}(\mathbb{R}^2)$ gibt mit $f(p) = p, f(a) = s, f(a') = s'$.

