Geometrie für Lehramt Gymnasium: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2025
Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Mittwoch, 30.4., 14:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 1 (Version vom 26.4.2025)

Notationen und Definitionen für die 1. Aufgabe: Für $d \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die *Verschiebung* oder die *Translation* um d als die Abbildung

$$T_d \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad p \mapsto p + d\,.$$

Für $b \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definieren wir die *zentrische Streckung* $Z_{b,\lambda}$ mit *Zentrum* b und *Streckfaktor* λ als

$$Z_{b,\lambda} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad p \mapsto \lambda \cdot (p - b) + b\,.$$

1. Aufgabe (4 Punkte).

a) Unter welcher Bedingung an $b, d \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ist $T_d \circ Z_{b,\lambda}$ eine zentrische Streckung? Berechnen Sie gegebenenfalls das Zentrum und den Streckfaktor.

b) Unter welchen Bedingungen an $b, b' \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}^*$ ist $Z_{b,\lambda} \circ Z_{b',\lambda'}$ eine zentrische Streckung und wann eine Verschiebung? Berechnen Sie jeweils das Zentrum und den Streckfaktor bzw. den Vektor, um den verschoben wird.

Notationen und Definitionen für die 2. Aufgabe: Sind $p, q \in \mathbb{R}^n$ verschieden, so schreiben wir $G_{p,q}$ für die Gerade durch p und q, also

$$G_{p,q} := \{p + t \cdot (q - p) \mid t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Ein Vektor $r \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist ein Richtungsvektor einer Geraden G in $\mathbb{R}^n$, wenn es ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$G := \{x_0 + t \cdot r \mid t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Der Richtungsvektor einer Geraden ist immer nur bis auf eine Konstante in $\mathbb{R}^*$ bestimmt. Zwei Geraden G und G' nennen wir parallel, wenn sie einen gemeinsamen Richtungsvektor haben.

2. Aufgabe: *Parallelogramm-Satz* (4 Punkte).
Gegeben seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^2$, paarweise verschieden. Wir nehmen an, dass keine drei dieser Punkte auf einer Geraden liegen. Wir versehen $\mathbb{R}^2$ mit der Standard-Norm $\|\cdot\|$. Welche der folgenden Bedingungen sind äquivalent? Beweisen Sie die Äquivalenz oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(i) $a + c = b + d$,

(ii) $G_{a,b}$ ist parallel zu $G_{d,c}$ und $G_{a,d}$ ist parallel zu $G_{b,c}$,

(iii) $\|a - b\| = \|d - c\|$ und $\|a - d\| = \|b - c\|$