Geometrie für Lehramt Gymnasium: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2025
Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Präsenzblatt für Übungen von 2. Mai bis 6. Mai

1. Aufgabe.
Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ irgendeine Abbildung. Zeigen Sie: F ist genau dann affin, wenn

a) $F(x + y - z) = F(x) + F(y) - F(z)$

b) $F(\lambda x) - F(\lambda y) = \lambda(F(x) - F(y))$

für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt.

2. Aufgabe.
Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ der linearen Teil einer affinen Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Gilt $\det A - \operatorname{tr} A + 1 \neq 0$, dann besitzt f genau einen Fixpunkt.

3. Aufgabe.
Man bestimme alle $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ mit $f \circ f = \mathrm{id}$.

4. Aufgabe: *Normalteiler von* $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$.

a) Zeigen Sie: Die Translationen bilden einen Normalteiler von $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$

b) Versuchen Sie möglichst viele Normalteiler von $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ zu finden.

5. Aufgabe.
Sei $A \neq \emptyset$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent?

(A) A ist ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^n$

(B) $\{p - q \mid p, q \in A\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$

Untersuchen Sie, ob die Implikationen $(A) \Rightarrow (B)$ und $(B) \Rightarrow (A)$ gelten, indem Sie jeweils entweder die Implikation zeigen oder ein Gegenbeispiel angeben.

Übungsblatt 1 (Version vom 26.4.2025)

Notationen und Definitionen für die 1. Aufgabe: Für $d \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die *Verschiebung* oder die *Translation* um d als die Abbildung

$$T_d \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad p \mapsto p + d\,.$$

Für $b \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definieren wir die *zentrische Streckung* $Z_{b,\lambda}$ mit *Zentrum* b und *Streckfaktor* λ als

$$Z_{b,\lambda} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad p \mapsto \lambda \cdot (p - b) + b\,.$$

1. Aufgabe (4 Punkte).

a) Unter welcher Bedingung an $b, d \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ist $T_d \circ Z_{b,\lambda}$ eine zentrische Streckung? Berechnen Sie gegebenenfalls das Zentrum und den Streckfaktor.

b) Unter welchen Bedingungen an $b, b' \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}^*$ ist $Z_{b,\lambda} \circ Z_{b',\lambda'}$ eine zentrische Streckung und wann eine Verschiebung? Berechnen Sie jeweils das Zentrum und den Streckfaktor bzw. den Vektor, um den verschoben wird.

Notationen und Definitionen für die 2. Aufgabe: Sind $p, q \in \mathbb{R}^n$ verschieden, so schreiben wir $G_{p,q}$ für die Gerade durch p und q, also

$$G_{p,q} := \{p + t \cdot (q - p) \mid t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Ein Vektor $r \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist ein Richtungsvektor einer Geraden G in $\mathbb{R}^n$, wenn es ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$G := \{x_0 + t \cdot r \mid t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Der Richtungsvektor einer Geraden ist immer nur bis auf eine Konstante in $\mathbb{R}^*$ bestimmt. Zwei Geraden G und G' nennen wir parallel, wenn sie einen gemeinsamen Richtungsvektor haben.

2. Aufgabe: *Parallelogramm-Satz* (4 Punkte).
Gegeben seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^2$, paarweise verschieden. Wir nehmen an, dass keine drei dieser Punkte auf einer Geraden liegen. Wir versehen $\mathbb{R}^2$ mit der Standard-Norm $\|\cdot\|$. Welche der folgenden Bedingungen sind äquivalent? Beweisen Sie die Äquivalenz oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(i) $a + c = b + d$,

(ii) $G_{a,b}$ ist parallel zu $G_{d,c}$ und $G_{a,d}$ ist parallel zu $G_{b,c}$,

(iii) $\|a - b\| = \|d - c\|$ und $\|a - d\| = \|b - c\|$

Geometrie für Lehramt Gymnasium: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2025

Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Mittwoch, 7.5., 14:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 2

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $\mathrm{Aff}_{b,A}$ als die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n, \\ x &\mapsto Ax + b. \end{aligned}$$

$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) := \{\mathrm{Aff}_{b,A} \mid A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ ist invertierbar}, b \in \mathbb{R}^n\}$ nennen wir die Menge der affinen Bewegungen.

1. Aufgabe (4 Punkte).

a) i) Bestimmen Sie die Dimension des affinen Unterraums

$$A := \langle (1,4,2,3)^T, (0,6,2,6)^T, (3,5,10,6)^T, (2,7,10,9)^T \rangle$$

von $\mathbb{R}^4$. (1 Punkt)

ii) Bestimmen Sie den Schnitt von A mit

$$B := \langle (0,10,2,13)^T, (1,12,2,17)^T \rangle\,. \qquad \text{(1 Punkt)}$$

b) Sei $p_0 := (1,2), p_1 := (2,3), p_2 := (3,2)$.

i) Zeigen Sie, dass (p_0, p_1, p_2) eine affine Basis von $\mathbb{R}^2$ bildet. (1 Punkt)

ii) Geben Sie Ihre Matrikelnummer an. Die letzten beiden letzten Ziffern nennen wir a. (0 Punkte)

iii) Finden Sie $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}, b \in \mathbb{R}^2$, sodass $\mathrm{Aff}_{b,A}$ den Punkt p_0 auf $(a+4, a+4)$, den Punkt p_1 auf $(2a+6, 3a+6)$ und den Punkt p_2 auf $(3a+6, 5a+4)$ abbildet. (1 Punkt)

2. Aufgabe (4 Punkte).
Eine Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^n$ nennt man *kollinear* wenn es eine affine Gerade in $\mathbb{R}^n$ gibt, auf der mindestens drei Elemente von T liegen. Ist die Eigenschaft nicht erfüllt, so nennt man T *nicht-kollinear*.

a) Wenn T höchstens 2 Elemente besitzt, ist dann T notwendigerweise nicht-kollinear oder notwendigerweise kollinear?

b) Besitzt T genau drei Elemente, $T = \{p_0, p_1, p_2\}$, so zeigen Sie: (p_0, p_1, p_2) ist affin linear unabhängig genau dann, wenn T nicht-kollinear ist.

c) Angenommen T besitzt mehr als drei, aber endlich viele Elemente. Ist dann die Aussage in b) immer noch richtig? Beweisen Sie diese Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

d) Angenommen T ist endlich und nicht-kollinear: Wieviele affine Geraden in $\mathbb{R}^n$ enthalten 2 Punkte von T?

3. Aufgabe: *Affine Dimensionsformel* (4 Punkte).
Für zwei affine Unterräume $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$, $A_1 \neq \emptyset \neq A_2$, betrachten wir deren *Verbindungsraum* $\langle A_1 \cup A_2 \rangle$, dies ist also der von A_1 und A_2 erzeugte affine Unterraum.

a) Seien $p_1 \in A_1$ und $p_2 \in A_2$ Stützvektoren. Zeigen Sie: der zu $\langle A_1 \cup A_2 \rangle$ zugeordnete Untervektorraum ist gegeben durch

$$V_{\langle A_1 \cup A_2 \rangle} = \{v_1 + v_2 + \lambda(p_2 - p_1) \mid v_1 \in V_{A_1}, v_2 \in V_{A_2}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

b) Folgern Sie die affine Dimensionsformel:

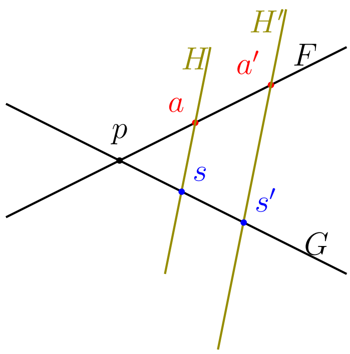
$$\dim(\langle A_1 \cup A_2 \rangle) = \begin{cases} \dim(A_1) + \dim(A_2) - \dim(A_1 \cap A_2), & \text{falls } A_1 \cap A_2 \neq \emptyset \\ \dim(A_1) + \dim(A_2) - \dim(V_{A_1} \cap V_{A_2}) + 1, & \text{falls } A_1 \cap A_2 = \emptyset\,. \end{cases} \tag{1}$$

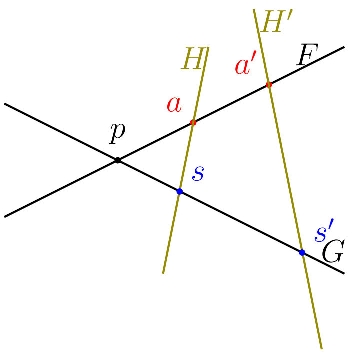
Erinnerung: Für Untervektorräume $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ wissen Sie aus der Linearen Algebra, dass $\dim(\langle U_1 \cup U_2 \rangle) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$ gilt.

4. Aufgabe (4 Punkte).

a) Die affine Bewegung $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ erfülle, dass $f(G) \parallel G$ gilt für jede affine Gerade G in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und ein $b \in \mathbb{R}^2$ existiert, sodass $f(x) = \lambda x + b$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

b) Seien F, G zwei nicht parallele affine Geraden in $\mathbb{R}^2$ mit Schnittpunkt p. Seien $a, a' \in F \setminus \{p\}$ zwei unterschiedliche Punkte, und seien H bzw. H' zwei (von F verschiedene) affine Geraden durch a und a', die ebenfalls nicht parallel zu G sind. Seien s bzw. s' die Schnittpunkte von H bzw. H' mit G.
Zeigen Sie, dass $H \parallel H'$ genau dann gilt, wenn es ein $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ gibt mit $f(p) = p, f(a) = s, f(a') = s'$.





Abgabe bis Mittwoch, 14.5., 14:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 3

1. Aufgabe (4 Punkte).

a) Seien $p = (p_1, ..., p_n)^T$, $q = (q_1, ..., q_n)^T$, $r = (r_1, ..., r_n)^T$ drei Punkte in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie folgendes Kriterium:
p, q, r liegen genau dann auf einer affinen Geraden, falls $(1, p_1, .., p_n)^T$,$(1, q_1, ..., q_n)^T$, $(1, r_1, ..., r_n)^T$ linear abhängig sind in $\mathbb{R}^{n+1}$.

b) Seien $p, q, r \in \mathbb{R}^2$, $p \neq q$. Zeigen Sie: $r \in G_{p,q}$ genau dann wenn

$$\det(r, q - p) = \det(p, q - p).$$

c) Seien $G_{p,q}$ und $G_{r,s}$ zwei nicht-parallele affine Geraden in $\mathbb{R}^2$. Oder äquivalent: gegeben seien $p, q, r, s \in \mathbb{R}^2$ und seien $p - q$ und $r - s$ linear unabhängige Vektoren. Dann berechnet sich der Schnittpunkt $z \in \mathbb{R}^2$, d. h. $\{z\} = G_{p,q} \cap G_{r,s}$, als

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\det(q-p, s-r)} \Big(\det(r, s-r) \cdot (q-p) - \det(p, q-p) \cdot (s-r) \Big) \\ &= \frac{1}{\det(q-p, s-r)} \Big(\det(r, s) \cdot (q-p) - \det(p, q) \cdot (s-r) \Big) \, . \end{aligned}$$

Hinweis: Nutzen Sie b).

2. Aufgabe: *Kriterium für affin-lineare Unabhängigkeit* (4 Punkte).
Für $k \in \mathbb{N}$ gilt: $p_0, p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}^n$ sind affin linear abhängig, genau dann, wenn es ein $(a_0, \ldots, a_k)^T \in \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$ gibt mit

$$0 = \sum_{i=0}^{k} a_i p_i \text{ und } 0 = \sum_{i=0}^{k} a_i \, .$$

3. Aufgabe: *Schwerpunktsatz* (4 Punkte).
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ drei affin linear unabhängige Punkte. Wir setzen

$$m_a := \frac{1}{2}(b + c), \quad m_b := \frac{1}{2}(a + c), \quad m_c := \frac{1}{2}(a + b)$$

(die Mittelpunkte der Verbindungsstrecken). Zeigen Sie, dass die Geraden G_{a,m_a}, G_{b,m_b} und G_{c,m_c} sich in einem gemeinsamen Punkt $s(a, b, c)$ schneiden (dem sogenannten Schwerpunkt des von a, b, c aufgespannten Dreiecks). Hier ist $G_{x,y}$ wie immer die Verbindungsgerade durch x und y.
Zeigen Sie weiterhin, dass $s(a, b, c) = s(m_a, m_b, m_c)$ gilt.

4. Aufgabe: *Kleiner Satz von Desargues* (4 Punkte).
Seien F, G, H drei parallele, paarweise verschiedene Geraden und $a, a' \in F, b, b' \in G, c, c' \in H$, sodass

$$G_{a,b} \parallel G_{a',b'} \text{ und } G_{b,c} \parallel G_{b',c'}.$$

Zeigen Sie, dass dann auch $G_{a,c} \parallel G_{a',c'}$ gilt.
Hinweis: Parallelogramm-Satz

Geometrie für Lehramt Gymnasium: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2025

Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Mittwoch, 21.5., 14:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 4

1. Aufgabe (4 Punkte).Für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachte die Quadrik

$$Q_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha x^2 + 2xy + \alpha y^2 + 2x + 2y - 1 = 0 \right\} .$$

Man bestimme, für welche Parameter α diese Quadrik elliptisch, hyperbolisch, parabolisch oder zylindrisch ist.

Hinweis: Man schreibe diese Gleichung in der Form $p^T Ap + v^T p + s = 0$ *und bestimme* n_+, n_- *und* n_0 *für* $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$.

Definitionen zur 2. Aufgabe

Zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ heißen *orthogonal* (geschrieben als $v \perp w$), falls $\langle v, w \rangle_n = 0$. Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ ein affiner Unterraum, dann ist w orthogonal zu A (geschrieben als $w \perp A$), falls $w \perp v$ für all $v \in V_A$.

Der Abstand zweier Punkte $p_0, p_1 \in \mathbb{R}^n$ ist wie üblich definiert als die euklidische Länge des Verbindungsvektors $d(p_0, p_1) := \|p_1 - p_0\| = \sqrt{\langle p_1 - p_0, p_1 - p_0 \rangle_n}$.

2. Aufgabe (4 Punkte).

Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ affine Unterräume.

a) Sei W der von V_A und V_B aufgespannte Untervektorraum. Zeigen Sie: für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gibt es $x_\perp \in \mathbb{R}^n$ und $x_W \in W$ mit

$$x = x_\perp + x_W \text{ und } x_\perp \perp W .$$

Hinweis: Sie können zum Beispiel x_W *mit Hilfe einer Orthonormalbasis von* W *konstruieren.*

b) Es gibt $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$, so dass

$$b_0 - a_0 \perp A \text{ und } b_0 - a_0 \perp B .$$

Hinweis: Wählen Sie $a \in A$ *und* $b \in B$ *und wenden Sie Teil a) auf* $x := b - a$ *an. Konstruieren Sie dann* $a_0 \in A$ *und* $b_0 \in B$ *mit* $b_0 - a_0 = x_\perp$.

c) Seien a_0 und b_0 wie in b). Zeigen Sie für alle $a \in A$ und $b \in B$:

$$\|b - a\| \geq \|b_0 - a_0\| .$$

3. Aufgabe (4 Punkte).
Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und sei $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische bilineare Abbildung. Seien n_+, n_- und n_0 die im Trägheitssatz gegebenen Zahlen. Sie dürfen also annehmen, dass $V = \mathbb{R}^n$ und $g(x, y) = x^T \cdot I \cdot y$ mit

$$I = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{n_+} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{n_-} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

a) $n_+ = \max\left\{\dim W \;\middle|\; W \text{ ist ein Untervektorraum von } V \text{ mit } g|_{W\times W} \text{ positiv definit}\right\}$

b) $n_0 = \dim\{x \in V \mid \forall y \in V : \; g(x, y) = 0\}$

c) Man folgere daraus, dass n_+, n_- und n_0 nicht von der Wahl der Basis im Satz von Sylvester abhängen.

Hinweis zu a) Um zu zeigen, dass $n_+ \leq \max \ldots$*), können Sie einfach einen geeigneten Unterraum* W *hinschreiben. Um zu beweisen, dass das Maximum in a) nicht größer als* n_+ *ist, nehmen Sie an, dass* $g|_{W\times W}$ *positiv definit ist für einen Untervektorraum* W*. Zeigen Sie, dass die Projektion* $\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_+}$*,* $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n_+})$ *die Eigenschaft* $g(x, x) \leq \langle \Pi(x), \Pi(x)\rangle_{n_+}$ *hat. Daraus folgt, dass* $\Pi|_W : W \to \mathbb{R}^{n_+}$ *injektiv ist und somit* $\dim W \leq n_+$*.*

4. Aufgabe (2 Punkte).
Dies ist eine Wiederholungsaufgabe, Sie müssen nichts schriftlich abgeben, sich aber vorbereiten. Wiederholen Sie die folgenden Begriffe, die Ihnen aus den Vorlesungen des ersten Jahres bekannt sein sollten, und beantworten Sie die Fragen. In den Übungsgruppen soll reihum jeder Teilnehmer und jede Teilnehmerin einen der Punkte erklären und kann bis zu 2 Punkte dafür erhalten.

- Axiome eines normierten Vektorraums
- Axiome eines metrischen Raums
- Wie definiert man eine Metrik auf einer Teilmenge eines metrischen Raums?
- Definition von offenen und abgeschlossenen Teilmengen eines metrischen Raums
- Konvergenz von Folgen in metrischen Räumen
- (Folgen-)Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen.
- Häufungspunkte von Folgen und von Mengen
- der Rand einer Teilmenge eines metrischen Raums
- Abschluss von Teilmengen, das Innere von Teilmengen
- Wann nennt man eine Teilmenge eines metrischen Raums zusammenhängend?
- wegzusammenhängende metrische Räume und Bezüge zum Begriff „zusammenhängend“

- kompakte metrische Räume (im Sinne von überdeckungskompakt)
- folgenkompakte Mengen und Bezüge zum Begriff „kompakt“
- Wann nennt man eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar?
- Für obiges f: Was ist der Definitionsbereich und der Wertebereich der Ableitungsfunktion von f?
- Wann nennt man eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar?
- Ist jede stetige bijekte Abbildung ein Homöomorphismus?

Geometrie für Lehramt Gymnasium: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2025
Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Mittwoch, 28.5., 14:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 5

1. Aufgabe (4 Punkte).
Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ affine Unterräume. Wir nennen ein Paar $(a_0, b_0) \in A \times B$ abstands-minimierend, falls für alle $a \in A, b \in B$ gilt $d(a_0, b_0) \leq d(a, b)$, d.h. falls gilt

$$d(a_0, b_0) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)\,.$$

Wir haben in Übungsblatt 4 Aufgabe 2 gesehen, dass das Infimum angenommen wird, also ein Minimum ist.

a) Zeigen Sie: $(a_0, b_0) \in A \times B$ ist genau dann abstands-minimierend, falls $b_0 - a_0 \perp A$ und $b_0 - a_0 \perp B$.
Bemerkung: Eine Implikation wurde bereits auf Blatt 4 gezeigt!

b) Sei $(a_0, b_0) \in A \times B$ abstands-minimierend, $v \in V_A, w \in V_B$. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) $(a_0 + v, b_0 + w)$ ist abstands-minimierend

ii) $v = w$

Folgern Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} V_A \cap V_B &\to \{(a_1, b_1) \in A \times B \mid (a_1, b_1) \text{ ist abstands-minimierend}\} \\ v &\mapsto (a_0 + v, b_0 + v) \end{aligned}$$

wohldefiniert und eine Bijektion ist.

c) Folgern Sie: Sind A und B windschief, dann gibt es genau ein abstands-minimierendes Paar $(a_0, b_0) \in A \times B$.

2. Aufgabe (4 Punkte).
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ affiner Unterraum.

a) Folgern Sie aus Aufgabe 1, dass es für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ genau ein Element $a_0 \in A$ gibt mit $a_0 - x \perp A$. Wir schreiben dieses eindeutig durch x und A bestimmte Element a_0 als $P_A(x)$.

Dies definiert eine Abbildung

$$\begin{aligned} P_A : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n, \\ x &\mapsto P_A(x), \end{aligned}$$

die orthogonale Projektion auf A.

b) Zeigen Sie: Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ist affin linear genau dann, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)\,.$$

c) Folgern Sie aus b), dass P_A affin lineare Abbildung ist.
Bemerkung: Benutzen Sie die Eindeutigkeit aus Teil a)!

d) Zeigen Sie $P_A^2 = P_A$ und $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid P_A(x) = x\} = P_A(\mathbb{R}^n)$.

3. Aufgabe (4 Punkte).
Betrachten Sie für $0 < b \le a$ die folgende Ellipse $E := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$. Zeigen Sie, dass eine Konstante $R > 0$ existiert, sodass für alle $(x,y) \in E$

$$d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}\right) + d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2R$$

wobei $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
Tipp: Quadrieren Sie $d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2R - d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

4. Aufgabe (4 Punkte).
Bezeichne wie immer $\langle .,. \rangle_{n,1}$ dass Minkowskiskalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n+1}$ und $\langle .,. \rangle_n$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Definiere $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, x \rangle_n = 1\}$, die $n-1$-dimensionale Sphäre.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi : \{-1,+1\} \times \mathbb{R}^n &\to \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle y, y \rangle_{n,1} = -1\} \\ (s,x) &\mapsto \begin{pmatrix} s\sqrt{1 + \langle x, x \rangle_n} \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

wohldefiniert und ein Homöomorphismus (d.h. bijektiv und sowohl Ψ als auch Ψ^{-1} sind stetig) ist.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} \times S^{n-1} &\to \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle y, y \rangle_{n,1} = 1\} \\ (t,x) &\mapsto \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \cdot x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

wohldefiniert und ein Homöomorphismus ist.
Erinnerung: $\cosh(t) := \frac{e^t + e^{-t}}{2}$; $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$

c) Zeichnen Sie die Mengen $\{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle y, y \rangle_{n,1} = 1\}$ und $\{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle y, y \rangle_{n,1} = -1\}$ im Fall $n = 1$.

Abgabe bis Mittwoch, 4.6., 14:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 6

1. Aufgabe (4 Punkte).
Berechnen Sie die Längen $\mathcal{L}(c_1)$ und $\mathcal{L}(c_2)$ der folgenden Kurven:

$$c_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2, \quad c_1(t) := e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

und

$$c_2 : [-2, \ln(2\pi + 1)] \to \mathbb{R}^2, \qquad c_2(t) := \begin{cases} \begin{pmatrix} 1-t \\ -t \end{pmatrix} & t \leq 0 \\ \begin{pmatrix} \cos(e^t - 1) \\ \sin(e^t - 1) \end{pmatrix} & t \geq 0\,. \end{cases}$$

Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 2a) und 2b) nutzen.

2. Aufgabe (4 Punkte).

a) Sei $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve und seien I_1, I_2 Teilintervalle von I mit $I_1 \cup I_2 = I$ und $I_1 \cap I_2 = \{b\}$. Zeigen Sie

$$\mathcal{L}(c) = \mathcal{L}\big(c|_{I_1}\big) + \mathcal{L}\big(c|_{I_2}\big)\,.$$

b) Seien $I, I_k \subset \mathbb{R}$ Intervalle mit $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots \subset I$ und $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ und $c : I \to V$. Dann gilt

$$\mathcal{L}(c) = \lim_{k \to \infty} \mathcal{L}(c_k).$$

3. Aufgabe (4 Punkte).
Betrachten Sie die Kurve

$$c : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2, c(t) := \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit } f(t) := \begin{cases} t^2 \cos\left(\frac{1}{t^2}\right) & t \neq 0 \\ 0 & t = 0\,. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass c differenzierbar ist.
Hinweis: Benutzen Sie den Differenzenquotienten, um Differenzierbarkeit von f in 0 zu zeigen!

b) Zeigen Sie, dass c nicht rektifizierbar ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Unterteilung $t_i := -(\pi i)^{-1/2}$ für $i = 1, 2, \ldots, k$ und den Grenzwert $k \to \infty$.

c) Wieso ist das kein Widerspruch zu Satz II.31 aus der Vorlesung?

4. Aufgabe: *Koch-Kurve* (4 Punkte).
Seien

$$D_+ := \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \text{ und } D_- := D_+^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$$

die Drehmatrizen um den Winkel $\pm\frac{\pi}{3}$ und erhalten damit die affinen Bewegungen f_0, f_1, f_2 und f_3 in $\mathbb{R}^2$:

$$f_0(x) := \frac{1}{3}x \qquad\qquad f_1(x) := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}D_+x$$

$$f_2(x) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix} + \frac{1}{3}D_-x \qquad\qquad f_3(x) := \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}x$$

Definiere mit diesen f_i nun iterativ Kurven $c_n : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ wie folgt:

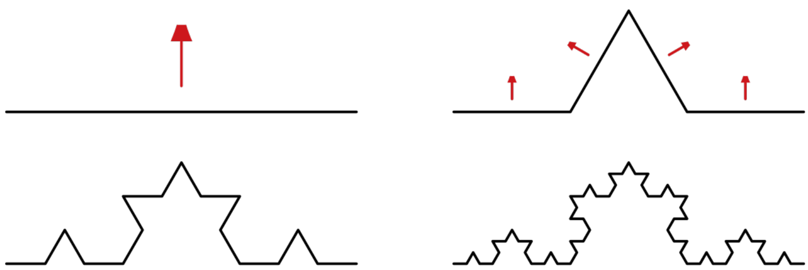
$$c_0(t) := \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_{n+1}(t) := \left\{ \begin{array}{ll} f_0(c_n(4t)) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ f_1(c_n(4t-1)) & \text{für } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f_2(c_n(4t-2)) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ f_3(c_n(4t-3)) & \text{für } \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{array} \right\} = f_i(c_n(4t-i)) \quad \text{für } \frac{i}{4} \leq t \leq \frac{i+1}{4}$$

Sie dürfen ohne Beweis die Ergebnisse der unten stehende Bonusaufgabe nutzen. Die parametrisierte Kurve $c = \lim_{n\to\infty} c_n$ heißt *Koch-Kurve*.

a) Zeigen Sie, dass die Kurven c_n stetig sind (1 Punkt)

b) Zeigen Sie $L(c) = \infty$. (3 Punkte)
Hinweis: Betrachten Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Unterteilung $t_j = \frac{j}{4n}, 0 \leq j \leq 4n$ und zeigen Sie für all $m \geq n$, dass $c_m(t_j) = c_n(t_j)$. Nutzen Sie den zugehörigen Polygonzug.



5. Aufgabe (4 Bonuspunkte).
Zeigen Sie, dass für die f_i aus der 4. Aufgabe, alle $i \in \{0,1,2,3\}$ und alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\|f_i(x) - f_i(y)\| = \tfrac{1}{3}\|x - y\|\,.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus der 4. Aufgabe gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ konvergiert (also zu zeigen: $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist Cauchyfolge für die Metrik $d(\tilde{c}, \hat{c}) := \sup_{t\in[0,1]} \|\tilde{c}(t) - \hat{c}(t)\|$).

Geometrie für Lehramt Gymnasium: Übungen
Universität Regensburg, Sommersemester 2025
Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Mittwoch, 11.6., 14:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 7

1. Aufgabe (4 Punkte).
Zeigen Sie Satz II.45 im Skript: Sind $x, y, z \in V \setminus \{0\}$ linear abhängig, dann ist einer der drei Winkel $\sphericalangle(x, z)$, $\sphericalangle(x, y)$ und $\sphericalangle(y, z)$ die Summe der beiden anderen, oder es gilt $\sphericalangle(x, z) + \sphericalangle(x, y) + \sphericalangle(y, z) = 2\pi$.
Hinweis: Sie dürfen Satz II.48 nutzen.

2. Aufgabe (4 Punkte).
Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ und $f : X \to \mathbb{R}^k$ Abbildung. Wir nennen f Lipschitz-stetig (mit Lipschitzkonstante $K > 0$), falls

$$d(f(x), f(y)) \leq K d(x, y)$$

für alle $x, y \in X$. Dann gilt für jede parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ mit $c(I) \subset X$, dass

$$L(f \circ c) \leq K L(c).$$

Definition zu 3. Aufgabe Sei V ein Vektorraum, $x, y \in V$. Wir definieren die *Strecke* zwischen x und y als die Menge

$$[x, y] := \{(1 - t)x + ty \mid t \in [0, 1]\}.$$

3. Aufgabe (4 Punkte).

a) Ist V ein euklidischer Vektorraum, $x, y \in V$. Dann gilt

$$[x, y] = \left\{ z \in V \mid \|z - x\| + \|y - z\| = \|y - x\| \right\}. \tag{1}$$

Für $z \in V \setminus [x, y]$ gilt $\|z - x\| + \|y - z\| > \|y - x\|$. (3 Punkte)

Hinweis: Ein Lösungsansatz ist, eine Zerlegung

$$z - x = t(y - x) + \zeta, \quad \zeta \perp y - x$$

zu konstruieren und dann Pythagoras anzuwenden. Man kann aber z.B. auch mit Cauchy-Schwarz argumentieren.

b) Sei nun $V = \mathbb{R}^2$ mit der Maximumsnorm $\|(a_1, a_2)^T\|_\infty := \max\{|a_1|, |a_2|\}$ versehen. Zeigen Sie an Hand eines Beispiels, dass (1) nicht mehr gilt. (1 Punkt)

4. Aufgabe: *(Kugelkoordinaten der Sphäre)* (4 Punkte).
Seien $N := (0,0,1)^T$ und $S := (0,0,-1)^T$ der Nord- bzw. Südpol der Sphäre S^2. Wir wollen zeigen, dass die Punkte $x \in S^2$ „in Kugelkoordinaten dargestellt werden können“. Hiermit ist folgendes gemeint, was Sie bitte zeigen sollen:

a) Die Abbildung

$$\begin{aligned} F : [0,\pi] \times [0, 2\pi) &\to S^2 \\ (\theta, \phi) &\mapsto \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist wohldefiniert, glatt und surjektiv.

b) Die Einschränkung $F_{|(0,\pi)\times[0,2\pi)} : (0,\pi) \times [0,2\pi) \mapsto S^2 \setminus \{N, S\}$ ist bijektiv.

c) Für alle $(\theta_0, \phi_0) \in [0,\pi] \times [0, 2\pi)$ sind die Vektoren $\frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta_0, \phi_0)$ und $\frac{\partial F}{\partial \phi}(\theta_0, \phi_0)$ orthogonal, aber im Allgemeinen nicht orthonormal.
Berechnen Sie $\|\frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta_0, \phi_0)\|$ und $\|\frac{\partial F}{\partial \phi}(\theta_0, \phi_0)\|$.

5. Bonusaufgabe (3 Bonuspunkte).
Sei F die Abbildung aus der 4. Aufgabe. Zeigen Sie, dass $\hat{F} := F_{|(0,\pi)\times(0,2\pi)}$ ein Homöomorphismus auf sein Bild ist, d.h. dass $(\hat{F})^{-1}$ stetig ist? Bleibt die Aussage richtig für $F_{|(0,\pi)\times[0,2\pi)}$?

Geometrie für Lehramt Gymnasium: Übungen
Universität Regensburg, Sommersemester 2025
Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Mittwoch, 18.6., 14:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 8

1. Aufgabe (4 Punkte).

a) Seien $x, y \in \mathbb{R}^2$ und seien r_1 die Drehung um $0 \in \mathbb{R}^2$ um den Winkel α und r_2 die Drehung um $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ um den Winkel β. Bestimmen Sie den Typ der euklidischen Bewegung $r_2 \circ r_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gemäß Beispiel II.63 im Skript.

b) Seien $A, A' \subset \mathbb{R}^n$ Untervektorräume. Wann ist $S_{A'} \circ S_A = S_{A \cap A'}$?

2. Aufgabe (4 Punkte).

a) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ (bzw. $a', b', c' \in \mathbb{R}^2$) nicht-kollinear. Zeigen Sie mit der Vorlesung (und evtl. einer vorherigen Übung), dass genau ein $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ existiert mit $f(a) = a', f(b) = b', f(c) = c'$.

b) (1. und 2. Kongruenzsatz): Zeigen Sie, dass die folgenden Aussage äquivalent sind:

i) f ist eine euklidische Bewegung
ii) $||b' - a'|| = ||b - a||$, $||c' - a'|| = ||c - a||$ und $||c' - b'|| = ||c - b||$
iii) $||b' - a'|| = ||b - a||$, $||c' - a'|| = ||c - a||$ und $\sphericalangle_{a'}(b', c') = \sphericalangle_a(b, c)$

3. Aufgabe (4 Punkte).
Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine euklidische Bewegung mit $F^2 = \mathrm{id}$. Zeige, dass

$$A := \mathrm{Fix}(F) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = x\}$$

ein nicht-leerer affiner Unterraum ist und dass $F = S_A$, d. h. dass F die Spiegelung an A ist.
Hinweis: Für $F = \mathrm{Aff}_{b,M}$, $M \in 0(n)$ kann es hilfreich sein, Elemente von der Form $x - M \cdot x$ zu betrachten.

4. Aufgabe (4 Punkte).

a) Berechnen Sie die Länge eines Breitenkreises beschrieben durch den Winkel θ zur z-Achse (d. h. θ wie in Aufgabe 4. von Blatt 7.) in Abhängigkeit vom Erdradius R.

b) Sei die Abbildung F wie in Aufgabe 4. von Blatt 7. Finden Sie eine Kurve c nach S^2, die in $(1, 0, 0)$ startet und

$$c'(t) \neq 0, \tag{1}$$

$$\sphericalangle \left(c'(t), \frac{\partial F}{\partial \theta} (c(t)) \right) = \frac{\pi}{4} \tag{2}$$

für alle t erfüllt.
Hinweis: Wählen sie den Kugelkoordinaten-Ansatz $c(t) = F(t, \phi(t))$ und bestimmen sie $\phi(t)$ so gut wie möglich, indem sie $c'(t)$ als $c'(t) = a(t)\frac{\partial F}{\partial \theta}(c(t)) + b(t)\frac{\partial F}{\partial \phi}(c(t))$ schreiben und (2) benutzen.
Interpretation: $\frac{\partial F}{\partial \theta}(c(t))$ ist der Vektor, der von $c(t)$ nach Süden zeigt, und $c'(t)$ ist der Richtungsvektor der Kurve, also bedeutet (2), dass die Kurve $c(t)$ immer nach Südwesten oder Südosten gehen soll.

Geometrie für Lehramt Gymnasium: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2025
Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Mittwoch, 25.6., 14:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 9

1. Aufgabe (5 Punkte). (Je 1 Punkt pro Teilaufgabe)

a) Sei $X \subset \mathbb{R}^n$, $F \in \mathrm{Euk}(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie (1 Punkt)

$$\mathrm{Sym}(F(X)) = F\,\mathrm{Sym}(X)F^{-1} := \{F \circ f \circ F^{-1} \mid f \in \mathrm{Euk}(\mathbb{R}^n)\}.$$

b) Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $I := [0, \infty) \subset \mathbb{R}$. Bestimmen Sie (kurze Begründung ausreichend) die Mengen $\mathrm{Sym}(\{x_0\}) \subset \mathrm{Euk}(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{Sym}(I) \subset \mathrm{Euk}(\mathbb{R}^1)$ und $\mathrm{Sym}(I \times \{x_0\}) \subset \mathrm{Euk}(\mathbb{R}^{n+1})$ an.

c) Sei $G := \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ das Standardgitter. Bestimmen Sie alle Elemente von $\mathrm{Sym}(G)$. Ist $\mathrm{Sym}(G) = \mathrm{Sym}(\mathrm{Conv}(G))$?

d) Sei $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 3$ und

$$U_N := \left\{ \begin{pmatrix} \cos\left(2\pi \frac{n}{N}\right) \\ \sin\left(2\pi \frac{n}{N}\right) \end{pmatrix} \,\middle|\, n \in \{1, \dots, N\} \right\}.$$

Dann ist $\mathrm{Conv}(U_N)$ das gefüllte regelmäßige Standard N-gon. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von $\mathrm{Sym}(\mathrm{Conv}(U_N))$. Ist $\mathrm{Sym}(U_N) = \mathrm{Sym}(\mathrm{Conv}(U_N))$?

e) Nun betrachten wir $\mathbb{R}^2$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, d.h. wir identifizieren also $(x, y)^T = (x, y, 0)^T)$. Dann ist U_N auch eine Teilmenge von $\mathbb{R}^3$. Sei $\mathrm{Sym}^{\mathbb{R}^3}_{\mathrm{or}}(U_N)$ die Gruppe der orientierungserhaltenden Symmetrien von $U_N \subset \mathbb{R}^3$. Konstruieren Sie einen Isomorphismus von Gruppen

$$\mathrm{Sym}(U_N) \to \mathrm{Sym}^{\mathbb{R}^3}_{\mathrm{or}}(U_N)\,.$$

2. Aufgabe (4 Punkte).

a) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) A is konvex.

ii) Für alle $k \geq 1$, $x_1, ..., x_k \in A$ und $\lambda_1, ..., \lambda_k \in [0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ ist

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i \in A.$$

iii) Für jedes $m \geq 0$ und jede affin lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist $f(A)$ konvex.

Folgern Sie die explizite Charakterisierung von $\mathrm{Conv}(X)$ aus der Vorlesung, d.h. zeigen Sie für $X \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{Conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \,\middle|\, k \in \mathbb{N},\ x_i \in X,\ \lambda_i \in [0, 1],\ \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}.$$

b) Zeigen Sie:

i) Für $p_1, ..., p_N \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\operatorname{Conv}(\{p_1, ..., p_N\}) = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_i \,\middle|\, \lambda_i \in [0,1],\ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1 \right\}.$$

ii) Für $D := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, |y| \leq 1-x\}$ und $B := \{(0,1)^T, (0,-1)^T, (1,0)^T\}$ ist

$$D = \operatorname{Conv}(B),$$

aber

$$D \neq \{\lambda x + (1-\lambda)y \mid x, y \in B, \lambda \in [0,1]\}.$$

3. Aufgabe (4 Punkte).
Sei $g \in \operatorname{Aff}(\mathbb{R}^n)$. Wir nennen g winkelerhaltend, falls für alle $p, q, r \in \mathbb{R}^n$ mit $r \neq p, q \neq p$ gilt

$$\sphericalangle_{g(p)}(g(r), g(q)) = \sphericalangle_p(r, q).$$

Zeigen Sie, dass g genau dann winkelerhaltend ist, falls ein $f \in \operatorname{Euk}(\mathbb{R}^n)$ und ein $\lambda > 0$ existieren mit $g = \lambda f$ (d. h. für alle $p \in \mathbb{R}^n$ gilt $g(p) = \lambda f(p)$).

Geometrie für Lehramt Gymnasium: Übungen
Universität Regensburg, Sommersemester 2025
Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Mittwoch, 2.7., 14:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 10

Auf dem folgenden Übungsblatt sind sowohl analytische als auch synthetische Beweise zugelassen. Synthetische Beweise erfordern jedoch, dass die verwendeten Eigenschaften zuvor in der vorlesung oder den Übungen analytisch gezeigt wurden und dass sorgsam auf die Lage von Punkten relativ zu Geraden und der Anordnung von Winkeln geachtet wird.

1. Aufgabe (4 Punkte).
In einem Dreieck $P(A, B, C)$ seien ℓ das Lot durch C auf die Seite c und w die Winkelhalbierende des Dreiecks in C. Zeigen Sie: Der Winkel zwischen ℓ und w ist $\frac{|\alpha-\beta|}{2}$.

2. Aufgabe (4 Punkte).
Sei $P(A, B, C)$ ein Dreieck mit $\gamma = \frac{\pi}{2}$ und $\|a\| < \|b\|$. Der Kreis mit Radius $\|a\|$ um C schneidet also die Seite c in einem weiteren Punkt E echt zwischen A und B, und die Tangente an diesen Kreis in E schneidet die Seite b in einem Punkt D echt zwischen A und C.
Zeigen Sie: $\|E - D\| = \|A - D\|$.

3. Aufgabe (6 Punkte).
Zeigen Sie folgende „klassische“ Aussagen aus der Dreiecksgeometrie der gymnasialen Mittelstufe:

a) In einem Dreieck $\mathcal{P}(A, B, C)$ schneiden sich die Mittelsenkrechten der drei Seiten in einem Punkt M; der Punkt M ist der Mittelpunkt eines Kreises, genannt *Umkreis*, auf dem A, B und C liegen. Das gefüllte Dreieck $\overline{\mathcal{P}}(A, B, C)$ ist im gefüllten Kreis enthalten.

b) In einem Dreieck $\mathcal{P}(A, B, C)$ schneiden sich die Winkelhalbierenden der drei Seiten in einem Punkt I; der Punkt I ist der Mittelpunkt eines Kreises k_{inn}, genannt *Innkreis*, so dass g_{AB}, g_{BC} und g_{CA} Tangenten von k_{inn} sind. Der Innkreis ist eine Teilmenge des gefüllten Dreiecks $\overline{\mathcal{P}}(A, B, C)$.

c) In einem Dreieck schneiden sich die Lote (= die Höhen) in einem Punkt H, genannt der *Höhenschnittpunkt*. Geben Sie – kein Beweis nötig – eine hinreichende und notwendige Bedingung für $H \in \overline{\mathcal{P}}(A, B, C)$ an.

4. Aufgabe: *Kürzeste Verbindungsstrecke auf der Kugeloberfläche* S^2 (4 Punkte).

a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b |f'(t)| \geq |f(b) - f(a)|,$$

und dass Gleichheit genau dann gilt, wenn f monoton ist (d.h. $f' \geq 0$ oder $f' \leq 0$).

b) Sei F wie auf Blatt 7, Aufgabe 4.
Sei $c : [0, 1] \to S^2$ eine stetig differenzierbare Kurve. Wir nehmen an, dass stetig differenzierbare Funktionen $\phi : [0, 1] \to (0, 2\pi), \theta : [0, 1] \to (0, \pi)$ existieren mit

$$c(t) = F(\theta(t), \phi(t))$$

und $\phi(0) = \phi(1)$. Zeigen Sie, dass $L(c) \geq |\theta(1) - \theta(0)|$ und dass Gleichheit genau dann gilt, falls ϕ konstant und θ monoton ist.
Hinweis: Folgern Sie aus der Kettenregel, dass

$$c'(t) = \theta'(t)\frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta(t), \phi(t)) + \phi'(t)\frac{\partial F}{\partial \phi}(\theta(t), \phi(t))$$

gilt, und benutzen Sie Teil a).

Abgabe bis Mittwoch, 9.7., 14:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 11

1. Aufgabe (4 Punkte).
Wir nennen das Viereck $\mathcal{V} := P(A, B, C, D)$ ein *Drachenviereck (bezüglich der Ecke A)*, falls $\|A - B\| = \|A - D\|$ und $\|B - C\| = \|D - C\|$.

a) Sei g_{AC} die Gerade durch A und C und $d := [B, D]$ die Diagonale von $\mathcal{V}$ durch B und D, und sei M der Schnittpunkt von g_{AC} und d.
Zeigen Sie: $\mathcal{V}$ ist Drachenviereck bezüglich der Ecke A genau dann, falls g_{AC} und d senkrecht aufeinander stehen und M die Strecke d halbiert.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst: ist eine der Bedingungen erfüllt, so enthält die Symmetriegruppe „interessante“ nicht-triviale Elemente.

b) Sei wieder $\mathcal{V}$ ein Drachenviereck bezüglich der Ecke A. Zusätzlich sei $\mathcal{V}$ konvex and habe rechte Winkel in B und D. Zeigen Sie: $\mathcal{V}$ hat einen Umkreis (also einen Kreis, der A, B, C und D enthält).

2. Aufgabe: *Stereographische Projektion* (4 Punkte).
Sei $n \geq 1$ und $S^n = \{(x_1, ..., x_{n+1})^T \mid \sum_{i=1}^{n+1}(x_i)^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ wie üblich. Sei $N = (0, ..., 0, 1)^T \in S^{n+1}$ der Nordpol. Definiere die stereographische Projektion

$$P : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$$
$$x \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{1-x_{n+1}} x_1 \\ \frac{1}{1-x_{n+1}} x_2 \\ \dots \\ \frac{1}{1-x_{n+1}} x_n \end{pmatrix}.$$

also $P(x) = \frac{1}{1-x_{n+1}} p(x)$ falls $p(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = (x_1, ..., x_n)$.
Zeigen Sie:

a) (geometrische Interpretation) Fassen wir $\mathbb{R}^n$ als die Teilmenge $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ von $\mathbb{R}^{n+1}$ auf, so ist $P(x)$ der Schnittpunkt der Geraden durch N und x mit $\mathbb{R}^n$.

b) P ist ein Homöomorphismus.
Hinweis: Benutze Teil a), um die Umkehrabbildung zu finden!

c) Bonusaufgabe (2 Punkte): Für zwei stetig differenzierbare Kurven $c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$ mit $c_1(t_0) = c_2(t_0)$ definieren wir

$$\sphericalangle_{t_0}(c_1, c_2) := \sphericalangle(c_1'(t), c_2'(t)),$$

der Winkel zwischen c_1 und c_2 zum Zeitpunkt t_0.
Zeigen Sie: P ist winkelerhaltend, d.h. für alle $c_1, c_2 : I \to S^n, t_0 \in I$ mit $c_1(t_0) = c_2(t_0)$ ist

$$\sphericalangle_{t_0}(P \circ c_1, P \circ c_2) = \sphericalangle_{t_0}(c_1, c_2).$$

Hinweis: Zeigen Sie die Behauptung für die Umkehrabbildung $F = P^{-1}$. Reduzieren Sie das Problem mit der Kettenregel darauf zu zeigen, dass für alle $y \in \mathbb{R}^n$ das Differential $dF_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ winkelerhaltend ist (berechnen Sie dazu $\langle \frac{\partial F}{\partial y_i}(y), \frac{\partial F}{\partial y_i}(y) \rangle = \lambda(y)\delta_{ij}$ für ein $\lambda(y) > 0$ und benutzen Sie das Argument von Blatt 9, Aufgabe 4 und $\frac{\partial F}{\partial y_i}(y) = DF_y(e_i)$).

3. Aufgabe (4 Punkte).
Sei $P(A, B, C)$ ein Dreieck, und sei S der von C verschiedene Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von C und dem Umkreis von $P(A, B, C)$. Zeigen Sie mit einem synthetischen Beweis, dass S auf der Mittelsenkrechten von $[A, B]$ liegt.
Hinweis: 1. Eine Möglichkeit, die Aufgabe zu lösen, ist, den Peripherie-Zentriwinkelsatz auf verschiedene Art und Weise auf Sehnen im Umkreis von $P(A, B, C)$ anzuwenden. 2. Sie dürfen ohne Beweis nutzen: Q liegt auf der Mittelsenkrechten von $[A, B]$, genau dann, wenn $\|A - Q\| = \|B - Q\|$.

4. Aufgabe (4 Punkte).
Seien D, E, F die Fußpunkte der Lote in einem spitzwinkligen Dreieck $P(A, B, C)$. Zeigen Sie: Die Lote von $P(A, B, C)$ halbieren die Winkel des Dreiecks $P(D, E, F)$.
Hinweis: Es reicht natürlich zu zeigen, dass einer der Winkel von $P(D, E, F)$ durch das zugehörigen Lot von $P(A, B, C)$ in zwei gleich große Winkel geteilt wird. Betrachten Sie dazu die drei Kreise mit Durchmessern jeweils gegeben durch die drei Seiten von A, B, C und benutzen Sie die Sätze aus der Vorlesung, um genug kongruente Dreiecke zu finden.

Geometrie für Lehramt Gymnasium: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2025
Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Abgabe bis Mittwoch, 16.7., 14:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 12

1. Aufgabe (4 Punkte).

a) Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(m) &\to \mathrm{O}(m,1) \\ A &\mapsto \iota_A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\mapsto \mathrm{O}(m,1) \\ \alpha &\mapsto R_\alpha := \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha & 0 \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_{m-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

wohldefiniert und Gruppenhomomorphismen sind.

b) Wir definieren $M_s := \{x \in \mathbb{R}^{m,1} \mid \langle x, x\rangle = s\}$ für $s \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Für alle $x \in M_s$ und $A \in \mathrm{O}(m,1)$ gilt $Ax \in M_s$.

2. Aufgabe (4 Punkte).
Wir identifizieren in dieser gesamten Aufgabe ein Element $X = (t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{3,1}$ mit der komplexen Matrix $X = \begin{pmatrix} t + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & t - x_3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

a) Zeigen Sie, dass unter dieser Identifikation

$$\mathbb{R}^{3,1} = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid A^* = A\},$$

wobei wie immer A^* definiert ist über

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie $\langle X, X\rangle_{m,1} = -\det(X)$ für alle $X \in \mathbb{R}^{3,1}$.

c) Folgern Sie, dass für jedes Element $S \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) := \{S \in M_2(\mathbb{C}) \mid \det(S) = 1\}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} A_S : \mathbb{R}^{3,1} &\to \mathbb{R}^{3,1}, \\ x &\mapsto SXS^* \end{aligned}$$

wohldefiniert und eine Isometrie ist, also $A_S \in \mathrm{O}(3,1)$, und dass

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) &\to \mathrm{O}(3,1) \\ S &\mapsto A_S \end{aligned}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die Formel $(AB)^* = B^*A^*$ für alle $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ verwenden.

3. Aufgabe (4 Punkte).

a) Sei $v \in \mathbb{R}^{m,1}$ zeitartig. Zeigen Sie, dass ein $A \in \mathrm{O}(m)$, $t, \ell \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\iota_A \cdot v = \begin{pmatrix} t \\ \ell \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } t^2 - \ell^2 = -\langle\!\langle v, v \rangle\!\rangle =: \lambda > 0\,.$$

Zeigen Sie nun, dass es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$R_\alpha \cdot \iota_A \cdot v = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\lambda} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: 1a)

b) Seien $v, w \in \mathbb{R}^{m,1}$ kausal. Beweisen Sie die umgekehrte Cauchy–Schwarz–Ungleichung für v und w:

$$\langle\!\langle v, w \rangle\!\rangle^2 \geq \langle\!\langle v, v \rangle\!\rangle \langle\!\langle w, w \rangle\!\rangle$$

Hinweis: Reduzieren Sie auf den Fall, dass v zeitartig ist, und benutzen Sie a).

4. Aufgabe (4 Punkte).
Ein Kreis k berührt einen größeren Kreis K im Punkt P, und sei $Q \in k \setminus \{P\}$. Also schneidet die Tangente t an k im Punkt Q den großen Kreis K in zwei Punkten A und B. Zeigen Sie, dass die Gerade durch P und Q den Winkel $\sphericalangle_P(A, B)$ halbiert.

Hinweise: Zeigen Sie, dass es eine zentrische Streckung S mit Streckzentrum P gibt, die k auf K abbildet (insbesondere also $S(g) \parallel g$ für jede Gerade g), und wählen Sie eine der folgenden beiden Strategien:

a) Seien C und D die Schnittpunkte der Geraden g_{AP} und g_{BP} mit $k \setminus \{P\}$, und wenden Sie den Peripherie-Zentriwinkelsatz über der Sehnen $[Q, D]$, den Wechselwinkelsatz für g_{AB} und g_{CD} und den Sehnen-Tangentensatz über der Sehne $[C, Q]$ an.

b) Seien M der Mittelpunkt von K und Q' der Schnittpunkt von g_{QP} mit $K \setminus \{P\}$, zeigen Sie, dass $g_{MQ'}$ die Mittelsenkrechte von $[A, B]$ ist und wenden Sie den Kongruenzsatz (SSS) sowie zweimal den Peripherie-Zentriwinkelsatz an.

Geometrie für Lehramt Gymnasium: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2025
Prof. Dr. Bernd Ammann, Roman Schießl, Raphael Schmidpeter

Dieses Blatt ist nur von denen abzugeben, die noch nicht ausreichend viele Punkte haben (Tutor fragen)
Abgabe bis Mittwoch, 23.7., 14:00 im Zettelkasten

Übungsblatt 13 (Bonusblatt)

1. Aufgabe (3 Punkte).

a) (1 Punkt) Sei $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 3$ und und für $i = \mathbb{N}_0$ sei

$$P_i := \begin{pmatrix} \cos\left(2\pi \frac{i}{N}\right) \\ \sin\left(2\pi \frac{i}{N}\right) \end{pmatrix} .$$

Bestimen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $\mathcal{P}(0, P_i, P_{i+1})$ als

$$\operatorname{vol}_2\big(\mathcal{P}(0, P_i, P_{i+1})\big) = \tfrac{1}{2}\sin(2\pi/N) ,$$

wobei Sie entweder Wissen aus Ihren Grundvorlesungen oder Definition V.14 des Skripts nutzen dürfen.

b) (1 Punkte) Leiten Sie nun den Flächeninhalt eines regelmäßigen N-Ecks mit Seitenlänge a her.

c) (1 Punkt) Bestimmen Sie nun den Flächeninhalt des Randes (= die Vereinigung aller Seitenflächen) eines regelmäßigen Oktaeders mit Kantenlänge a.

2. Aufgabe (4 Punkte).
Im Dreieck $\mathcal{P}(A, B, C)$ sei g die Winkelhalbierende in B. Sei D der Schnittpunkt von g und $[A, C]$. Es gelt nun

$$\|B - A\| = \|D - B\| = \|C - D\| .$$

Bestimmen Sie den Winkel $\sphericalangle_C(A, B)$.

3. Aufgabe: *Die Torusfläche* (4 Punkte).
Zeigen Sie, dass der Torus

$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right)^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

eine Fläche (also eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit) in $\mathbb{R}^3$ ist.

4. Aufgabe: *Volumen der n-dimensionalen Sphäre* (5 Punkte).
Ziel der folgenden Aufgabe ist die Berechnung des Volumens der n-dimensionalen Sphäre $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$, also den Oberflächeninhalt des $(n+1)$-dimensionalen Einheitsballs $\overline{B}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| \leq 1\}$.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie: Ist U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-1}$ und $\psi\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung von S^{n-1}, so ist

$$\begin{aligned}\Psi_\psi\colon U \times (0,\pi) &\to \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}\\ (x,\theta) &\mapsto \begin{pmatrix}(\sin\theta)\cdot\psi(x)\\ \cos\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

eine lokale Parametrisierung von S^n.

Im folgenden dürfen Sie ohne Beweis nutzen:

- Die Abbildung $\psi_1\colon (0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $\phi \mapsto (\cos\phi, \sin\phi)^T$ ist eine lokale Parametrisierung von S^1
- Diese Parametrisierung erfasst alles außer einer Nullmenge, d.h. $\mathrm{vol}_1(S^1 \setminus \mathrm{Bild}\,\psi_1) = 0$ und $\mathrm{vol}_1(S^1) = \mathrm{vol}_1(\mathrm{Bild}\,\psi_1)$.
- Setze iterativ $\psi_n = \Psi_{\psi_{n-1}}$für $n = 2, 3 \ldots$. Dann erfasst ψ_n die Sphäre S^n bis auf eine Nullmenge, d.h. $\mathrm{vol}_n(S^n) = \mathrm{vol}_n(\mathrm{Bild}\,\psi_n)$.

b) (1 Punkt) Für die Parametrisierung ψ_1 von S^1 verwenden wir die Notation von Definition V.14 des Skripts. Zeigen Sie $g_{11}(x) = 1$ und berechnen Sie $v_1 := \mathrm{vol}_1(S^1) = \mathrm{vol}_1(\mathrm{Bild}\,\psi_1)$

c) (2 Punkte) Die g_{ij}-Symbole zur Parametrisierung ψ_{n-1} nennen wir $\tilde{g}_{ij}(x)$ und die g_{ij}-Symbole zur Parametrisierung ψ_n nennen wir $\hat{g}_{ij}(x,\theta)$. Zeigen Sie

$$\hat{g}_{ij}(x,\theta) = \begin{cases}(\sin\theta)^2\tilde{g}_{ij}(x) & \text{falls } 1 \leq i,j \leq n-1\\ 0 & \text{falls } 1 \leq i \leq n-1 \text{ und } j = n\\ 0 & \text{falls } 1 \leq j \leq n-1 \text{ und } n = n\\ 1 & \text{falls } i = j = n\end{cases}$$

Zeigen Sie

$$\det\left(\left(\hat{g}_{ij}(x,\theta)\right)_{1\leq i,j\leq n}\right) = (\sin\theta)^{2n-2}\det\left(\left(\tilde{g}_{ij}(x)\right)_{1\leq i,j\leq n-1}\right).$$

d) (2 Punkte) Sei $v_n := \mathrm{vol}_n(S^n)$ das n-dimensionale Volumen der n-Sphäre. Zeigen Sie $v_n := v_{n-1}\int_0^\pi \sin(\theta)^{n-1}\mathrm{d}\theta$ für alle $n \geq 2$. Berechnen Sie damit v_2 und v_3.