Seminar Morsetheorie

Bernd Ammann, Matthias Ludewig, Jonathan Glöckle

Wintersemester 2023/24

1. Vortrag: Überblick, Definitionen, Morse-Lemma. [17.10.] – Definition von Morsefunktionen, Beweis des Morse Lemmas, Beispiele für kritische Punkte, Theorie der 1-Parametergruppen von Diffeomorphismen. Quelle: [Mil63] Kapitel I §2, S. 4–11)

2. Vortrag: Homotopie-Typ und kritische Werte I. [24.10.] – Das Ziel dieses und des nächsten Vortrages ist die bestimmung des Homotopietyps einer Mannigfaltigkeit anhand von Morsefunktionen. Hierzu werden für eine Mannigfaltigkeit M und eine Morsefunktion f die Teilmengen $M^a = f^{-1}((-\infty, a]) \subset M$, $a \in \mathbb{R}$, betrachtet. Die Hauptresultate dieses Vortrags sind Thm. 3.1 und Thm. 3.2, die angeben, wie M^b aus M^a berechnet werden kann, wenn $[a, b]$ keinen oder genau einen kritischen Punkt enthält. (Quelle: [Mil63] Kapitel I §3, S. 12–19)

3. Vortrag: Homotopie-Typ und kritische Werte II, Anwendungen. [31.10.] – In diesem Vortrag sollen die Resultate des vorigen Vortrages "zusammengebaut" werden um den Homotopietyp von M aus den kritischen Punkten der Morsefunktion zu berechnen (Thm. 3.5). Anschließend sollen zwei Anwendungen besprochen werden: Beweis des Satzes von Reeb und Berechnung der Kohomologie des komplex projektiven Raums. (Quelle: [Mil63] Kapitel I §3-4, S. 20–27)

4. Vortrag: Morse-Ungleichungen, Existenz von Morse-Funktionen. [7.11.] – Diskussion der Morse-Ungleichungen (Thm. 5.2). Beweis der Existenz von Morsefunktionen (Thm. 6.6) durch Einbettung der Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$. Der Satz von Sard darf hierbei wie im Buch ohne Beweis zitiert werden. Ein einfaches Argument, dass jede Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ eingebettet werden kann, sollte gebracht werden. (Quelle: [Mil63], Kapitel I §5-6, S. 28-38)

5. Vortrag: Riemannsche Geometrie. [14.11., Ammann/Ludewig/Glöckle] – Überblick über einige noch benötigte Sätze der Riemannschen Geometrie. (Quelle: [Mil63], Kapitel II, §10, S. 55-66)

6. Vortrag: Hessesche der Energie und Morse-Index-Theorem auf dem Pfadraum. [21.11.] – Formel für die zweite Variation des Energiefunktionals. Indexsatz für die Hessesche des Energiefunktionals. (Quelle: [Mil63], Kapitel III §13 und §15)

7. Vortrag: Endlich-dimensionale Approximation und Topologie des Pfadraums [28.11.] – Approximation des Pfadraumes Räume von gebrochenen Geodätischen; das Hauptresultat ist Thm. 16.2 (und die Folgerung Thm. 16.4). Beweis der Homotopieäquivalenz des Raumes der stückweise glatten Pfade mit dem Raum der stetigen Pfade (Thm. 17.1). Anwendung auf den Schleifenraum von S^n. (Quelle: [Mil63], Kapitel III §16-17)

8. Vortrag: Topologie und Krümmung. [5.12.] – Satz über kritische Punkte der Riemannschen Exponentialabbildung und konjugierte Punkte auf Geodätischen (Thm. 18.1). Satz von Cartan (Thm. 19.2), Satz von Meyers (Thm. 19.4), Theorem 19.6 über den Homotopietyp von Mannigfaltigkeiten mit positiver Riccikrümmung. (Quelle: [Mil63], Kapitel III §18-19, S. 98 – 108)

9. Vortrag: Symmetrische Räume und Lie-Gruppen. [12.12.] – Definition und erste Eigenschaften von symmetrischen Räumen, Liegruppen als symmetrische Räume, Krümmung von Liegruppen mit biinvarianter Metrik. Beweis des Theorems von Bott über den Homotopietyp von Liegruppen (Thm. 21.7). (Quelle: [Mil63], Kapitel IV §20-22, S. 109 – 123)

10. Vortrag: Bott-Periodizität für die unitäre Gruppe. [19.12.] – Definition und erste Eigenschaften der unitären Gruppe. Das Hauptresultat des Vortrages ist der Periodizitätssatz von Bott (Thm. 23.3). Die Hauptarbeit ist der Beweis von Lemma 23.2, das die in den vorigen Vortrğen bewiesenen Resultate verwendet. (Quelle: [Mil63], Kapitel IV §23, S. 124– 132)

11. Vortrag: Bott-Periodizität für die orthogonale Gruppe. [9.1.] – Diskussion der Eigenschaften der orthogonalen Gruppe, komplexen Strukturen und den zugehörigen homogenen Räumen. Das Hauptresultat ist erneut der Periodizitätssatz (Thm. 24.3). Lemma 24.2 ist analog zu 23.2, sodass der Beweis kürzer gehalten werden kann. Die Hauptarbeit ist die Identifikation der Räume $\Omega_k(n)$ für verschiedene Werte von k und n. (Quelle: [Mil63], Kapitel IV §24, S. 133– 146)

12. Vortrag: Überblick und Ausblick: [16.1.] – Dieser Vortrag fasst das bisherige nochmals zusammen, wird erst später festgelegt und vergeben.

13. Vortrag: Die Smale-Bedingung. [23.1.] – Ziel des Vortrags ist es, Theorem 2.2.5 in [AD14] zu präsentieren und zu beweisen. Die Aussage sollte an Hand eines guten Beispiels verdeutlicht werden, z.B. dem des Torus in [AD,2.2.d], bei Zeitknappheit evtl.

Beweisteile der Lemma 2.2.8 und 2.2.9 nur skizzieren. Alternative Quellen sind [Sm2, Theorem A] und [Mi2,Theorem 5.2].

14. Vortrag: Der Morse-Komplex. [30.1.] – Das zentrale Thema des Vortrags ist Abschnitt 3.1 von [AD14]. Anschließend sollte noch [AD14] Theorem 3.4.2 erklärt werden und dessen Beweis skizziert werden. Man sollte sich auf Werte in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ beschränken, die ganzzahlige Version [AD, 3.3] wird nicht benötigt.

15. Vortrag: Morse-Homologie. [6.2.] – Wir wollen Morse-Homologie definieren und einige Eigenschaften diskutieren: Künneth-Formel, Poincaré-Dualität, Euler-Charakteristik, Poincaré-Polynom, Morse-Ungleichungen. (Quelle: [AD14] Abschnitte 4.1-4.4)

16. Vortrag: Morse-Homologie = zelluläre Homologie (Quelle: [AD14] Anhang 4.9)

References

[AD14] Audin, Michèle ; Damian, Mihai: *Morse theory and Floer homology.* Springer, London; EDP Sciences, Les Ulis, 2014 (Universitext). – xiv+596 S. `http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4471-5496-9`. `http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4471-5496-9`. – ISBN 978–1–4471–5495–2; 978–1–4471–5496–9; 978–2–7598–0704–8. – Translated from the 2010 French original by Reinie Erné

[Mil63] Milnor, J.: *Morse theory.* Princeton University Press, Princeton, N.J.„ 1963. – vi+153 S. – Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells