

# Analysis II für Physiker: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2022

Prof. Dr. Bernd Ammann/ Julian Seipel/ Roman Schießl

**Abgabe nach Absprache mit Übungsgruppenleiter\*in. Das Blatt wird nur korrigiert, und die Punkte auf diesem Blatt werden nur angerechnet, falls der bisherige Punktestand unter der zu erreichenden Summe (50% aus Blatt 1-13) liegt.**

---



## Übungsblatt 14

### 1. Aufgabe (8 Bonuspunkte)

Berechnen Sie reellen Fourierkoeffizienten  $a_k, b_k$  für die folgenden  $2\pi$ -periodischen Funktionen:

i)  $f_1(x) = \sin^3(x), x \in \mathbb{R}$

ii)  $f_2(x) = e^{-|x|}$ , für  $x \in [-\pi, \pi]$

iii)  $f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi < x < 0 \\ x & \text{für } 0 \leq x < \pi \end{cases}$

iv)  $f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi < x \leq 0 \\ \sin(x) & \text{für } 0 < x < \pi \end{cases}$

### 2. Aufgabe (4 Bonuspunkte)

i) Bestimmen Sie die reellen Fourierkoeffizienten für die  $2\pi$ -periodische Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^2, x \in [-\pi, \pi]$ .

ii) Zeigen Sie, dass folgende Identitäten gelten:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Hierbei dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass die Fourierreihe von  $f$  punktweise gegen die Funktion  $f$  konvergiert.

iii) Zeigen Sie mithilfe der Parseval-Identität, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

gilt.

### 3. Aufgabe (3 Bonuspunkte)

Wir betrachten die folgenden Funktionenfolgen

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \geq \frac{1}{n} \\ 1 - n|x| & \text{für } |x| < \frac{1}{n} \end{cases}$$
$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \geq \frac{1}{n^3} \\ n - n^4|x| & \text{für } |x| < \frac{1}{n^3} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

- i)  $\|f_n - 0\|_{L^2}, \|g_n - 0\|_{L^2} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .
- ii)  $(f_n)_n$  konvergiert punktweise gegen eine unstetige Funktion und  $(g_n)_n$  konvergiert nicht punktweise.

### 4. Aufgabe (3 Bonuspunkte)

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion. Es gilt zusätzlich  $f(x) = f(\pi - x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie

$$a_k = 0 \text{ für } k \text{ ungerade}$$
$$b_k = 0 \text{ für } k \text{ gerade.}$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Wobei  $a_k, b_k$  die reellen Fourierkoeffizienten (also die Fourierkoeffizienten in der reellen Schreibweise) sind.