Übungen zur Analysis IV

Universität Regensburg, Sommersemester 2020
Prof. Dr. Bernd Ammann

Tutoriumsblatt für die Woche ab 22.6.2020

Tutoriumsblatt 10

Die beiden Aufgaben dieses Blatts werden sehr nützlich sein, um auf Übungsblatt 11 wichtige Eigenschaften der hyperbolische Ebene zu studieren, auch wenn Sie dies vielleicht noch nicht sehen.

1. Aufgabe

Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und sei $f : M \to M$ eine Isometrie. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass dann die Fixpunktmenge

$$\mathrm{Fix}(f) := \{p \in M \mid f(p) = p\}$$

eine Untermannigfaltigkeit von M ist. (Das heißt für jede Karte $\varphi : U \to V$ von M ist $\varphi(U \cap \mathrm{Fix}(f))$ eine Untermannigfaltigkeit von V. Insbesondere ist dann $\mathrm{Fix}(f)$ selber eine Mannigfaltigkeit und es gilt $T_p\mathrm{Fix}(f) \subset T_pM$.)

Zeigen Sie: Sei $c : (a, b) \to M$ eine Geodätische, und für ein $t_0 \in (a, b)$ gelte $c(t_0) \in \mathrm{Fix}(f)$ und $\dot{c}(t_0) \in T_{c(t)}\mathrm{Fix}(f)$. Dann gilt $c(t) \in \mathrm{Fix}(f)$ für alle $t \in (a, b)$.

2. Aufgabe

Sei $c : I \to M$ eine Geodätische, die auf ihrem maximalen Existenz-Intervall, das nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert, definiert sei. Sei $\gamma : (a, b) \to M$ eine glatte Kurve, so dass $c\big(I\big) \subset \gamma\big((a, b)\big)$. Nehmen Sie an, dass γ eine Einbettung ist, das heißt $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \forall t$ und γ ist ein Homöomorphismus von (a, b) auf $\gamma(a, b)$[1]. Zeigen Sie dann $c\big(I\big) = \gamma\big((a, b)\big)$.

[1] Diese Annahme ist eigentlich nicht notwendig, vereinfacht aber den Beweis erheblich und ist das, was uns interessiert.