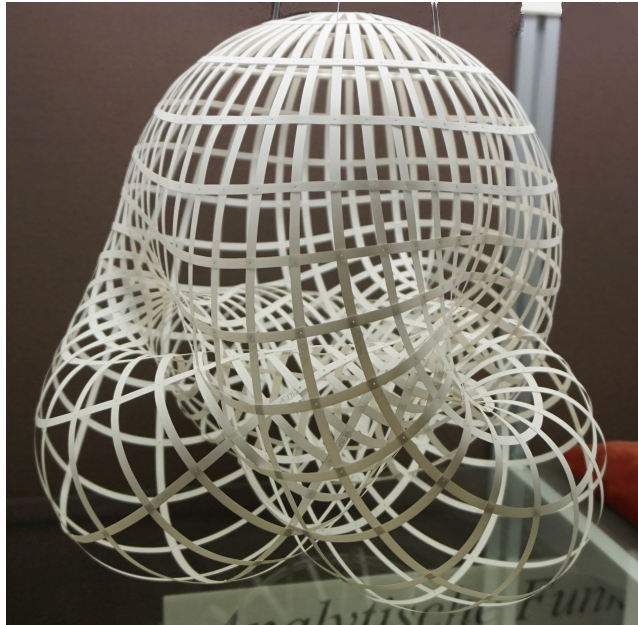


Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Analysis IV

Vorlesungsskript



Prof. Dr. Bernd Ammann

Sommersemester 2020



Universität Regensburg

Öffentliche Version

Datum der Kompilation: 26. Oktober 2020

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	vii
Konventionen und Notationen	viii
1 Geometrie von Untermannigfaltigkeiten	1
1.1 Motivation	1
1.2 Wiederholung Untermannigfaltigkeiten	4
1.2.1 Definition und Charakterisierung von Untermannigfaltigkeiten	4
1.2.2 Der Tangentialraum	14
1.3 Abbildungen, Atlanten und Vektorfelder	15
1.3.1 Parametrisierungswechsel	15
1.3.2 $\mathcal{C}^r$ -Abbildungen	16
1.3.3 Karten, Atlanten und Koordinaten	18
1.3.4 Vektorfelder	21
1.4 Die Ableitung von Funktionen zwischen Untermannigfaltigkeiten	23
1.5 Erste Fundamentalform, Isometrien und Längenmessung	24
Einschub: Abzählbare Basis der Topologie	29
1.6 Integration auf Untermannigfaltigkeiten	30
1.7 Ableitungen von Funktionen und Vektorfeldern	38
1.7.1 Tangentialbündel und 1-Jet	38
1.7.2 Ableitung reellwertiger Funktionen und Koordinatenkovektorfelder	39
1.7.3 Vektorfelder operieren auf Funktionen	41
1.7.4 Kovariante Ableitung von Vektorfeldern	42
Einschub: Einsteinsche Summenkonvention	44
1.8 Hyperflächen und 2. Fundamentalform	48
1.8.1 Einheitsnormalenfelder	48
1.8.2 Weingarten-Abbildung und zweite Fundamentalform	50
1.8.3 Ein Ausblick auf höhere Kodimension	54
1.9 Theorema egregium	56
1.10 Variationsformel	60
1.11 Kompakte Flächen in $\mathbb{R}^3$	66
1.11.1 Erste Fakten zu kompakten Flächen	66
1.11.2 Zusammenhängende Summe	67
1.11.3 Assoziativität	69
1.11.4 Geschlecht	70
1.11.5 Der Satz von Gauß und Bonnet	70
1.12 Zusammenfassung innere und äußere Geometrie	71
2 Mannigfaltigkeiten	71
2.1 $\mathcal{C}^k$ -Strukturen und $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten	71
2.1.1 $\mathcal{C}^k$ -Strukturen	71
2.1.2 $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten	74
2.1.3 $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten mit Rand	76
2.1.4 $\mathcal{C}^\ell$ -Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten	78
2.2 Kompakte Ausschöpfung und Partition der Eins	79

2.3	Der Tangentialraum	82
2.4	Derivationen in einem Punkt	85
2.5	Vektorfelder und Lie-Klammer	87
2.6	Tensoren	91
2.7	Kovariante Ableitung und Krümmung	96
2.7.1	Kovariante Ableitung auf riemannschen Mannigfaltigkeiten	96
2.7.2	Kovariante Ableitung des Tangentialvektors einer Kurve	101
2.8	Überblick: Geodätische und Riemannsche Geometrie	102
2.8.1	Länge von Kurven, Abstand und Geodätische	102
2.8.2	Riemannscher Krümmungstensor und Schnittkrümmung	104
2.8.3	Nochmals zur hyperbolischen Ebene	105
3	Differentialformen und der Satz von Stokes	111
3.1	Alternierende Tensoren auf Vektoren	111
3.2	Differentialformen	114
3.3	Das äußere Differential	115
3.4	De-Rham-Kohomologie	122
3.5	Zwei Einschübe: Produkte und Formen auf Mannigfaltigkeiten mit Rand	125
3.5.1	Produkte von Mannigfaltigkeiten	125
3.5.2	Formen auf Mannigfaltigkeiten mit Rand	126
3.6	Poincaré-Lemma	127
3.7	Orientierung und Integration von Formen	133
3.7.1	Orientierung	133
3.7.2	Volumenform	137
3.7.3	Integration von Formen	138
3.8	Satz von Stokes	141
3.8.1	Satz von Stokes für Differentialformen	141
3.8.2	Divergenzsatz von Gauß	145
3.8.3	Klassische Satz von Stokes	148
3.9	Elektrodynamik in der Sprache der Formen	150
	Satz von Stokes und homotope Abbildungen	154
3.10	Der Satz von Gauß–Bonnet	154
3.10.1	Die lokale Version des Satzes von Gauß–Bonnet	154
3.10.2	Triangulierungen von Flächen	161
3.10.3	Satz von Gauß–Bonnet, globale Version	164
3.10.4	Rund um das Lemma von Gauß	165
3.10.5	Existenz einer Triangulierung	168
3.11	Der Laplace-Operator	171
	ANHÄNGE	I
A	Beweisdetails zur riemannschen Geometrie	I
A.1	Beweisdetails für Satz 2.7.2	I
	Stichwortverzeichnis	III
	Symbolverzeichnis	VIII

Liste der Sätze	X
Urheberrechte	XII
Literaturverzeichnis	XIII

Vorwort

Dies ist das Vorlesungsskript der Vorlesung Analysis IV, die ich im Sommersemester 2020 an der Universität Regensburg halte. Das Skript ist geprägt von der Corona-Pandemie, während derer das Abhalten von Präsenzveranstaltungen nicht möglich war.

Das Skript basiert in Teilen auf meiner Vorlesung vom Sommersemester 2015. Die damalige Version wurde von Herrn Daniel Heiß in L^AT_EX aufgeschrieben. Zudem hat er entscheidenden Anteil an den Style-Files dieses Skripts. Für beides sei ihm herzlich gedankt. Vielen Dank auch an Frau Bonn für das fleißige Korrekturlesen.

Falls Sie einen Tippfehler finden oder sonstige Verbesserungsvorschläge haben, so senden Sie bitte eine Email an mich.

Leider enthält das Skript bisher noch nicht sehr viele Bilder und Zeichnungen. Freiwillige Beiträge oder verbesserte Versionen werden gerne entgegengenommen. Bei einigen fehlenden Bildern ist ein grüner Kommentar im Skript.

Bernd Ammann, Regensburg

Verfügbarkeit des Skripts

Die aktuelle Version des Skripts ist hier in Normalgröße zu finden:

[http://www.mathematik.ur.de/ammann/lehre/
2020s_analysisIV/AnalysisIV.pdf](http://www.mathematik.ur.de/ammann/lehre/2020s_analysisIV/AnalysisIV.pdf).

Und hier in vergrößerter Form

[http://www.mathematik.ur.de/ammann/lehre/
2020s_analysisIV/AnalysisIV-grossdruck.pdf](http://www.mathematik.ur.de/ammann/lehre/2020s_analysisIV/AnalysisIV-grossdruck.pdf).

Kommentar zum Titelbild

Das Bild auf der Titelseite stellt die Boysche Fläche[©] dar. Die Boysche Fläche ist das Bild einer Immersion der reell-projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$ in $\mathbb{R}^3$. Genau genommen gibt es hier eine ganze Schar von solchen Flächen, die konkrete hier stammt von Robert Kusner. Die konkrete Form der Fläche beruht auf denselben Plänen wie die berühmte [Visualisierung der Boyschen Fläche](#) am [Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach](#). Zur Entstehungsgeschichte dieser Fläche empfehle ich sehr [diesen Artikel von Hermann Karcher und Ulrich Pinkall](#). Auf der [englischsprachigen Wikipedia-Seite](#) und in einem [Artikel von Rob Kirby](#) finden Sie viele interessante Information zu dieser Fläche. Interessant ist insbesondere, dass sie unter allen Immersionen $F : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die sogenannte **Willmore-Energie**

$$\int_{F(\mathbb{R}P^2)} H^2 \, d\mu^{F(\mathbb{R}P^2)}$$

minimiert, siehe hierzu [einen Artikel meines früheren Büro-Kollegen Robert Kusner](#).

Konventionen und Notationen

In dieser Vorlesung nutzen wir folgende Konventionen und Bezeichnungen

- 0 ist keine natürliche Zahl, $0 \notin \mathbb{N}$, 0 ist weder positiv, noch negativ.
 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- Die leere Menge (mit der einzig möglichen Topologie) ist zusammenhängend.
- $\mathcal{C}^r$ bezeichnet einen Raum von r -mal stetig differenzierbaren Funktionen, der Definitionsbereich und Zielbereich dieser Funktionen ist hierdurch nicht spezifiziert. Erlaubte Werte hierbei sind $r \in \mathbb{N}_0$ und $r = \infty$. Das Wort „glatt“ bedeutet „von Regularität $\mathcal{C}^\infty$ “.
- $\mathcal{C}^\omega$ sind die (reell-)analytischen Funktionen, das heißt die glatten Funktionen, die in jedem Punkt lokal von ihrer Potenzreihe dargestellt werden.
- Steht ein Quadrat ■ unmittelbar nach einem Korollar, einer Folgerung oder dergleichen, so bedeutet dies, dass bereits alles hierfür zu zeigende bewiesen ist.
- $A \subset B$ bedeutet „ A ist eine Teilmenge von B “, und $A \subsetneq B$ bedeutet „ A ist eine echte Teilmenge von B “, das Symbol $\subseteq$ ist bedeutungslos (in der Vorlesung). Dies weicht zum Beispiel von der Konvention auf den Übungsblättern etwas ab.
- Die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ wird mit $e_1, \dots, e_n$ bezeichnet, eine typische Orthonormalbasis eines Vektorraums endlicher Dimension zumeist mit $E_1, \dots, E_m$.

1 Geometrie von Untermannigfaltigkeiten

1.1 Motivation

Di 21.4.

Ziele

Ziele des Vorlesungsteils „Geometrie von Untermannigfaltigkeiten“ sind:

- das Verständnis von Kurven in der Ebene und im Raum: das Studium der Krümmung von Kurven in der Ebene, das Studium der Krümmung und Torsion von Raumkurven
- das Verständnis von (gekrümmten) Flächen im Raum,
- die intrinsische, sowie extrinsische Krümmung von Flächen im Raum.
- Verallgemeinerungen auf beliebige (endliche) Dimensionen
- Verallgemeinerung dieser Krümmungsbegriffe auf Untermannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$.

Wir wollen diese Begriffe so einführen, dass die im nächsten Kapitel folgende Abstraktionsstufe gut vorbereitet ist. Man möchte dort nämlich verstehen, was es bedeutet, dass ein Raum „in sich“ gekrümmt ist. Haben wir dies verstanden, so sind wir wichtigen Anwendungen, wie zum Beispiel einem guten Verständnis der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) ein gutes Stück näher gekommen.

Wieso ist dies für ART hilfreich?

Ich will dies am Beispiel der ART etwas genauer erklären: Die Krümmungstheorie von viel-dimensionalen Räumen wurde von [Bernhard Riemann](#) im Rahmen seiner Habilitation 1854 initiiert, und viele von Riemanns Errungenschaften sind auch heute noch von zentraler Bedeutung. Alles was wir in diesem Kapitel machen werden, geht zum Beispiel im wesentlichen auf diesen Habilitationsvortrag zurück, ohne dass wir ihn dann schon ganz erfasst haben werden.

In der [speziellen Relativitätstheorie \(SRT\)](#) von Einstein (1905) wird unser Raum (3 Dimensionen) mit der Zeit zu einem 4-dimensionalen Raum vereinigt. Dieser 4-dimensionale Raum ist aber etwas anders strukturiert als die uns vertrauten euklidischen Vektorräume. Anstelle eines euklidischen Skalar-Produkts (= symmetrische, positiv definite Bilinearform) trägt die Raumzeit $\mathbb{R}^4$ eine indefinite symmetrische Bilinearform wie folgt:

$$\left\langle \begin{pmatrix} t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{t} \\ \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} \right\rangle := -c^2 t \tilde{t} + \sum_{j=1}^3 x_j \tilde{x}_j.$$

Hierbei ist $c \in \mathbb{R}_{>0}$ die Lichtgeschwindigkeit. Der entscheidende Unterschied zum euklidischen Raum ist hierbei nicht der Faktor c . Man kann durch geschickte Wahl der Einheiten sogar $c = 1$ wählen: Ein Raumschiff hat dann halbe Lichtgeschwindigkeit, wenn seine Geschwindigkeit 0,5 ist. Und auch in der modernen Physik ist c keine Naturkonstante, sondern seit 1983 eine explizit

definierte ganze Zahl mit Einheiten versehen:

$$c := 299\,792\,458 \frac{m}{s},$$

die so gewählt wurde, dass sie mit den davor durchgeführten Eichungen und Experimenten gut zusammenpasste, siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Lichtgeschwindigkeit> für Details. Also kurzum: der Wert von $c \neq 0$ ist irrelevant.

Nein, der wichtige Unterschied ist das Minuszeichen!

Wenn man dieses Vorzeichen mit einbezieht, dann werden auf dieser Raumzeit die Maxwell-Gleichungen ganz einfach: wir werden dies im hinteren Drittel der Vorlesung erklären. Man braucht keine komplizierten Transformationsformeln für das elektromagnetische Feld in bewegten Systemen mehr.

Kurz nach Aufstellung der speziellen Relativitätstheorie wurde aus physikalischen Gründen die Annahme naheliegend, dass Materie die Raumzeit krümmt, dies führte dann zur [allgemeinen Relativitätstheorie \(ART\)](#) von Einstein (1915).

Aus mathematischer Sicht ist die ART deutlich umfangreicher als die SRT. Die Mathematik dazu ergab sich aber ganz einfach aus der von Bernhard Riemann entwickelten Krümmungstheorie, indem man an den richtigen Stellen die Vorzeichen wechselte. Deswegen konnte Einstein die ART auch so schnell entwickeln. Kurioserweise waren die zunächst vorgeschlagenen „Einstein-Gleichungen“ falsch, oder sagen wir besser: nicht ganz richtig, die richtige Formulierung wurde erst in Zusammenarbeit mit dem berühmten Mathematiker [David Hilbert](#)¹ gefunden. Wenn Sie also die ART verstehen wollen, dann sollten Sie zunächst die Krümmung von Flächen verstehen – viel kompliziertere Fälle können sich sowieso die wenigstens Leute vorstellen, und man lernt schon viel dabei. Und das ist nur eine von vielen Anwendungen.

Darstellungsarten von Untermannigfaltigkeiten

Zunächst einmal werden wir Untermannigfaltigkeiten besser verstehen müssen. Hier wird also Kapitel 9 Abschnitt 6 (Untermannigfaltigkeiten) aus der [Analysis II](#) sehr wichtig werden, und dadurch wird auch der Abschnitt zuvor über den Satz über implizite Funktionen, nämlich Abschnitt 5 eine wichtige Rolle spielen. An Hand einfacher Beispiele wollen wir nochmals verschiedene Möglichkeiten wiederholen, wie man Untermannigfaltigkeiten beschreiben kann.

Hierzu betrachten wir die Parabelkurve $\left\{ \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$. Sie kann gegeben werden:

- als Graph der Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$;
- durch eine Parametrisierung

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

¹Hilbert ist übrigens der Doktorvater des Doktorvaters des Doktorvaters des Doktorvaters meines Doktorvaters; und damit bin ich keineswegs alleine: mindestens 33597 promoviert Mathematiker(innen) gehen weltweit so indirekt auf Hilbert zurück. Dies deutet seinen immensen Einfluss auf die Mathematik an.

oder eine alternative Parametrisierung wie zum Beispiel

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} t^3 \\ t^6 \end{pmatrix};$$

- oder implizit als Lösungsmenge der Gleichung $y = x^2$.

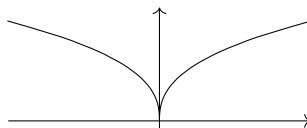
Zentral für den Übergang zwischen den verschiedenen Möglichkeiten ist der oben erwähnte *Satz über implizite Funktionen*, siehe [Analysis II](#), Kapitel 9, Satz 5.2. Die Anwendung dieses Satzes funktioniert dort gut, wo die Fläche „glatt“ ist und die Parametrisierung „nicht singulär“ ist.²

Singularitäten

Problematischer sind Situationen, bei denen „Singularitäten“³ vorhanden sind. Hierzu betrachten wir als Beispiel die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} t^5 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Diese Parametrisierung hat eine Singularität in $t = 0$. Eine Skizze dazu:



In- und Extrinsische Krümmung

Es gibt zwei verschiedene Typen von Krümmungen einer Ebene: Die intrinsische Krümmung ist eine Größe der „inneren Geometrie“; sie misst Distanzen in der Untermannigfaltigkeit. Die extrinsische Krümmung beschreibt, wie die Ebene sich im umgebenden Raum krümmt.

Als Beispiel betrachten wir einen Zylinder: er ist intrinsisch flach, aber extrinsisch gekrümmt.

Vergisst man nun den umgebenden Raum, so bleibt nur die innere Geometrie sichtbar. Man studiert dann keine Untermannigfaltigkeiten mehr, sondern geht über zu *Mannigfaltigkeiten*, die wir im zweiten Kapitel dieser Vorlesung eingehend untersuchen werden.

Physikalische Anwendungen

Anwendungen dieser Theorie in der Physik sind z.B.:

- Differentialformen beschreiben Elektrodynamik.
- Klassische Integralsätze der Physik: Satz von Stokes, Divergenzsatz von Gauß, ...
- Klassische Mechanik: Hamilton- und Lagrange-Formalismus.

²Es wird erst später erklärt bzw. wiederholt, wie die Begriffe in Anführungsstrichen definiert sind. Die Parabelkurve jedenfalls ist glatt, die Parametrisierung $t \longmapsto (t, t^2)^T$ nicht singulär, wohingegen die Parametrisierung $t \longmapsto (t^3, t^6)^T$ in 0 singulär ist.

³Singularitäten sind hier die Punkte, in deren Umgebung die gegebene Menge M keine Untermannigfaltigkeit ist; man sagt auch M ist nicht glatt in diesen Punkten.

- Allgemeine Relativitätstheorie: Schwarze Löcher, „Urknall“, dunkle Energie.
- Beschreibung von Symmetrien mithilfe von Lie-Gruppen.
- Spektralberechnung von Differentialoperatoren führen zum Orbitalmodell eines Atoms.

Mathematische Anwendungen

Aber es gibt auch mathematische Anwendungen:

- Viele Aussagen über Flächen, zum Beispiel der Eulersche Polyedersatz, der Satz von Gauß–Bonnet
- Visualisierungen von Kurven und Flächen.
- Tiefliegende kürzlich bewiesene Sätze der modernen Mathematik: z.B. die Poincaré-Vermutung.
- Einfache bodenständige Mathematik: z.B. Straßenplanung, Planung von Eisenbahnstrecken, Konstruktion von Gebäuden usw.

Poincaré-Vermutung

Henri Poincaré vermutete 1904:

Ist M eine kompakte einfach-zusammenhängende 3-dimensionale (Unter-)Mannigfaltigkeit, dann gibt es eine glatte bijektive Abbildung

$$M \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^3$$

mit glatter Umkehrabbildung.

Diese Vermutung wurde 2002 von dem Differentialgeometer [Grigori Perelman](#) gelöst. Es handelt sich dabei um eines der sieben [Millenniumprobleme](#), für deren Lösung das [Clay Mathematical Institute](#) ein Preisgeld von je einer Million Dollar versprochen hat. Die Lösung basiert auf einem guten Verständnis von der Krümmung von Mannigfaltigkeiten, verbunden mit dem cleveren Studium von partiellen Differentialgleichungen.

1.2 Wiederholung Untermannigfaltigkeiten

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, den Abschnitt über Untermannigfaltigkeiten ([Analysis II](#), Kapitel 9, Abschnitt 6) aus der Analysis II zu wiederholen. Wir werden auch einige Beweise durchführen, die wir damals übersprungen haben. Konvention $0 \notin \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

1.2.1 Definition und Charakterisierung von Untermannigfaltigkeiten

Definition 1.1. Seien $k, n, r \in \mathbb{N}_0$. Sei $r \geq 1$, $k \geq n$. Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}^k$. Wir nennen M eine n -dimensionale **Untermannigfaltigkeit** von $\mathbb{R}^k$ mit Regularität C^r , falls es zu jedem

vgl. [Analysis II](#), Kapitel 9, Def. 6.1

$p \in M$ offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^k$ und einen $\mathcal{C}^r$ -Diffeomorphismus $\varphi : U \rightarrow V$ gibt, so dass $p \in U$ und $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. Solch ein φ nennt man eine **Untermannigfaltigkeitskarte** von M .

Anschaulich: der Diffeomorphismus φ verbiegt $U \cap M$ in eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^k$.
 Siehe auch Abbildungen 1.1 und 1.2.

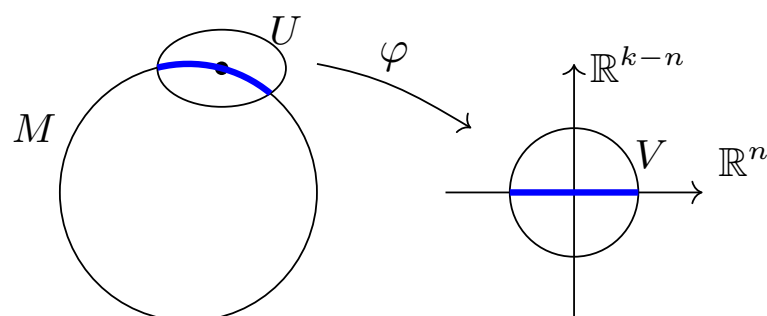


Abbildung 1.1: In einer Untermannigfaltigkeitskarte wird die Mannigfaltigkeit auf eine offene Teilmenge eines Untervektorraums abgebildet.

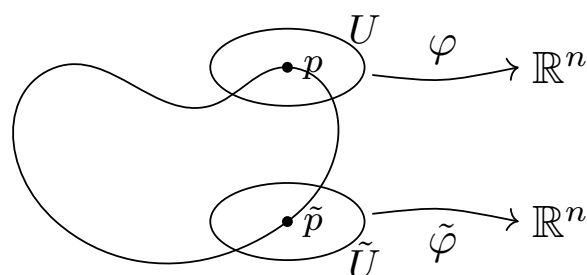


Abbildung 1.2: Verschiedene Teile der Untermannigfaltigkeit werden im allgemeinen durch verschiedene Untermannigfaltigkeitskarten erfasst.

Bemerkung 1.2 (Triviale Untermannigfaltigkeiten). Sei $U \subset \mathbb{R}^k$.

- (i) Dann ist $U \subset \mathbb{R}^k$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$ genau dann, wenn $U \subset \mathbb{R}^k$ offen ist.
- (ii) Dann ist $U \subset \mathbb{R}^k$ eine 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$ genau dann, wenn U diskret ist.

vgl. Analysis II, Kapitel 9, Def. 6.3

Definition 1.3. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei r -mal stetig differenzierbar (mit $r \geq 1$). Dann heißt $y \in \mathbb{R}^m$ ein **regulärer Wert**, falls gilt

$$\forall p \in F^{-1}(y) : F'(p) \text{ hat Rang } m.$$

(Das heißt $F'(p)$ beschreibt eine surjektive lineare Abbildung.)

Ist y kein regulärer Wert, so nennt man y einen **singulären Wert**.

vgl. Analysis II, Kapitel 9, Satz. 6.7

Satz 1.4 (Satz vom regulären Wert). Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}^k$, $r \geq 1$. Äquivalent sind:

- (1) M ist n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$ mit Regularität C^r .
- (2) Zu jedem $p \in M$ existiert eine offene Umgebung U in $\mathbb{R}^k$ und eine Funktion $F \in C^r(U, \mathbb{R}^{k-n})$, so dass 0 regulärer Wert von F ist und $F^{-1}(\{0\}) = U \cap M$.
- (3) Zu jedem $p \in M$ existiert eine offene Umgebung U in $\mathbb{R}^k$ und eine Funktion $F \in C^r(U, \mathbb{R}^{k-n})$, ein $z \in \mathbb{R}^{k-n}$, so dass z regulärer Wert von F ist und $F^{-1}(\{z\}) = U \cap M$.
- (4) Lokal ist M nach Permutation der Komponenten von $\mathbb{R}^k$ der Graph einer Funktion, genauer: zu jedem $p \in M$ existiert ein $\sigma \in S_k$, eine offene Teilmenge V von $\mathbb{R}^n$, eine offene Teilmenge W von $\mathbb{R}^{k-n}$ und eine C^r -Funktion $f: V \rightarrow W$, so dass

$$(V \times W) \cap L_\sigma(M) = \text{Graph}(f).$$

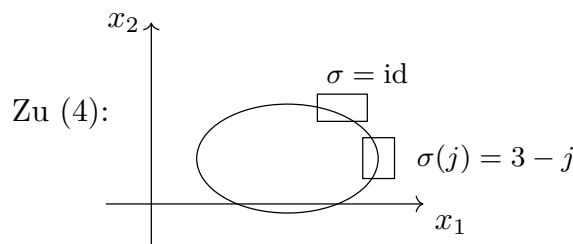


Abbildung 1.3: Im oberen Rechteck ist die Untermannigfaltigkeit lokal der Graph einer Funktion von x_1 nach x_2 . Im rechten Rechteck ist sie der Graph einer Funktion von x_2 nach x_1 .

vgl. Analysis II, Kapitel 9, Def. 6.15

Definition 1.5. Sei W eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $\Psi: W \rightarrow \mathbb{R}^k$. Man nennt Ψ eine **Immersion**, wenn Ψ stetig differenzierbar ist und wenn für alle $p \in W$ die Matrix $\Psi'(p)$ Rang n hat (d.h. die zu $\Psi'(p)$ gehörende lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $x \mapsto \Psi'(p) \cdot x$ ist injektiv). Man nennt Ψ eine **C^r -Immersion**⁴, wenn zusätzlich $\Psi \in C^r$, $r \geq 1$.

vgl. Analysis II, Kapitel 9, Satz 6.17

Satz 1.6 (Immersionssatz). Sei W eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $\Psi: W \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine C^r -

⁴Also: C^1 -Immersion=Immersion

Immersion, $r \geq 1$. Dann gibt es zu jedem $p \in W$ eine offene Umgebung $U \subset W$, so dass $\Psi(U)$ eine n -dimensionale $\mathcal{C}^r$ -Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$ ist und so dass $\Psi|_U : U \rightarrow \Psi(U)$ ein Homöomorphismus ist.

Beweis: ⁵ Sei $\Psi : W \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Immersion und $p \in W$. Da $\Psi'(x_0)$ Rang n hat, sind die Vektoren $\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial x_n}(p)$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^k$. Deswegen existieren $k - n$ Vektoren $v_{n+1}, \dots, v_k$ in $\mathbb{R}^k$ so, dass $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial x_n}(p), v_{n+1}, \dots, v_k\right)$ eine Basis von $\mathbb{R}^k$ ist. Betrachte nun die Abbildung

$$\Phi : W \times \mathbb{R}^{k-n} \rightarrow \mathbb{R}^k, (x, \alpha) \mapsto \Psi(x) + \sum_{j=n+1}^k \alpha_j v_j,$$

wobei $x \in W$ und $\alpha = (\alpha_{n+1}, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^{k-n}$. Offensichtlich ist $\Phi \in \mathcal{C}^r$. Wir rechnen:

$$\Phi'(p, 0) = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}(p) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}(p) \quad \cdots \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_n}(p) \quad v_{n+1} \quad \cdots \quad v_k \right).$$

Die Spalten bilden – wie oben konstruiert – eine Basis, d.h. $\Phi'(p, 0)$ ist eine invertierbare Matrix.

Nach dem lokalen Umkehrsatz existieren eine offene Umgebung V_1 von $(p, 0)$ in $W \times \mathbb{R}^{k-n}$ und eine offene Umgebung V_2 von $\Phi(p, 0) = \Psi(p)$ in $\mathbb{R}^k$, so dass $\Phi|_{V_1} : V_1 \rightarrow V_2$ ein $\mathcal{C}^r$ -Diffeomorphismus ist.

Durch Verkleinern von V_1 und V_2 können wir erreichen, dass V_1 von der Form $V_1 = U \times U'$ ist (mit $p \in U \subset W$, $0 \in U'$).

Dann ist $\varphi := (\Phi|_{U \times U'})^{-1} : V_2 \rightarrow U \times U'$ eine Untermannigfaltigkeitskarte von $\Psi(U) = \Phi(U \times \{0\})$. Da $\Phi|_{U \times U'} : U \times U' \rightarrow V_2$ ein Homöomorphismus ist, ist auch $\Psi|_U = (\Phi|_{U \times U'})|_{U \times \{0\}} : U \times \{0\} \cong U \rightarrow \Psi(U)$ ein Homöomorphismus. ■

Definition 1.7. Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine Teilmenge. Eine n -dimensionale **lokale $\mathcal{C}^r$ -Parametrisierung** von M ist eine $\mathcal{C}^r$ -Immersion $\Psi : W \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit den folgenden Eigenschaften:

vgl. [Analysis II](#), Kapitel 9, Def. 6.24

- (a) $W \subset \mathbb{R}^n$ ist offen,
- (b) $\Psi(W)$ ist offen in M , das heißt $\Psi(W) = U \cap M$ für eine offene Teilmenge U von $\mathbb{R}^k$,
- (c) $\Psi : W \rightarrow \Psi(W)$ ist ein Homöomorphismus.

Beispiel 1.8. Betrachte die Abbildung

$$\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t^3 \\ t^6 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\Psi'(0) = 0$ ist Ψ keine lokale Parametrisierung. Hingegen ist $\Psi|_{\mathbb{R}^*}$ eine Parametrisierung von $\Psi(\mathbb{R}^*)$.

Die Abbildung

$$\Psi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

⁵Grau hinterlegt, da es in der Analysis II genau so schon behandelt wurde.

ist eine Parametrisierung von $\Psi_2(\mathbb{R}) = \Psi(\mathbb{R})$.

Für „ $W \subset \mathbb{R}^n$ offen und eine Abbildung $\Psi : W \rightarrow M$ “ schreiben wir im folgenden oft abkürzend

$$\mathbb{R}^n \ni W \xrightarrow{\Psi} M.$$

Lemma 1.9. Sei $\mathbb{R}^n \ni W \xrightarrow{\Psi} M$ eine lokale $\mathcal{C}^r$ -Parametrisierung von M und $p \in \Psi(W)$. Dann gibt es eine Untermannigfaltigkeitskarte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k-n}$ mit $\varphi \in \mathcal{C}^r$, $p \in U \subseteq \mathbb{R}^k$ und

$$\varphi \circ \Psi|_{\Psi^{-1}(U \cap M)}(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall x \in \Psi^{-1}(U \cap M) \subset W. \quad (1.1)$$

Außerdem gilt $U \cap M \subset \Psi(W)$.

Beweis: Die im Beweis des Immersionssatzes 1.6 konstruierte Abbildung φ erfüllt die gewünschten Eigenschaften. ■

vgl. Analysis II, Kapitel 9, Lemma 6.20

Lemma 1.10. Sei M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$ mit einer Untermannigfaltigkeitskarte $\varphi : U \rightarrow V$, $p \in U \cap M$, und sei $\Psi : W \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine injektive Immersion mit $\Psi(W) \subset M$ und $p \in \Psi(W)$. Sei $T_p \subset \mathbb{R}^k$ das Bild von $\Psi'(\Psi^{-1}(p)) \in \mathbb{R}^{k \times n}$. Dann gilt $\varphi'(p) \cdot T_p = \mathbb{R}^n \times \{0\}$.

Es sei hier bemerkt, dass der Raum T_p sich später als der Tangentialraum $T_p M$ erweisen wird.

Beweis: Setze $W_0 := \Psi^{-1}(U) \subset W$ und $x_0 := \Psi^{-1}(p)$. Man prüft leicht, dass $\pi_y \circ \varphi \circ \Psi|_{W_0} : W_0 \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$ alles auf 0 abbildet. Nach Kettenregel ist dann

$$\begin{aligned} 0 &= \underbrace{\pi'_y(\varphi(p))}_{= (0 \ 1_{k-n})} \cdot \varphi'(p) \cdot \Psi'(x_0), \end{aligned}$$

das heißt, das Bild der Matrix $A := \varphi'(p) \cdot \Psi'(x_0)$ liegt in $\mathbb{R}^n \times \{0\}$, und da $\Psi'(x_0)$ Rang n besitzt und $\varphi'(p)$ invertierbar ist, wissen wir, dass das Bild von A gleich $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ ist. Da das Bild von A gleich $\varphi'(p) \cdot T_p$ ist, folgt die Behauptung. ■

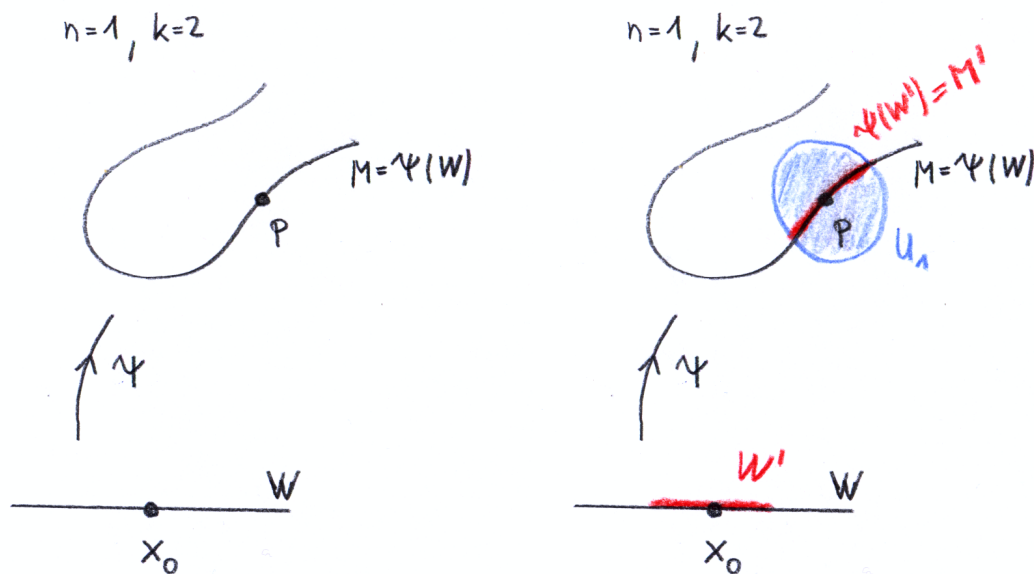
vgl. Analysis II, Kapitel 9, Satz 6.21

Satz 1.11. ⁶Sei $\Psi : W \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine injektive $\mathcal{C}^r$ -Immersion, $r \geq 1$. Dann ist $\Psi(W)$ eine $\mathcal{C}^r$ -Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$ genau dann, wenn $\Psi : W \rightarrow \Psi(W)$ ein Homöomorphismus ist.

Beweis: Setze $M := \Psi(W)$.

„ $\Leftarrow$ “: Wir wollen zeigen, dass M eine $\mathcal{C}^r$ -Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$ ist. (Vergleiche hierzu Abbildungen 1.4 und 1.5.) Wir überprüfen dazu die Untermannigfaltigkeitseigenschaft auf einer Umgebung von $p \in M$. wir schreiben dazu $p = \Psi(x_0)$ für ein $x_0 \in W$. Nach dem Immersionssatz 1.6 gibt es eine offene Umgebung W' von x_0 in W , so dass $M' := \Psi(W')$ eine $\mathcal{C}^r$ -Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$ ist. Da $\Psi : W \rightarrow \Psi(W)$ ein Homöomorphismus ist und da W' offen in W ist, ist $M' = \Psi(W')$ eine offene Teilmenge von $M = \Psi(W)$, d.h. es existiert eine in $\mathbb{R}^n$ offene Menge U_1 mit $M' = U_1 \cap M$.

⁶Dieser Satz und sein Beweis sind keine Wiederholung im strikten Sinne, da wir den Beweis in Analysis II aus Zeitgründen übersprungen haben.



Abbildungung 1.4: Illustration zum Beweis von Satz 1.11 „ $\Leftarrow$ “: Zunächst sehen wir nur Ψ (links), dann nutzen wir den Immersionssatz (rechts)

Sei $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ eine Untermannigfaltigkeitskarte von M' mit $p \in U_2$. Setze $U := U_1 \cap U_2 \ni p$, $V := \varphi_2(U)$ und $\varphi := \varphi_2|_U$.⁷ Dann sind U und V offen in $\mathbb{R}^k$, und $\varphi : U \rightarrow V$ ist ein $\mathcal{C}^r$ -Diffeomorphismus, für den gilt:

$$\varphi(U \cap M) = \varphi_2(U \cap M') = V \cap \varphi_2(M') = \underbrace{V \cap V_2}_{=V} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}).$$

Also ist $\varphi : U \rightarrow V$ eine Untermannigfaltigkeitskarte von M mit $p \in U$.

„ $\Rightarrow$ “: Wir zeigen, dass $\Psi^{-1} : M \rightarrow W$ folgenstetig ist. (Vergleiche hierzu Abbildungen 1.6, 1.7 und 1.8.) Sei hierzu eine Folge $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in M gegeben mit $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = p \in M$. Da nach Voraussetzung M eine $\mathcal{C}^r$ -Untermannigfaltigkeit ist, können wir eine Untermannigfaltigkeitskarte $\varphi : U \rightarrow V$ mit $p \in U$ wählen. Es liegen fast alle p_i in $U \cap M$ und deswegen sind fast alle $q_i := \pi_x \circ \varphi(p_i) \in \pi_x(V) \subset \mathbb{R}^n$ wohldefiniert und konvergieren gegen $q := \pi_x \circ \varphi(p) \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere $\varphi(p_i) = (q_i, 0)$.

Setze $W_0 := \Psi^{-1}(U) \subset W$ und $x_0 := \Psi^{-1}(p)$. Wie im Lemma 1.10 gezeigt, ist das Bild von $\varphi'(p)\Psi'(x_0)$ gleich $\mathbb{R}^n \times \{0\}$.

Somit ist

$$\begin{aligned} (\pi_x \circ \varphi \circ \Psi|_{W_0})'(x_0) &= \underbrace{\pi'_x(\varphi(p))}_{= (\mathbb{1}_n \ 0)} \cdot \varphi'(p) \cdot \Psi'(x_0) \\ &= (\mathbb{1}_n \ 0) \end{aligned}$$

eine invertierbare Matrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$. Also ist nach dem lokalen Umkehrsatz $\rho := \pi_x \circ \varphi \circ \Psi|_{W_0}$ lokal um x_0 umkehrbar und $x_i := \rho^{-1}(q_i) \rightarrow x_0 := \rho^{-1}(q)$. Wegen $\Psi(x_i) \in M$ haben wir $\varphi \circ \Psi(x_i) = (q_i, 0)$ und aus der Injektivität von φ folgt $\Psi(x_i) = p_i$, also $\Psi^{-1}(p_i) = x_i \rightarrow x_0 = \Psi^{-1}(p)$. Wir haben

⁷Es kam hier die Frage auf: wieso ist es notwendig, dass man auf U einschränkt? Ich denke, die Abbildungen zeigen, was sonst schief gehen kann.

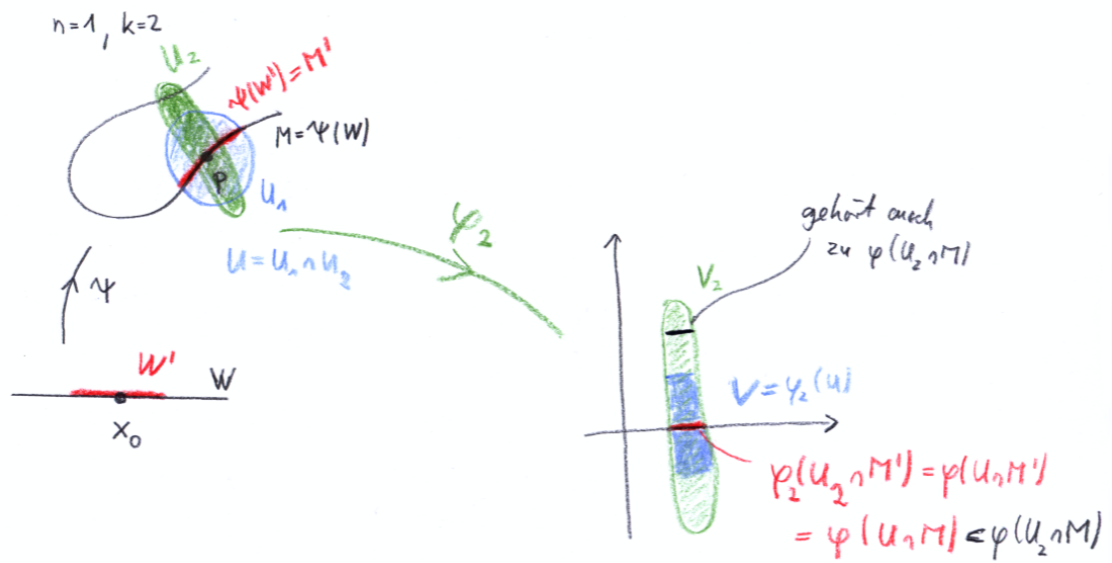


Abbildung 1.5: Illustration zum Beweis von Satz 1.11 „ $\Leftarrow$ “: die Untermannigfaltigkeitskarten φ_2 und φ .

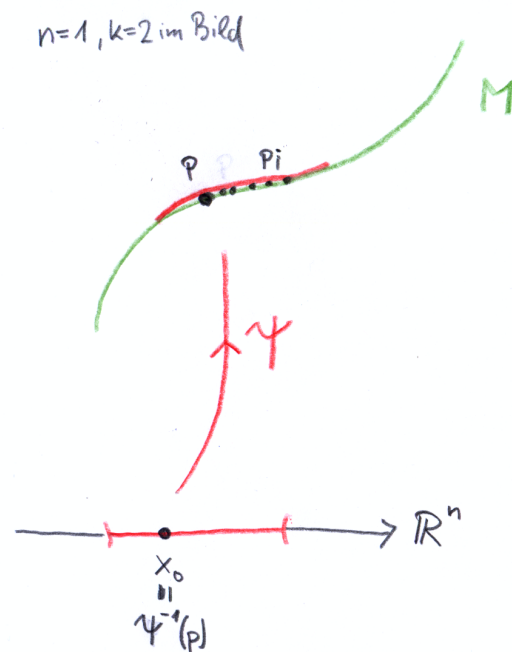


Abbildung 1.6: Zum Beweis von Satz 1.11 „ $\Rightarrow$ “: Am Anfang wissen wir noch nicht, dass $\Psi^{-1}(p_i)$ gegen $x_0 = \Psi^{-1}(p)$ konvergiert. Das ist eben zu zeigen! Vergleiche mit Beispiel 1.12.

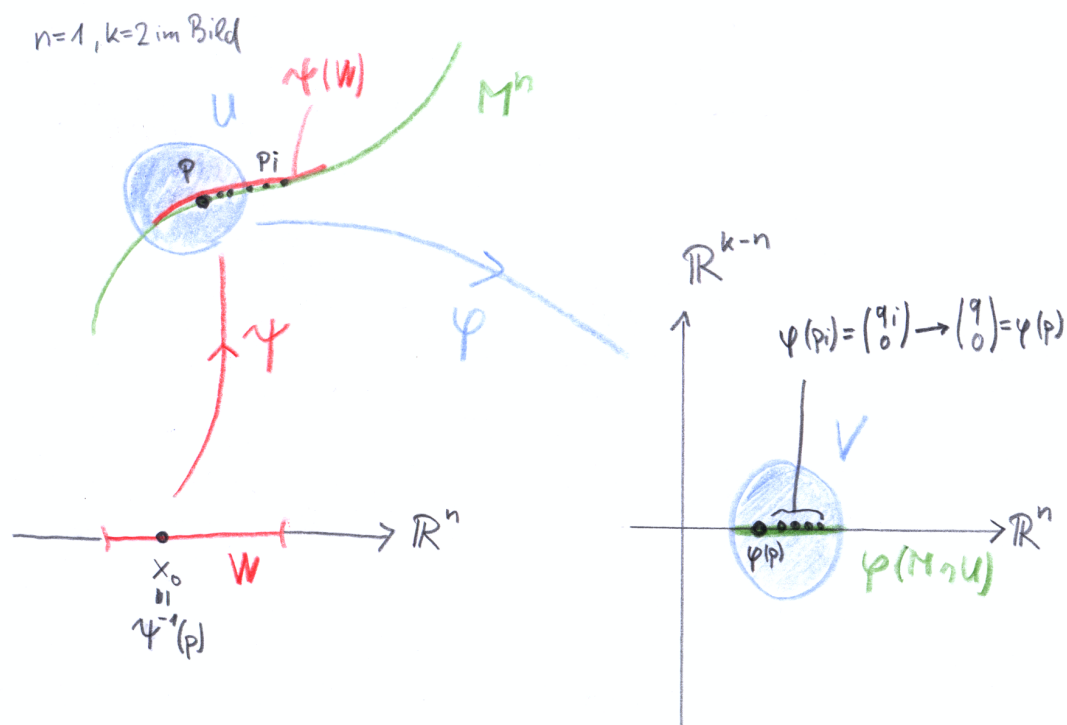


Abbildung 1.7: Zum Beweis von Satz 1.11 „ $\Rightarrow$ “: Nun wählen wir die Untermannigfaltigkeitskarte. Man beachte: $U \cap M$ und $\Psi(W)$ sind offene Umgebungen von p in M , aber wir wissen weder $U \cap M \subset \Psi(W)$ noch $\Psi(W) \subset U \cap M$. Dies ist aber kein Problem, denn durch Einschränken könnten wir beides erreichen. Wir schränken aber nur W zu W_0 ein, das reicht uns. Da φ stetig ist, wissen wir bereits, dass $\varphi(p_i) \rightarrow \varphi(p)$.

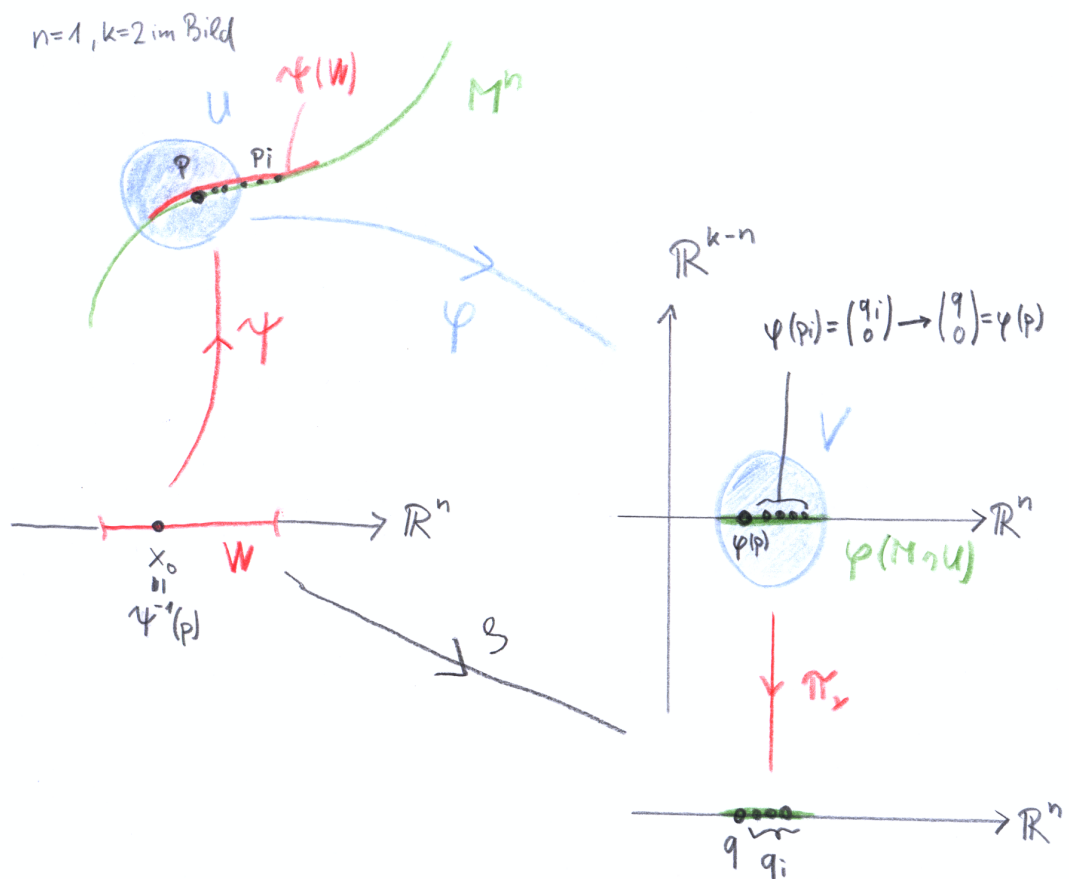


Abbildung 1.8: Zum Beweis von Satz 1.11 „ $\implies$ “: Nun komponieren wir $\varphi \circ \Psi$ mit der Projektion π_x auf die ersten Komponenten und erhalten die Abbildung ρ , von der wir mit dem lokalen Umkehrsatz zeigen, dass sie auf einer Umgebung von p ein Diffeomorphismus auf ihr Bild ist. Da die Umkehrabbildung eines Diffeomorphismus stetig ist, ist der Beweis nun dem Ende nahe.

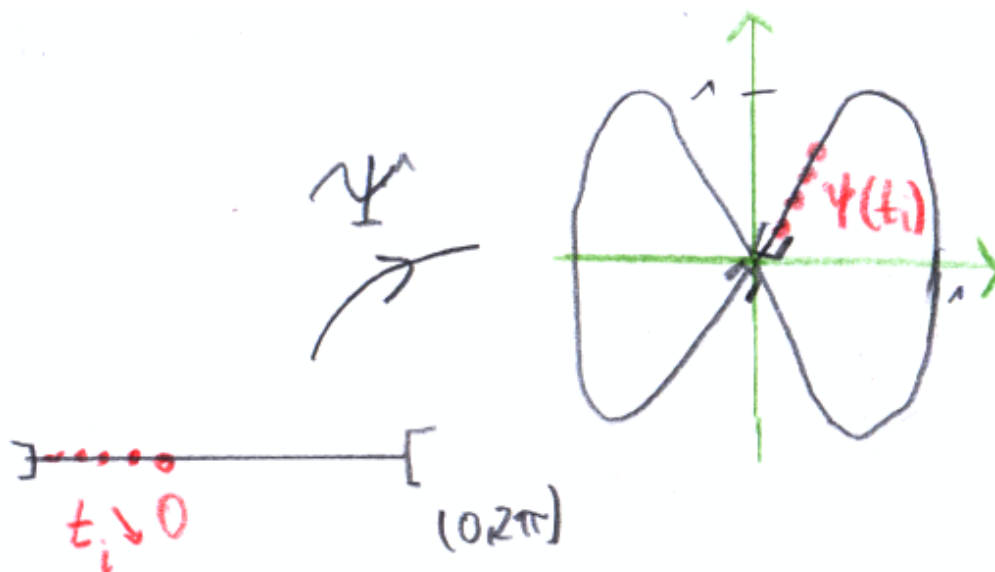


Abbildung 1.9: Zu Beispiel 1.12: Ist t_i eine Nullfolge aus positiven Zahlen, z.B. $t_i = 1/i$, dann konvergiert t_i nicht in $(0, 2\pi)$. Andererseits gilt $\Psi(t_i) \rightarrow (0, 0) = \Psi(\pi) \in \mathbb{R}^2$. Hieraus folgt, dass Ψ^{-1} nicht folgenstetig ist, Ψ ist also kein Homöomorphismus auf sein Bild. Der Satz 1.11 besagt dann also, dass M keine Untermannigfaltigkeit ist. Dies sieht man auch mit anderen Methoden, vgl. Übungsblatt 2, Aufgabe 3b).

also die Folgenstetigkeit und somit die Stetigkeit von $\Psi^{-1} : M \rightarrow W$ gezeigt. ■

Beispiel 1.12. Man betrachte die Abbildung

$$\Psi : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Psi(t) := \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$$

und setze $M := \Psi((0, 2\pi))$. Die Abbildung ist eine injektive Immersion, und natürlich ist das Bild von Ψ offen in M , denn es ist ja sogar gleich M . Dennoch ist es keine lokale Parametrisierung, denn die Abbildung ist *kein* Homöomorphismus auf das Bild.

Zeichnen Sie die Kurve auf und überlegen Sie, wieso es kein Homöomorphismus ist, siehe Abbildung 1.9.

Außerdem ist M keine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Proposition 1.13. ⁸ Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine Teilmenge. Dann sind äquivalent:

vgl. Analysis II, Kapitel 9, Prop. 6.26

- (a) M ist eine n -dimensionale C^r -Untermannigfaltigkeit.
- (b) Für alle $p \in M$ existiert eine n -dimensionale lokale C^r -Parametrisierung von M der Regularität C^r , deren Bild p enthält.

Beweis: „(a) $\implies$ (b)“: Sei $p \in M$ beliebig. Sei $\varphi : U \rightarrow V$ eine Untermannigfaltigkeitskarte

⁸Diese Proposition und ihr Beweis sind keine Wiederholung im strikten Sinne, da wir den Beweis in Analysis II aus Zeitgründen übersprungen haben.

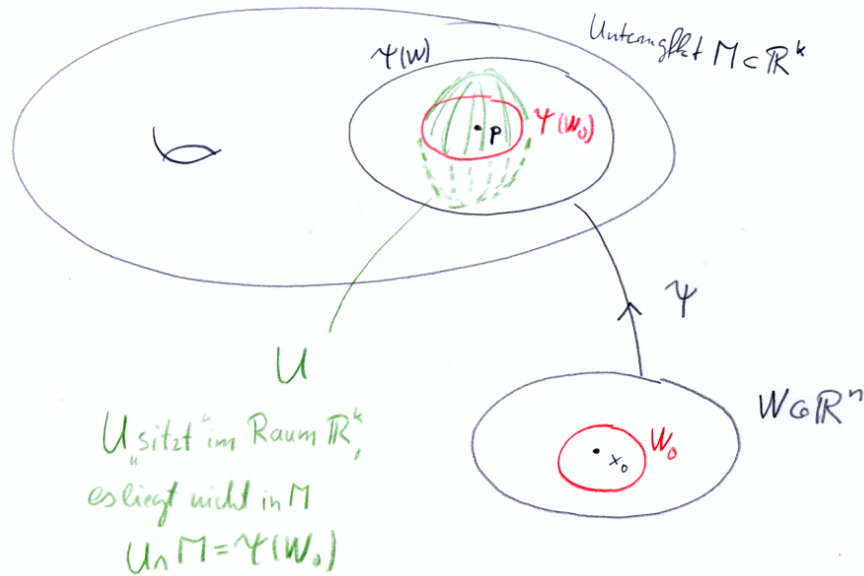


Abbildung 1.10: Zu Proposition 1.13 (b) $\implies$ (a), dargestellt für $n = 2$ und $k = 3$

von M mit $p \in U$. Definiere $W := V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ und $\Psi := (\varphi^{-1})|_W: W \rightarrow \mathbb{R}^k$. Dann ist W offen in $\mathbb{R}^n$, und Ψ ist $\mathcal{C}^r$ (da $\varphi^{-1} \in \mathcal{C}^r$). Man rechnet leicht $\Psi'(x) = (\varphi^{-1})'(x)|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} \in \mathbb{R}^{k \times n}$. Für jedes $x \in M$ entspricht diese Matrix einer injektiven Abbildung, da sie die Restriktion einer invertierbaren linearen Abbildung $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ ist. Außerdem gilt $\Psi(W) = \varphi^{-1}(W) = U \cap M$; und $\Psi: W \rightarrow \Psi(W)$ ist die Einschränkung eines Homöomorphismus im Definitionsbereich und entsprechend im Bild, ist also selbst ein Homöomorphismus. Somit haben wir gewünschte Parametrisierung erhalten.

„(b) $\implies$ (a)“: (siehe Abbildung 1.10) Sei $p \in M$ beliebig. Sei $\Psi: W \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine lokale $\mathcal{C}^r$ -Parametrisierung von M mit $p \in \Psi(W)$. Wir definieren $x_0 := \Psi^{-1}(p)$. Nach dem Immersionsatz 1.6 gibt es eine offene Umgebung W_0 von x_0 , so dass $\Psi(W_0) \ni p$ eine Untermannigfaltigkeit ist.

Da $\Psi^{-1}: \Psi(M) \rightarrow M$ stetig ist, ist $\Psi(W_0)$ offen in $\Psi(W)$. Wegen (b) von Definition 1.7 ist $\Psi(W)$ offen in M , insgesamt ist also $\Psi(W_0)$ offen in $\Psi(W)$. Es gibt also eine in $\mathbb{R}^k$ offene Menge $U \ni p$ mit $\Psi(W_0) = U \cap M$. Wir haben also zu jedem $p \in M$ eine in $\mathbb{R}^k$ offene Umgebung U gefunden, so dass $U \cap M$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$ ist. Da die Untermannigfaltigkeitseigenschaft eine lokale Eigenschaft ist, folgt daraus, dass M eine $\mathcal{C}^r$ -Untermannigfaltigkeit ist. ■

1.2.2 Der Tangentialraum

Definition 1.14. Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$ ein Punkt. Der **Tangentialraum** an M im Punkt p ist

$$T_p M := \{v \in \mathbb{R}^k \mid \exists \varepsilon > 0 \text{ und } c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ ist } \mathcal{C}^1\text{-Kurve mit } c((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset M, c(0) = p \text{ und } c'(0) = v\} \subset \mathbb{R}^k.$$

Proposition 1.15. Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit und $p \in M$ ein Punkt.

vgl. Analysis II, Kapitel 9, Prop. 6.31

- (a) Sei $\Psi: W \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine n -dimensionale lokale $\mathcal{C}^1$ -Parametrisierung von M um p . Sei $x_0 := \Psi^{-1}(p) \in W$. Dann gilt

$$T_p M = \text{Bild}(\Psi'(x_0)).$$

- (b) Sei $\varphi: U \rightarrow V$ eine Untermannigfaltigkeitskarte von M um p . Dann gilt

$$T_p M = \varphi'(p)^{-1} \cdot (\mathbb{R}^n \times \{0\}).$$

- (c) Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offene Umgebung von p und $F: U \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$ $\mathcal{C}^r$ mit 0 als regulärem Wert und $F^{-1}(\{0\}) = U \cap M$. Dann gilt

$$T_p M = \ker(F'(p)).$$

Insbesondere ist $T_p M$ ein n -dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^k$.

Beispiel 1.16. $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) := \|x\|^2 - 1$. Dann ist 0 ein regulärer Wert von F und $S^2 = F^{-1}(\{0\})$. Man rechnet nach $F'(p) = 2p^T \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$. Somit

$$T_p S^2 = \ker(F'(p)) = p^\perp := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid X \perp p\}.$$

1.3 Abbildungen, Atlanten und Vektorfelder

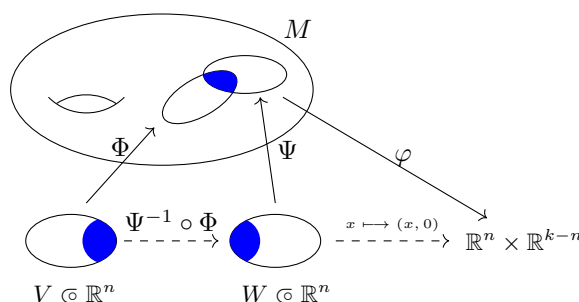
1.3.1 Parametrisierungswechsel

Im folgenden sei M immer eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$ der Regularität $\mathcal{C}^r$.

Lemma 1.17. Seien $\Phi: \mathbb{R}^n \ni V \rightarrow M$ und $\Psi: \mathbb{R}^n \ni W \rightarrow M$ zwei lokale $\mathcal{C}^r$ -Parametrisierungen von M mit $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dann ist

$$\Psi^{-1} \circ \Phi|_{\Phi^{-1}(\Phi(V) \cap \Psi(W))}: \Phi^{-1}(\Phi(V) \cap \Psi(W)) \rightarrow \Psi^{-1}(\Phi(V) \cap \Psi(W))$$

ein $\mathcal{C}^r$ -Diffeomorphismus.



Beweis: Die Bijektivität ist klar, da $\Phi: V \rightarrow \Phi(V)$ und $\Psi: W \rightarrow \Psi(W)$ Bijektionen sind.

Sei nun $y \in \Phi^{-1}(\Phi(V) \cap \Psi(W))$. Dann ist zu zeigen, dass $\Psi^{-1} \circ \Phi$ auf einer Umgebung von y r -mal stetig differenzierbar ist. (Dass die Umkehrabbildung auch $\mathcal{C}^r$ ist, folgt durch Vertauschen von Φ und Ψ):

Wende Lemma 1.9 mit $p := \Phi(y)$ an und wir erhalten eine Untermannigfaltigkeitskarte φ , die (1.1) erfüllt. Definiere $\tilde{V} := \Phi^{-1}(\Phi(V) \cap \Psi(W))$ ⁹. Für jedes beliebige $\tilde{y} \in \tilde{V} \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt

$$\varphi \circ \Phi(\tilde{y}) = (\varphi \circ \Psi) \circ (\Psi^{-1} \circ \Phi)(\tilde{y}) = \begin{pmatrix} (\Psi^{-1} \circ \Phi)(\tilde{y}) \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k-n}.$$

Das φ und Φ in $\mathcal{C}^r$ sind, haben wir $\varphi \circ \Phi \in \mathcal{C}^r$; also nach obiger Rechnung $\Psi^{-1} \circ \Phi|_{\tilde{V}} \in \mathcal{C}^r$. ■

1.3.2 $\mathcal{C}^r$ -Abbildungen

Im Folgenden seien alle Untermannigfaltigkeiten glatt¹⁰, das heißt von Regularität $\mathcal{C}^\infty$. Alle lokalen Parametrisierungen seien glatt, ebenso alle Untermannigfaltigkeitskarten.¹¹

Notation 1.18. Seien $N^n \subset \mathbb{R}^k$ und $M^m \subset \mathbb{R}^\ell$ glatte Untermannigfaltigkeiten. In diesem Fall bedeutet der Exponent n (bzw. m), dass $n = \dim(N)$ (bzw. $m = \dim(M)$).¹²

Für eine offene Teilmenge U eines topologischen Raums X schreibe $U \subseteq X$.

Eine Inklusion von X in Y notieren wir als $X \hookrightarrow Y$. Man schreibt oft auch einfach $\Psi^{-1} \circ \Phi$ an Stelle von $\Psi^{-1} \circ \Phi|_{\Phi^{-1}(\Phi(V) \cap \Psi(W))}$, denn es ist ja sowieso klar, dass $\Psi^{-1} \circ \Phi$ außerhalb von $\Phi^{-1}(\Phi(V) \cap \Psi(W))$ gar nicht sinnvoll definierbar ist.

Definition 1.19. Seien $N^n \subset \mathbb{R}^k$ und $M^m \subset \mathbb{R}^\ell$ (glatte) Untermannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f: N \rightarrow M$ hat Regularität $\mathcal{C}^r$, falls es zu jedem $p \in N$ eine in $\mathbb{R}^k$ offene Menge U und eine Funktion $F \in \mathcal{C}^r(U, \mathbb{R}^\ell)$ gibt, so dass $p \in U$ und das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} N \cap U & \xrightarrow{f|_{N \cap U}} & M \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ U & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^\ell \end{array}$$

Proposition 1.20. Mit den Notationen von Definition 1.19 sind äquivalent:

- (i) $f: N \rightarrow M$ hat Regularität $\mathcal{C}^r$,
- (ii) Es gibt ein $U \subseteq \mathbb{R}^k$ mit $N \subset U$ und $F \in \mathcal{C}^r(U, \mathbb{R}^\ell)$ mit $F|_N = f$,
- (iii) Für jede lokale Parametrisierung $\Phi: V \rightarrow N$ ist die Komposition

$$V \xrightarrow{\Phi} N \xrightarrow{f} M \hookrightarrow \mathbb{R}^\ell$$

in $\mathcal{C}^r$,

⁹Dies ist also im Bild die blaue Menge links unten.

¹⁰Wir haben definiert: glatt= $\mathcal{C}^\infty$.

¹¹Man kann die Ergebnisse auch problemlos auf geringere Regularität erweitern, die Diskussion der Regularität lenkt aber von den wesentlichen Inhalten der Vorlesung ab. Deswegen betrachten wir im Folgenden nur den glatten Fall. Ist dieser richtig verstanden, so kann man sich später leicht überlegen, was davon noch gilt, wenn die Untermannigfaltigkeiten, die lokale Parametrisierungen oder dergleichen nur noch $\mathcal{C}^r$ mit $r \in \mathbb{N}$ ist.

¹²Dies ist eine zunächst schlampig erscheinende Konvention, denn eigentlich denkt man, dass N^n ja für das n -fache Produkt $N \times \cdots \times N$ stehen müsste. Nach ein bisschen Eingewöhnung führt dies aber ganz selten zu Missverständnissen und ist eine sehr effiziente Notation.

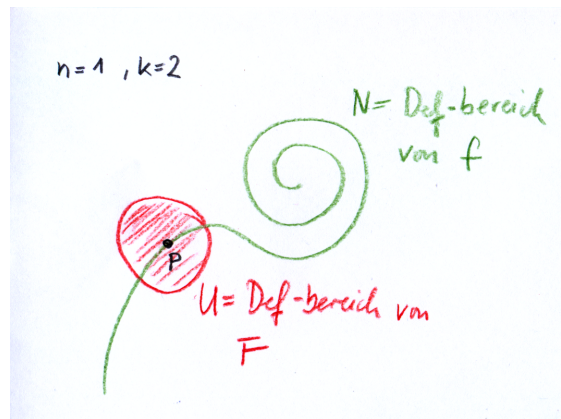


Abbildung 1.11: Zu Definition 1.19

- (iv) Zu jedem $p \in M$ gibt es eine lokale Parametrisierung $\mathbb{R}^n \ni V \xrightarrow{\Phi} N$ mit $\Phi(V) \ni p$, so dass die Komposition

$$V \xrightarrow{\Phi} N \xrightarrow{f} M \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$$

in $\mathcal{C}^r$ ist.

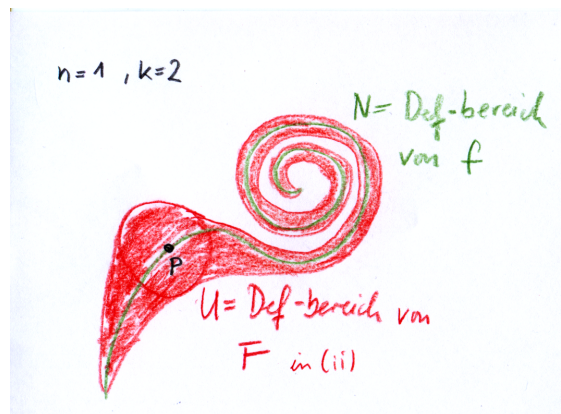


Abbildung 1.12: Zu Proposition 1.20 (ii)

Die offene Menge U , deren Existenz in (ii) behauptet wird, muss deutlich größer sein, als in Abbildung 1.11 dargestellt. Sie muss ganz N enthalten, siehe Abbildung 1.12 für ein mögliches U . Es gibt allerdings Untermannigfaltigkeiten $N \subset \mathbb{R}^k$ und glatte Funktionen $f: N \rightarrow \mathbb{R}$, die man nicht zu einer glatten Funktion $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen kann; in anderen Worten man kann in diesen Fällen in (ii) nicht $U = \mathbb{R}^k$ erreichen. Haben Sie eine Idee, wie so ein Beispiel aussehen könnte?

Beweis: „(ii) $\implies$ (i)“: Klar.

„(i) $\implies$ (ii)“: wollen wir nicht zeigen. Der Beweis ist doch nennenswert aufwändiger als die anderen und wir werden diese Aussage auch später nicht benutzen.

„(i) $\implies$ (iii)“: Zu $x \in V$ wähle $p := \Phi(x)$ und dann wähle U und F wie in Definition 1.19. Setze $\tilde{V} := \Phi^{-1}(U) \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt $f \circ \Phi|_{\tilde{V}} = F \circ \Phi|_{\tilde{V}} \in \mathcal{C}^r(\tilde{V}, \mathbb{R}^\ell)$ nach Kettenregel.

„(iii) $\implies$ (iv)“: Klar.

„(iv) $\implies$ (i)“: Zu $p \in M$ wähle eine Untermannigfaltigkeitskarte

$$\varphi: U \longrightarrow \mathbb{R}^k, \quad y \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(y) \\ \varphi_2(y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k-n}.$$

wie in Lemma 1.9 mit $\Psi := \Phi$ und $p \in U$. Das Lemma besagt, dass für alle $q \in U \cap N$ gilt $(\Phi \circ \varphi_1)(q) = q$. Nach Voraussetzung, d.h. nach (iv), gilt $f \circ \Phi \in \mathcal{C}^r(V, \mathbb{R}^\ell)$. Wir setzen $\tilde{U} := \{x \in U \mid \varphi_1(x) \in V\}$. Dann ist $\tilde{U}$ eine offene Umgebung von p in $\mathbb{R}^k$, und $\varphi_1|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist wohldefiniert und glatt.

Wir setzen nun $F := f \circ \Phi \circ \varphi_1 \in \mathcal{C}^r(\tilde{U}, \mathbb{R}^\ell)$.

Aus $(\Phi \circ \varphi_1)(q) = q \ \forall q \in U \cap N$ folgt nun $F(q) = f(q)$.

Da solch ein $\tilde{U}$ und F für jedes $p \in N$ finden können, haben wir Definition 1.19 geprüft und somit (i) erhalten. ■

Definition 1.21. Sei $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} = \{1, 2, 3, \dots\} \cup \{\infty\}$. Schreibe

$$\mathcal{C}^r(N, M) := \left\{ f: N \longrightarrow M \mid f \text{ hat Regularität } \mathcal{C}^r \right\}$$

Eine Abbildung $f: N \longrightarrow M$ heißt $\mathcal{C}^r$ -**Diffeomorphismus**, falls f bijektiv ist und falls gilt: $f \in \mathcal{C}^r(N, M)$ und $f^{-1} \in \mathcal{C}^r(M, N)$.

!ACHTUNG! Die Bezeichnung ist nicht zulässig für $r = 0$. Ein Diffeomorphismus muss mindestens stetig differenzierbar sein. Im Fall $r = 0$ erhält man aus obiger Definition die Definition eines Homöomorphismus. Im Fall $r = 0$ wird ein anderes Wort gewählt, da die Menge aller Homöomorphismen recht verschiedene Eigenschaften hat als die Menge aller $\mathcal{C}^r$ -Diffeomorphismen, wohingegen die Abhängigkeit von $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ in gewissem Sinne nur gering ist.¹³

Korollar 1.22. Ist $\Phi: V \longrightarrow N$ eine glatte lokale Parametrisierung, so sind $\Phi: V \longrightarrow \Phi(V)$ und $\Phi^{-1}: \Phi(V) \longrightarrow V$ glatte Diffeomorphismen.

Beweis: Wende Proposition 1.20 (iv) mit $f := \Phi^{-1}$, $N := \Phi(V) \subset \mathbb{R}^k$, $M := V \subseteq \mathbb{R}^n$ an. Erhalte $f \in \mathcal{C}^\infty$ aus Proposition 1.20 (iv), denn $f \circ \Phi = \text{id}_V \in \mathcal{C}^\infty$. ■

Das Korollar ist auch wahr, wenn man in der Voraussetzung und der Aussage „glatt“ durch „ $\mathcal{C}^r$ “, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, ersetzt. Den Beweis hiervon kann man durch offensichtliche Modifikationen des obigen erhalten.

1.3.3 Karten, Atlanten und Koordinaten

Im folgenden wird vor allem der Fall $r = \infty$ wichtig sein. Wenn also die Regularität nicht explizit angegeben ist, ist immer von Regularität $\mathcal{C}^\infty$ auszugehen.

¹³Hier muss ich leider vage bleiben, ich hoffe aber, dies reicht, um den Gebrauch der verschiedenen Begriffe zu erklären.

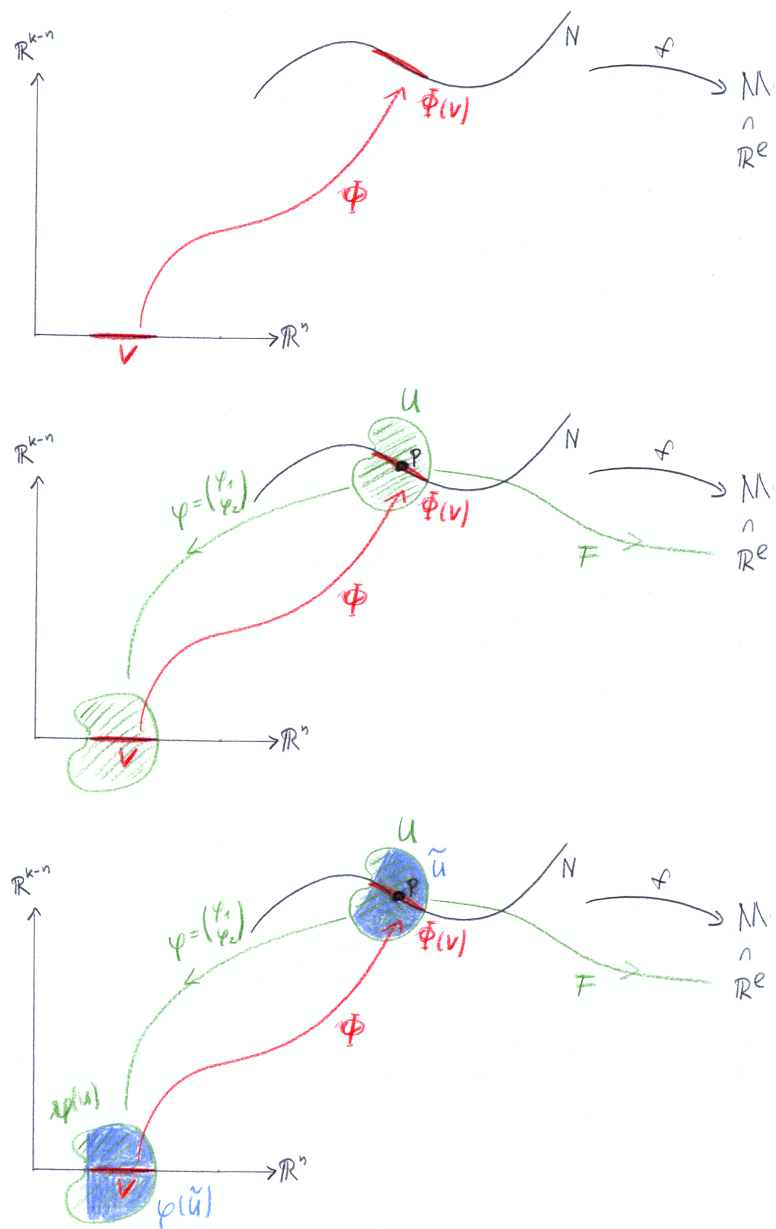


Abbildung 1.13: Zum Beweis von Proposition 1.20 (iv) ⇒ (i)

Definition 1.23. Die Umkehrabbildung einer Parametrisierung $\Phi: V \rightarrow N$ von N nennt man eine **Karte** φ von N oder **Koordinaten** φ auf N . Dabei ist

$$\varphi := \Phi^{-1}: U := \Phi(V) \rightarrow V$$

mit $U \subseteq N$.

Ein **Atlas** ist eine Menge $\{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ von Karten von N so dass $\bigcup_{i \in I} U_i = N$.

Eine Karte besteht also aus

- einer offenen Teilmenge U von M ,
- einer offenen Teilmenge V von $\mathbb{R}^m$ und
- einem Diffeomorphismus $\varphi: U \rightarrow V$.

!ACHTUNG! Karten und Untermannigfaltigkeitskarten sind (zunächst) etwas verschiedenes, auch wenn wir beide mit kleinen griechischen Buchstaben $\varphi, \psi, \dots$ bezeichnen. Mit den obigen Definition sind Karten auf offenen Teilmengen von M^m definiert und gehen auf offene Teilmengen von $\mathbb{R}^m$. Untermannigfaltigkeitskarten $\tilde{\varphi}$ sind Diffeomorphismen von einer offenen Menge $W \subseteq \mathbb{R}^k$ auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^k$. Durch Einschränkung solch einer Untermannigfaltigkeitskarte auf $U := W \cap M$ und durch Identifizierung von $\mathbb{R}^m$ mit $\mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^k$ erhalten wir aus der Untermannigfaltigkeitskarte $\tilde{\varphi}$ die Karte $\varphi := \tilde{\varphi}|_U: U \rightarrow V := \tilde{\varphi}(U) \subseteq \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^k$. Dann ist $\Phi := (\varphi)^{-1} = (\tilde{\varphi}|_U)^{-1}: V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^k$ eine lokale Parametrisierung von M .

Korollar 1.24. Sei $f: M^m \rightarrow N^n$ und die Notation wie oben. Dann sind äquivalent:

- f ist in C^r ,
- $\varphi \circ f|_{f^{-1}(U)}$ ist in C^r für alle Karten $\varphi: U \rightarrow V$ von N ,
- $\varphi \circ f|_{f^{-1}(U)}$ ist in C^r für alle Karten $\varphi: U \rightarrow V$ aus einem Atlas von N .
- $\varphi \circ f \circ \psi^{-1}|_{\psi(f^{-1}(U) \cap W)}$ ist in C^r für alle Karten $\varphi: U \rightarrow V$ aus einem Atlas von N und für alle Karten $\psi: W \rightarrow Z$ aus einem Atlas von M .

Beispiel. Sei $N^n \subset \mathbb{R}^\ell$ eine Untermannigfaltigkeit, dann bildet

$$\mathcal{A} := \left\{ \varphi: U \rightarrow V \mid \varphi: U \rightarrow V \text{ ist eine } C^r\text{-Karte von } N \right\}$$

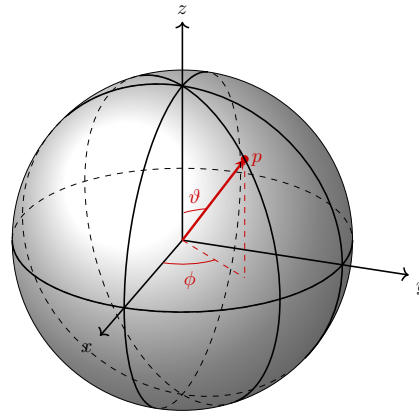
einen Atlas, der **maximaler Atlas** von N genannt wird.

Beispiel 1.25 (Kugelkoordinaten auf $\mathbb{S}^2$).

Sei $M = \mathbb{S}^2 := \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Betrachte

$$\Phi: (0, 2\pi) \times (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\phi, \vartheta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\phi) \sin(\vartheta) \\ \sin(\phi) \sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$



Setze

$$U := \text{im}(\Phi) = \mathbb{S}^2 \setminus \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid x \geq 0, z \in \mathbb{R} \right\}}_{(\phi=0)\text{-Bogen}} \subseteq \mathbb{S}^2.$$

Man kann ϕ und ϑ auch als Funktionen $U \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten:

$$\vartheta(x, y, z) := \arccos(z), \quad \phi(x, y, z) := \begin{cases} \arccot(x/y) & \text{für } y > 0 \\ \pi & \text{für } y = 0 \\ \pi + \arccot(x/y) & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

Die Funktionen ϑ und ϕ sind glatte Funktionen auf U , ϕ lässt sich *nicht* auf $\mathbb{S}^2$ fortsetzen, aber ϑ lässt sich stetig auf $\mathbb{S}^2$ fortsetzen, ist aber am Nord- und Südpol nicht mehr differenzierbar. Aber $\cos(\vartheta(x, y, z)) = z$ ist glatt auf $\mathbb{S}^2$.

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 28.04.

1.3.4 Vektorfelder

28.4.

Definition 1.26. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit, $r \in \mathbb{N}_0$. Ein C^r -**Vektorfeld** auf M oder einfach ein **Vektorfeld** auf M ist eine C^r -Abbildung

$$M \xrightarrow{X} \mathbb{R}^k, \quad p \mapsto X|_p$$

mit $X|_p \in T_p M$ für alle $p \in M$.

Wird nichts zur Regularität eines Vektorfeldes gesagt, so meint man zumeist ein glattes Vektorfeld. Die Menge aller (glatten) Vektorfelder auf M wird mit $\mathfrak{X}(M)$ bezeichnet.

Im Spezialfall $m = k$, das heißt wenn M eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^k$ ist, ergibt diese Definition den in [Analysis III](#), Kapitel I, Abschnitt 1.2 verwendeten Begriff eines Vektorfeldes.

Beispiel 1.27. Ist $\Phi: V \rightarrow M^m \subset \mathbb{R}^k$ eine Parametrisierung und $\varphi := \Phi^{-1}: U := \Phi(V) \rightarrow V$ eine Karte. Dann definiere für $1 \leq i \leq m$ die Vektorfelder

$$\mathcal{X}_i^\varphi: M \supset U \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$p \mapsto \underbrace{\Phi'(\varphi(p))}_{\in \mathbb{R}^{k \times m}} \cdot e_i \in T_p M$$

wobei $e_1, \dots, e_m$ die Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^m$ sind. Da U offen in M ist, ist U eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$ und es gilt $\mathcal{X}_i^\varphi \in \mathfrak{X}(U)$.

Die Matrix $\Phi'(\varphi(p)) \in \mathbb{R}^{k \times m}$ hat Rang m , also ist $(\mathcal{X}_1^\varphi|_p, \dots, \mathcal{X}_m^\varphi|_p)$ eine Basis von $T_p M = T_p U$. Man nennt $\mathcal{X}_i^\varphi$ das i -te **Koordinatenvektorfeld**. Wenn klar ist, welche Karte zu verwenden ist, wird oft auch einfach $\mathcal{X}_i$ geschrieben. Man schreibt auch oft $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}|_p$ an Stelle von $\mathcal{X}_i^\varphi|_p$. Die Schreibweise des Koordinatenvektorfelds als partielle Ableitung wird in Abschnitt 1.7 in der Erklärung nach Gleichung (1.12) begründet. In unserer Vorlesung nutzen wir zunächst die Notation $\mathcal{X}_i^\varphi|_p$, und dann später – wenn wir den Bezug zu partiellen Ableitungen verstanden haben – die Notation $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}|_p$.

Beispiel 1.28 (Fortsetzung von Beispiel 1.25). (Siehe auch Abbildung 1.14). Rechne

$$\Phi'(\phi, \vartheta) = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \sin(\vartheta) & \cos(\phi) \cos(\vartheta) \\ \cos(\phi) \sin(\vartheta) & \sin(\phi) \cos(\vartheta) \\ 0 & -\sin(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Dann haben wir

$$\mathcal{X}_1^{\Phi^{-1}}|_{\Phi(\phi, \vartheta)} = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \sin(\vartheta) \\ \cos(\phi) \sin(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathcal{X}_2^{\Phi^{-1}}|_{\Phi(\phi, \vartheta)} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \cos(\vartheta) \\ \sin(\phi) \cos(\vartheta) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Im Sinne einer besseren Anschauung ist es oft sinnvoll, bei der $\mathbb{S}^2$ an unseren Erdglobus zu denken und die zugehörigen Begrifflichkeiten zu benutzen. Auch dieser wird ja durch Karten erfasst, die zu einem Atlas zusammengefasst werden. Die ϕ -Koordinate ist dann der Längengrad (in mathematischen Einheiten $\phi \in [0, 2\pi]$ statt $\phi \in [0, 360^\circ]$) und die ϑ -Komponente ist $\pi/2$ minus Breitengrad auf der Nordhalbkugel. Das Vektorfeld $\mathcal{X}_1^{\Phi^{-1}}$ ist tangential an die Breitenkreise nach Osten orientiert, und das Vektorfeld $\mathcal{X}_2^{\Phi^{-1}}$ tangential an die Längengrade nach Süden orientiert. Beachte $\|\mathcal{X}_1^{\Phi^{-1}}\| = \sin(\vartheta)$ und $\|\mathcal{X}_2^{\Phi^{-1}}\| = 1$.

Proposition 1.29 (Koordinatenvektorfelder unter Kartenwechsel). *Sei $M^m \subset \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit.*

Sind $\varphi: M \supset U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ und $\psi: M \supset W \rightarrow Z \subset \mathbb{R}^m$ Karten von M , so gilt für $p \in U \cap W$:

$$\mathcal{X}_i^\varphi|_p = \sum_{j=1}^m \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})^j}{\partial x^i}|_{\varphi(p)} \cdot \mathcal{X}_j^\psi|_p.$$

Merkregel: identifiziere $\varphi^i = x^i$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \psi^j}{\partial \varphi^i} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi^j}.$$

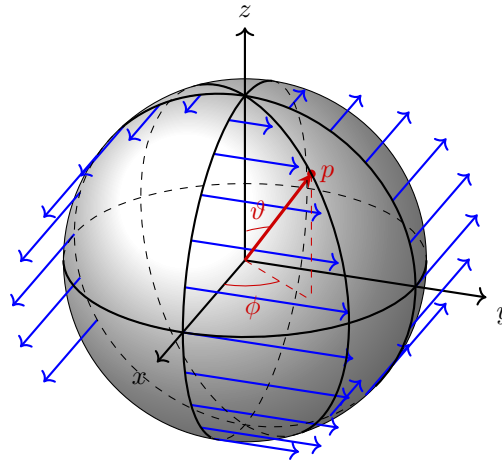


Abbildung 1.14: Das Vektorfeld $\mathcal{X}_1^{\Phi^{-1}}$ auf der 2-Sphäre

Man kann also $\partial\psi^j$ „wegkürzen“.

Schreibweise: für die Ableitung der Funktion f an der Stelle p schreiben wir zwecks besserer Übersichtlichkeit oben und im folgenden $f'|_p$ statt dem sonst üblichen $f'(p)$.

Beweis: Rechne $\underbrace{(\psi \circ \varphi^{-1})'}_{\in \mathbb{R}^{m \times m}} \Big|_{\varphi(p)} \cdot e_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})^j}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} e_j$

Definiere $a_i^j|_p := \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})^j}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)}$. Die Abbildung $\Psi := \psi^{-1}: Z \longrightarrow W \subseteq M \subset \mathbb{R}^k$ ist eine lokale Parametrisierung.

Rechne für $p \in U \cap W$:¹⁴

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_i^\varphi|_p &= (\varphi^{-1})' \Big|_{\varphi(p)} \cdot e_i = (\psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi^{-1})' \Big|_{\varphi(p)} \cdot e_i = (\psi^{-1})' \Big|_{\psi(p)} \cdot (\psi \circ \varphi^{-1})' \Big|_{\varphi(p)} \cdot e_i \\ &= (\Psi)' \Big|_{\psi(p)} \cdot \sum_{j=1}^m a_i^j|_p e_j = \sum_{j=1}^m a_i^j|_p \underbrace{\Psi' \Big|_{\psi(p)} \cdot e_j}_{\mathcal{X}_j^\psi|_p}. \end{aligned}$$

■

1.4 Die Ableitung von Funktionen zwischen Untermannigfaltigkeiten

Definition 1.30. Seien $M^m \subset \mathbb{R}^k$, $N^n \subset \mathbb{R}^\ell$ Untermannigfaltigkeiten, $f \in \mathcal{C}^1(M, N)$ und $p \in N$. Dann definiere die **Ableitung** (oder das **Differential**) $d_p f: T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$ von f in p wie folgt:

Wähle $W \subseteq \mathbb{R}^k$ mit $p \in W$ und $F \in \mathcal{C}^1(W, \mathbb{R}^\ell)$ mit $F|_{W \cap M} = f|_{W \cap M}$. Dann definieren wir¹⁵

$$(d_p f)(X) := F'(p) \cdot X \quad \forall X \in T_p M.$$

Lemma 1.31. Für das in Definition 1.30 beschriebene $d_p f$ gilt:

¹⁴Matrizenprodukte sind mit $\cdot$ gekennzeichnet, dies gilt auch für Produkte von Matrizen mit Vektoren ($(n \times 1)$ -Matrizen). Produkte von Skalaren mit Vektoren ohne Punkt.

¹⁵Streng genommen ist dies noch keine Definition, denn es muss dafür zunächst die Wohldefiniertheit geprüft werden, siehe das folgende Lemma.

(i) Die Definition von $d_p f$ hängt nicht von der Wahl von W und F ab.

(ii) Es gilt $\text{im}(d_p f) \subset T_{f(p)}N$.

(iii) Ist $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ eine $\mathcal{C}^1$ -Kurve mit $c(0) = p$, so gilt $(d_p f)(\dot{c}(0)) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}(f \circ c)(t)$.

Aus (i) und (ii) folgt die Wohldefiniertheit von $d_p f$.

Beweis: Sei c wie in (iii), W und F wie in Definition 1.30. Wähle $\delta \in (0, \varepsilon]$ mit $c((-\delta, \delta)) \subset U := W \cap M$.

Nach Voraussetzung gilt $f \circ c = F \circ c \in \mathcal{C}^1((-\delta, \delta))$. Rechne

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(f \circ c)(t) = F'(p) \cdot \dot{c}(0).$$

Wir schreiben wieder $\dot{c}(t)$ für die Ableitung $c'(t)$ von c nach „der Zeit“ t . Die linke Seite ist unabhängig von F , also auch die rechte Seite. Da sich jeder Vektor in $T_p M$ als so eine Kurve $\dot{c}$ schreibt, folgt (i).

Außerdem gilt $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}(f \circ c)(t) = d_p f(\dot{c}(0))$, woraus (iii) folgt.

Beachte weiter: $f \circ c: (-\delta, \delta) \rightarrow N$ ist eine $\mathcal{C}^1$ -Kurve in N mit $(f \circ c)(0) = f(p)$. Das heißt $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}(f \circ c)(t) \in T_{f(p)}N$ nach Definition von $T_{f(p)}N$ und damit ist auch (ii) gezeigt. ■

Bemerkungen 1.32. (a) Im Fall $M \subseteq \mathbb{R}^k$ und $N \subseteq \mathbb{R}^\ell$, das heißt, wenn $m = k$ und $n = \ell$ ist diese Ableitung dasselbe wie die Ableitung der Analysis II.

(b) Ähnlich hierzu: ist $c: (a, b) \rightarrow N$ eine $\mathcal{C}^1$ -Abbildung, dann ist $c'(t) = d_t c(e_1)$. Mit der üblichen Identifizierung von linearen Abbildungen und Matrizen ist außerdem $d_t c(e_1) = d_t c$. Also $c'(t) = d_t c \in T_{c(t)}N \subset \mathbb{R}^\ell$ und wir schreiben für Kurven oft $\dot{c}(t)$ für $c'(t)$.

(c) Aus dem oben Gezeigten folgt direkt, dass die Kettenregel im folgenden Sinn gilt. Sind M , N , Q Untermannigfaltigkeiten und $f: M \rightarrow N$ und $g: N \rightarrow Q$ stetig differenzierbar, so ist auch $g \circ f$ stetig differenzierbar¹⁶, und es gilt:

$$d_p(g \circ f) = d_{f(p)}g \circ d_p f.$$

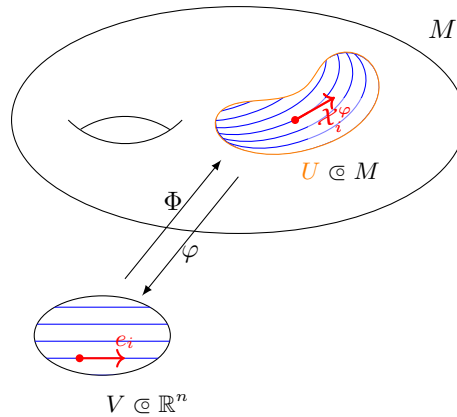
1.5 Erste Fundamentalform, Isometrien und Längenmessung

Sei $M^m \subset \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit, $\varphi: U \rightarrow V$ eine Karte von M , $p \in M$, $\Phi := \varphi^{-1}$ eine Parametrisierung und $T_p M \subset \mathbb{R}^k$ der Tangentialraum.

Dann gilt $\mathcal{X}_i^\varphi|_p = \Phi'(\varphi(p)) \cdot e_i = (d_{\varphi(p)}\Phi)(e_i)$.

Die Vektoren $\mathcal{X}_1^\varphi|_p, \dots, \mathcal{X}_m^\varphi|_p$ bilden eine Basis von $T_p M$.

¹⁶All dies würde auch für (total) differenzierbare Funktionen gelten, wenn wir unsere Definitionen allgemeiner gefasst hätten



Definition 1.33. Die Abbildung

$$g^M(p) := \langle \cdot, \cdot \rangle \big|_{T_p M \times T_p M} : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist bilinear und symmetrisch. Das heißt, es gilt

$$g^M(p) \in T_p^* M \otimes T_p^* M,$$

wobei $T_p^* M := (T_p M)^*$ der **Kotangententialraum** ist.

Die Abbildung

$$M \longrightarrow \bigcup_{p \in M} T_p^* M \otimes T_p^* M, \quad p \longmapsto g^M(p) =: g_p^M$$

heißt die **1. Fundamentalform** (kurz: 1. FF). Sie ist ein Beispiel einer Riemannschen Metrik auf M und misst die „innere Geometrie“.

Definiere weiter

$$g_{ij}^\varphi(x) := \left\langle \mathcal{X}_i^\varphi \big|_{\Phi(x)}, \mathcal{X}_j^\varphi \big|_{\Phi(x)} \right\rangle = \langle \Phi'(x) \cdot e_i, \Phi'(x) \cdot e_j \rangle \quad \forall x \in V.$$

Dann gilt

$$(g_{ij}^\varphi(x))_{i,j} = (\Phi'(x))^T \Phi'(x)$$

und $g_{ij}^\varphi \in C^\infty(V, \mathbb{R})$ heißt die **Koordinatendarstellung der 1. Fundamentalform**.

Offensichtlich gilt $g_{ij}^\varphi = g_{ji}^\varphi$.

Bemerkung. Kennt man die Funktionen $g_{ij} : V \longrightarrow \mathbb{R}$, so kennt man bereits die 1. Fundamentalform. Schreibe dazu $X, Y \in T_p M$ als $X = \sum_{j=1}^m X^j \mathcal{X}_j^\varphi$ und $Y = \sum_{k=1}^m Y^k \mathcal{X}_k^\varphi$, dann erhält man

$$\begin{aligned} g^M(p)(X, Y) &= \left\langle \sum_{j=1}^m X^j \mathcal{X}_j^\varphi, \sum_{k=1}^m Y^k \mathcal{X}_k^\varphi \right\rangle = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m X^j Y^k \langle \mathcal{X}_j^\varphi, \mathcal{X}_k^\varphi \rangle \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m X^j Y^k g_{jk}(p) \end{aligned}$$

Ist $c: [a, b] \rightarrow M$ eine Kurve, dann definieren wir die **Länge** von c :

$$\mathcal{L}(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{g_{c(t)}^M(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt$$

Beispiel 1.34 (Längen von Kurven in Koordinaten). Sei $\varphi: U \rightarrow V$ eine Karte von einer Untermannigfaltigkeit M^m und $c: [a, b] \rightarrow U$ eine $\mathcal{C}^1$ -Kurve. Definiere

$$\varphi \circ c(t) =: \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma^1(t) \\ \vdots \\ \gamma^m(t) \end{pmatrix}.$$

Man sieht dann

$$\dot{c}(t) = (d_{\gamma(t)}\varphi^{-1})\dot{\gamma}(t) = (d_{\gamma(t)}\varphi^{-1}) \left(\sum_{j=1}^m \dot{\gamma}^j(t) e_j \right) = \sum_{j=1}^m \dot{\gamma}^j(t) \mathcal{X}_j^\varphi|_{c(t)}.$$

Dann rechne

$$\begin{aligned} \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^m \dot{\gamma}^i(t) \mathcal{X}_i^\varphi|_{c(t)}, \sum_{j=1}^m \dot{\gamma}^j(t) \mathcal{X}_j^\varphi|_{c(t)} \right\rangle = \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) \\ \mathcal{L}(c) &= \int_a^b \sqrt{\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle} dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^m g_{ij}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t)} dt. \end{aligned}$$

Definition 1.35. Seien $(E_i, \langle \cdot, \cdot \rangle_i)$ für $i = 1, 2$ euklidische Vektorräume und $A: E_1 \rightarrow E_2$ linear. Dann heißt A **isometrisch**, falls gilt

$$\langle x, y \rangle_1 = \langle Ax, Ay \rangle_2 \quad \forall x, y \in E_1.$$

Die Abbildung A heißt **Isometrie**, falls A isometrisch und bijektiv ist.

(Beachte, dass eine isometrische Abbildung automatisch injektiv ist!)

Definition 1.36. Seien $M^m \subset \mathbb{R}^k, N^n \subset \mathbb{R}^\ell$ Untermannigfaltigkeiten und $f: M \rightarrow N$ sei in $\mathcal{C}^1$. Dann heißt f ein **lokaler $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus**, wenn für alle $p \in M$ die Abbildung $d_p f: T_p M \xrightarrow{\sim} T_{f(p)} N$ ein Isomorphismus ist. Dies ist äquivalent zur Forderung, dass für alle $p \in M$ eine offene Umgebung $p \in U \subset M$ existiert, so dass $f(U) \subset N$ offen ist und $f|_U: U \rightarrow f(U)$ ein Diffeomorphismus ist. (Dies impliziert $n = m$.)

f heißt **isometrisch**, wenn für alle $p \in M$ das Differential $d_p f$ isometrisch ist.

f heißt **lokale Isometrie**, wenn f isometrisch und ein lokaler Diffeomorphismus ist.¹⁷

f heißt **Isometrie**, falls $f: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus und isometrisch ist. (Dies impliziert $n = m$.)

Bemerkung. Ist $c: [a, b] \rightarrow M$ eine Kurve, $f: M \rightarrow N$ isometrisch, dann erfüllt die Länge von c :

$$\mathcal{L}(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{g_{c(t)}^M(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt = \int_a^b \sqrt{g_{f(c(t))}^N \left(\frac{d}{dt}(f \circ c)(t), \frac{d}{dt}(f \circ c)(t) \right)} dt$$

¹⁷Wir erlauben hier auch den äquivalent Sprachgebrauch „lokal ein Diffeomorphismus ist.“

$$= \mathcal{L}(f \circ c).$$

Beispiel 1.37. Sei¹⁸ $k \geq 2$ und $M := \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^k$. Offensichtlich ist M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$. Betrachte die Abbildung

$$f: M \longrightarrow f(M) =: N \subset \mathbb{R}^3$$

$$\mathbb{R}^k \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \\ y \end{pmatrix}$$

Wir nennen N einen Zylinder, siehe Abbildung 1.15.

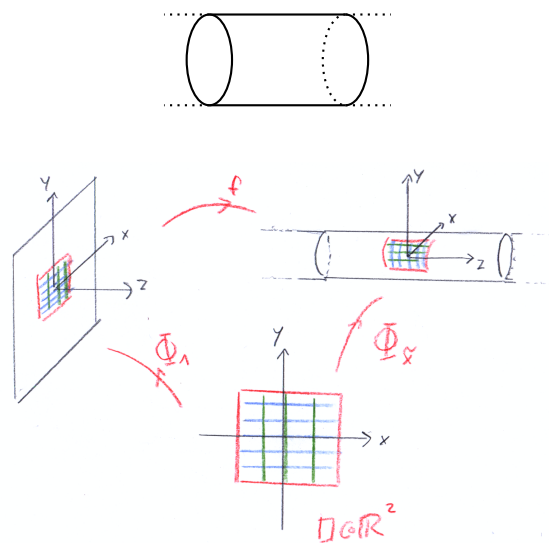


Abbildung 1.15: Zu Beispielen 1.37 und 1.40. Die Parametrisierungen sind zur leichteren Darstellbarkeit in der Abbildung auf einer kleineren Menge definiert als im Text.

Dann gilt $T_p M = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Wegen

$$f'((x, y, 0)) = \begin{pmatrix} -\sin(x) & 0 \\ \cos(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$T_{f((x, y, 0))} N = \left\{ t \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \\ 0 \end{pmatrix} + s e_3 \mid t, s \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \\ 0 \end{pmatrix}^\perp.$$

Die Spalten der Matrix $f'(p)$ sind orthonormal und bilden eine Basis von $T_{f(p)} N$. Dies bewirkt, dass die zugehörige lineare Abbildung isometrisch ist.¹⁹ Die Abbildung f ist deswegen isometrisch,

¹⁸Man denke am Besten an die Fälle $k = 2$ und $k = 3$.

¹⁹Dieser Schluss sollte aus der Linearen Algebra bekannt sein, wenn nicht, dann versuchen Sie es bitte zu beweisen.

und zwar sowohl, wenn wir sie als Abbildung $f : M \rightarrow N$ betrachten, als auch, wenn wir sie als Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ betrachten. Deswegen ist f eine lokale Isometrie von M auf N . Die Abbildung ist keine Isometrie von M auf N , da sie nicht injektiv ist.

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 05.05.

Lemma 1.38. Sei $f : M \rightarrow N$ ein lokaler Diffeomorphismus. Wähle $U \subseteq M$ so dass $f|_U$ injektiv ist und $\varphi : U \rightarrow V$ eine Karte ist, d.h. $f|_U : U \rightarrow f(U)$ ist ein Diffeomorphismus und $\tilde{\varphi} := \varphi \circ (f|_U)^{-1}$ ist eine Karte von N . Dann bildet df das Koordinatenvektorfeld $\mathcal{X}_i^\varphi$ auf $\mathcal{X}_i^{\tilde{\varphi}}$ ab:

$$\mathcal{X}_i^{\tilde{\varphi}}|_{f(p)} = d_p f \left(\mathcal{X}_i^\varphi|_p \right) \quad \forall p \in U.$$

Beweis: Man sieht

$$\mathcal{X}_i^{\tilde{\varphi}}|_{f(p)} = d_{\varphi(p)} (\tilde{\varphi}^{-1}) (e_i) = d_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1})(e_i) \stackrel{\text{Kettenr.}}{=} (d_p f)(d_{\varphi(p)} \varphi^{-1})(e_i) = d_p f \left(\mathcal{X}_i^\varphi|_p \right).$$

■

Proposition 1.39. In obiger Notation gilt, dass $d_p f$ genau dann isometrisch ist, wenn für $x := \varphi(p)$ gilt

$$g_{ij}^\varphi(x) = g_{ij}^{\tilde{\varphi}}(x).$$

Das heißt $f|_U$ ist genau dann eine Isometrie, wenn $g_{ij}^\varphi = g_{ij}^{\tilde{\varphi}}$.

Beweis: Rechne mit $x = \varphi(p)$, $p \in U$, $x \in V$.

„ $\Rightarrow$ “:

$$\begin{aligned} g_{ij}^{\tilde{\varphi}}(x) &= \left\langle \mathcal{X}_i^{\tilde{\varphi}}|_{\tilde{\varphi}^{-1}(x)}, \mathcal{X}_j^{\tilde{\varphi}}|_{\tilde{\varphi}^{-1}(x)} \right\rangle = \left\langle \mathcal{X}_i^{\tilde{\varphi}}|_{f(p)}, \mathcal{X}_j^{\tilde{\varphi}}|_{f(p)} \right\rangle \\ &\stackrel{\text{Lemma}}{=} \left\langle d_p f \left(\mathcal{X}_i^\varphi|_p \right), d_p f \left(\mathcal{X}_j^\varphi|_p \right) \right\rangle \stackrel{\text{Vor.}}{=} \left\langle \mathcal{X}_i^\varphi|_p, \mathcal{X}_j^\varphi|_p \right\rangle = g_{ij}^\varphi(x). \end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “: Schreibe $Y, Z \in T_p M$ als $Y = \sum_{i=1}^m Y^i \mathcal{X}_i^\varphi|_p$ und $Z = \sum_{j=1}^m Z^j \mathcal{X}_j^\varphi|_p$. Dann rechne

$$\begin{aligned} \langle d_p f(Y), d_p f(Z) \rangle &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m Y^i Z^j \left\langle d_p f \left(\mathcal{X}_i^\varphi|_p \right), d_p f \left(\mathcal{X}_j^\varphi|_p \right) \right\rangle \\ &\stackrel{\text{Lemma}}{=} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m Y^i Z^j \left\langle \mathcal{X}_i^{\tilde{\varphi}}|_{f(p)}, \mathcal{X}_j^{\tilde{\varphi}}|_{f(p)} \right\rangle \\ &= \sum_{i,j} Y^i Z^j g_{ij}^{\tilde{\varphi}}(x) \stackrel{\text{Vor.}}{=} \sum_{i,j} Y^i Z^j g_{ij}^\varphi(x) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m Y^i Z^j \left\langle \mathcal{X}_i^\varphi|_p, \mathcal{X}_j^\varphi|_p \right\rangle = \langle Y, Z \rangle. \end{aligned}$$

Also ist $d_p f$ isometrisch. ■

Beispiel 1.40 (Fortsetzung von Beispiel 1.37, Beispiel zu Proposition 1.39). Sei $k \geq 2$ und $M := \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit, siehe nochmals Abbildung 1.15. Betrachte die Abbildung

$$f: M \longrightarrow f(M) =: N \subset \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \\ y \end{pmatrix}$$

Wähle die Parametrisierung

$$\Phi_1: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^k, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

von M . Dann gilt $\mathcal{X}_1^{\Phi_1^{-1}} = e_1$ und $\mathcal{X}_2^{\Phi_1^{-1}} = e_2$, das heißt es gilt $g_{ij}^{\Phi_1^{-1}} = \delta_{ij}$, wobei δ_{ij} das Kronecker-Symbol bezeichnet, d. h. $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$.

Sei nun $\Phi_{\tilde{x}} := f \circ \Phi_1|_{(\tilde{x}, \tilde{x}+2\pi) \times \mathbb{R}}$ eine Parametrisierung von N . Rechne

$$\Phi_{\tilde{x}}(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(x) & 0 \\ \cos(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das heißt $g_{ij}^{\Phi_{\tilde{x}}^{-1}} = \delta_{ij}$. Damit haben wir nochmals gezeigt, dass f eine lokale Isometrie ist.

Einschub: Abzählbare Basis der Topologie

Erinnerung 1.41. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, das heißt $\mathcal{O}_X$ ist eine Topologie auf X . Eine **Basis der Topologie** ist eine Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}_X$, so dass für alle $U \in \mathcal{O}_X$ eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ existiert mit $U = \bigcup_{V \in \mathcal{A}} V$. Besitzt die Topologie $\mathcal{O}_X$ von X eine abzählbare Basis, so sagt man auch, dass $(X, \mathcal{O}_X)$ **das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt**.

Beispiel 1.42. Eine Basis der Standardtopologie $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ auf $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch das Mengensystem

$$\mathcal{B} := \left\{ B_r(x) \mid x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

Aber auch das Mengensystem

$$\mathcal{B}_{\mathbb{Q}} = \left\{ B_r(x) \mid x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}^+ \right\}$$

ist eine Basis von $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$.

Dabei hat $\mathcal{B}$ die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ (das heißt es existiert eine Bijektion $\mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$), aber $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}$ ist abzählbar. Das heißt $\mathbb{R}^n$ mit der Standardtopologie besitzt eine *abzählbare* Basis, es erfüllt also das 2. Abzählbarkeitsaxiom.

Bemerkung 1.43. Ist $\mathcal{B}$ eine Basis eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O}_X)$ und $Y \subset X$ habe die Teilraumtopologie $\mathcal{O}_Y$, dann ist $\mathcal{B}_Y := \{V \cap Y \mid V \in \mathcal{B}\}$ eine Basis von $\mathcal{O}_Y$.

Lemma 1.44. Ist $M^m \subset \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit, so besitzt M eine abzählbare Basis der Topologie.

Beweis: Aus den obigen Überlegungen folgt, dass jeder topologische Unterraum von $\mathbb{R}^k$ (d. h. jede Teilmenge von $\mathbb{R}^k$ mit der von $\mathbb{R}^k$ induzierten Topologie) eine abzählbare Basis der Topologie besitzt. Somit auch alle Untermannigfaltigkeiten. ■

Korollar 1.45. Sei $\{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ ein Atlas einer Untermannigfaltigkeit M , dann gibt es eine abzählbare Teilmenge $J \subset I$ so dass $M = \bigcup_{j \in J} U_j$. Insbesondere ist $\{\varphi_j: U_j \rightarrow V_j\}_{j \in J}$ ein abzählbarer (Teil-)Atlas von M .

Beweis: Sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis der Topologie von M . Dann setze

$$\mathcal{B}' := \left\{ U \in \mathcal{B} \mid \exists i \in I: U \subset U_i \right\}.$$

Nun ist $\mathcal{B}'$ auch eine Basis der Topologie auf M .

Begründung: Für jedes $U \in \mathcal{B}$ und jedes $i \in I$ ist $U \cap U_i$ eine offene Teilmenge von M . Da $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie ist, gibt es hierzu ein Mengensystem $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{B}$, so dass

$$U \cap U_i = \bigcup_{V \in \mathcal{A}_i} V.$$

Dann gilt sogar $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{B}'$. Weiter gilt

$$U = \bigcup_{i \in I} (U \cap U_i) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{V \in \mathcal{A}_i} V = \bigcup_{V \in \mathcal{A}} V$$

mit $\mathcal{A} := \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i \subset \mathcal{B}'$.

Wähle zu jedem $U \in \mathcal{B}'$ ein $i_U \in I$ mit $U \subset U_{i_U}$ und setze $J := \{i_U \mid U \in \mathcal{B}'\}$. Da $\mathcal{B}$ abzählbar ist, ist auch $\mathcal{B}'$ abzählbar und somit auch J . Aus

$$M \supset \bigcup_{j \in J} U_j = \bigcup_{U \in \mathcal{B}'} U_{i_U} \supset \bigcup_{U \in \mathcal{B}'} U = M$$

folgt $M = \bigcup_{j \in J} U_j$ und damit die Behauptung. ■

1.6 Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Erinnerung (Aus Analysis III). $\mathbb{R}^m$ ist ein topologischer Raum. Die von der Topologie erzeugte σ -Algebra ist die Borel-Algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$ mit den Borel-messbaren Mengen als Elementen. Vervollständigt man diese bzgl. des Lebesguemaßes λ_m , so erhalten wir die Lebesguesche σ -Algebra $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^m}$, deren Elemente wir als die Lebesgue-messbaren Mengen bezeichnen. Lebesgue-messbare Mengen unterscheiden sich von einer Borel-messbaren Mengen nur um eine Nullmenge.

Ist $\varphi: \mathbb{R}^m \ni U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ ein Diffeomorphismus, dann ist es auch ein Homöomorphismus und bildet ist $A \subset U$ genau dann Borel-messbar, wenn $\varphi(A) \subset V$ Borel-messbar ist. Auf Grund der Maßtransformationsformel ([Analysis III](#), Kapitel II, Satz 7.2) bilden φ und φ^{-1} Nullmengen auf

Nullmengen ab. Deswegen ist $A \subset U$ in $\mathbb{R}^m$ genau dann Lebesgue-messbar, wenn $\varphi(A) \subset V$ Lebesgue-messbar ist. Ab jetzt bezeichnet der Begriff „messbar“ immer die Messbarkeit im Sinne von „Lebesgue-messbar“.

Definition 1.46. Sei M^m eine Untermannigfaltigkeit und $\{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i \mid i \in I\}$ ein Atlas. Es heißt $A \subset M$ eine **messbare Menge**, wenn eine der äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Für alle Karten $\varphi: U \rightarrow V$ gilt $\varphi(A \cap U) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^m}$.
- (ii) Für alle $i \in I$ gilt $\varphi_i(A \cap U_i) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^m}$.

Beweis der Äquivalenz: „(i) $\implies$ (ii)“: Klar.

„(ii) $\implies$ (i)“: Sei $\varphi: U \rightarrow V$ eine Karte. Es ist zu zeigen, dass $\varphi(A \cap U) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^m}$.

Nach Korollar 1.45 besitzt der Atlas $\{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i \mid i \in I\}$ einen abzählbaren Teil-Atlas $\{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i \mid i \in J\}$, $J \subset I$. Insbesondere $\bigcup_{i \in J} U_i = M$. Es gilt also

$$A \cap U = A \cap U \cap \left(\bigcup_{i \in J} U_i \right) = \bigcup_{i \in J} (A \cap U \cap U_i).$$

Nun gilt

$$\varphi(A \cap U) = \bigcup_{i \in J} \underbrace{\left(\varphi \circ \varphi_i^{-1} \Big|_{\varphi_i(U \cap U_i)} \right)}_{\text{Diffeomorphismus}} \underbrace{\left(\underbrace{\varphi_i(A \cap U_i)}_{\text{messbar nach (ii)}} \cap \underbrace{\varphi_i(U \cap U_i)}_{\text{messbar, da offen}} \right)}_{\text{messbar, siehe Erinnerung}}.$$

Also ist die Menge $\varphi(A \cap U)$ messbar. ■

Man überprüft leicht: die messbaren Mengen bilden eine σ -Algebra auf M . Insbesondere gilt dann für eine Funktion $f: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$: sei hierfür ein Atlas $\{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i \mid i \in I\}$ von M gegeben.

- f ist messbar
- $\iff$ für alle Karten $\varphi: U \rightarrow V$ ist $f \circ \varphi^{-1}: V \rightarrow \mathbb{R}$ messbar
- $\iff$ für alle $i \in I$ ist $f \circ \varphi_i^{-1}: V_i \rightarrow \mathbb{R}$ messbar

Satz 1.47 (Transformationsformel). Seien $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$, sei $\beta: V_2 \rightarrow V_1$ ein C^1 -Diffeomorphismus.

vgl. Analysis III, Kapitel II, Satz 7.1

- (1) Für messbare Funktionen $F: V_1 \xrightarrow{0, \infty}$ gilt

$$\int_{V_1} F \, d\lambda_n = \int_{V_2} (F \circ \beta) \cdot |\det \beta'| \, d\lambda_n \quad (1.2)$$

In anderen Worten:

$$\int_{V_1} F(y) \, dy = \int_{V_2} (F \circ \beta)(x) \cdot |\det \beta'(x)| \, dx. \quad (1.3)$$

- (2) Eine Funktion $F: V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn $(F \circ \beta) \cdot |\det \beta'|: V_2 \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist. In diesem Fall gilt ebenfalls (1.2) bzw. (1.3).

Notation: $J_x \beta = \beta'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \beta_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \beta_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \beta_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$ Jacobi-Matrix von β an der Stelle x .

Proposition 1.48. Seien $\varphi_a: U_a \rightarrow V_a$ (für $a = 1, 2$) Karten von M^m .

(1) Für messbare Funktionen $f: U_1 \cap U_2 \xrightarrow{0, \infty}$ gilt:

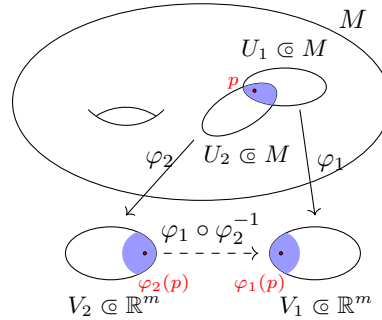
$$\int_{\varphi_1(U_1 \cap U_2)} (f \circ \varphi_1^{-1}) \sqrt{\det(g_{ij}^{\varphi_1}(\bullet))}_{ij} d\lambda_m = \int_{\varphi_2(U_1 \cap U_2)} (f \circ \varphi_2^{-1}) \sqrt{\det(g_{ij}^{\varphi_2}(\bullet))}_{ij} d\lambda_m. \quad (1.4)$$

(2) Für messbare Funktionen $f: U_1 \cap U_2 \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: ist der Integrand der rechten oder linken Seite von (1.4) integrierbar, so auch der Integrand der anderen Seite und es gilt wiederum (1.4).

Beweis: Man kann annehmen, dass $U := U_1 = U_2$ gilt, denn sonst schränke φ_1 und φ_2 auf $U_1 \cap U_2$ ein und fahre mit $U_1 \cap U_2$ an Stelle von U_1 und U_2 fort.

Die positive Definitheit und Symmetrie des Skalarprodukts impliziert, dass die Matrix $(g_{ij}^{\varphi_1}(x))_{ij}$ positiv definit ist. Also ist $\det(g_{ij}^{\varphi_1}(\bullet)) > 0$ und damit der Ausdruck wohldefiniert. Analog gilt $\det(g_{ij}^{\varphi_2}(\bullet)) > 0$.

Ein solches Bild sollte man sich eigentlich fast immer vorstellen oder aufmalen, wenn man eine Aussage zu einem Kartenwechsel verstehen oder beweisen will.



Nach Proposition 1.29 gilt für $p \in U$:

$$\mathcal{X}_i^{\varphi_2}|_p = \sum_{\ell=1}^m \frac{\partial(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})^\ell}{\partial x^i} \Big|_{\varphi_2(p)} \mathcal{X}_\ell^{\varphi_1}|_p$$

und damit

$$g_{ij}^{\varphi_2}(\varphi_2(p)) = \left\langle \mathcal{X}_i^{\varphi_2}|_p, \mathcal{X}_j^{\varphi_2}|_p \right\rangle = \sum_{\ell, r=1}^m \frac{\partial(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})^\ell}{\partial x^i} \Big|_{\varphi_2(p)} \frac{\partial(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})^r}{\partial x^j} \Big|_{\varphi_2(p)} \underbrace{\left\langle \mathcal{X}_\ell^{\varphi_1}|_p, \mathcal{X}_r^{\varphi_1}|_p \right\rangle}_{=g_{\ell r}^{\varphi_1}(\varphi_1(p))}.$$

Wenn man dies in Matrizenform schreibt, so erhält man

$$(g_{ij}^{\varphi_2}(\varphi_2(p)))_{ij} = (J_{\varphi_2(p)}(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}))^T (g_{\ell r}^{\varphi_1}(\varphi_1(p)))_{\ell r} J_{\varphi_2(p)}(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}),$$

wobei $J_y f$ die Jacobi-Matrix von f an der Stelle y bezeichnet. Also gilt

$$\det((g_{ij}^{\varphi_2}(\varphi_2(p)))_{i,j}) = (\det(J_{\varphi_2(p)}(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})))^2 \det((g_{ij}^{\varphi_1}(\varphi_1(p)))_{i,j})$$

und somit

$$\sqrt{\det((g_{ij}^{\varphi_2}(x))_{i,j})} = |\det(J_x(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}))| \sqrt{\det((g_{ij}^{\varphi_1}(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(x)))_{i,j})} \quad (1.5)$$

für alle $x \in V_2$.

Wir betrachten zunächst den Fall einer nicht-negativen numerischen Funktion f , das heißt den zu beweisenden Fall (1). Wir wenden hierzu die Transformationsformel (Satz 1.47, Teil (1)) für $F = (f \circ \varphi_1^{-1}) \sqrt{\det(g_{ij}^{\varphi_1}(\bullet))_{ij}}$ und $\beta := \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ an:

$$\begin{aligned} & \int_{\varphi_1(U)} (f \circ \varphi_1^{-1}) \cdot \sqrt{\det(g_{ij}^{\varphi_1}(\bullet))_{ij}} d\lambda_m \\ \stackrel{\text{Def. } F}{=} & \int_{\varphi_1(U)} F d\lambda_m \\ \stackrel{\text{Trafo}}{=} & \int_{\varphi_2(U)} F \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}) \cdot |\det(J(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}))| d\lambda_m \\ \stackrel{\text{Def. } F}{=} & \int_{\varphi_2(U)} (f \circ \varphi_2^{-1}) \cdot \sqrt{\det(g_{ij}^{\varphi_1} \circ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\bullet))_{ij}} \cdot |\det(J(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}))| d\lambda_m \\ \stackrel{(1.5)}{=} & \int_{\varphi_2(U)} (f \circ \varphi_2^{-1}) \cdot \sqrt{\det(g_{ij}^{\varphi_2}(\bullet))_{ij}} d\lambda_m. \end{aligned}$$

Dies beweist Aussagenteil (1). Der andere Aussagenteil (2) folgt ganz ähnlich, indem wir Teil (2) in der Transformationsformel 1.47 statt Teil (1) nutzen. ■

Lemma 1.49. Sei M^m eine Untermannigfaltigkeit. Sei weiter $\mathcal{A} := \{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i \mid i \in I\}$ ein Atlas. Dann gibt es eine abzählbare Teilmenge $J \subset I$ und messbare Teilmengen $A_j \subset U_j$ (mit $j \in J$) mit $M = \dot{\bigcup}_{j \in J} A_j$.

Hierbei bezeichnet $\dot{\bigcup}_{j \in J}$ die disjunkte Verwiningung, das heißt es gilt $M = \bigcup_{j \in J} A_j$ und die A_j sind paarweise disjunkt.

Beweis: Wähle mit Korollar 1.45 einen abzählbaren Teilatlas $\mathcal{A}' = \{U_j \xrightarrow{\varphi_j} V_j\}_{j \in J}$ von $\mathcal{A}$. O.B.d.A. können wir $J = \mathbb{N}$ oder $J = \{1, \dots, \ell\} \subset \mathbb{N}$ annehmen. Definiere

$$A_1 := U_1, \quad A_2 := U_2 \setminus A_1, \quad A_q := \begin{cases} U_q \setminus \bigcup_{i=1}^{q-1} A_i & \text{falls } q \leq \ell \\ \emptyset & q > \ell \text{ oder } J = \mathbb{N} \end{cases}$$

Man sieht leicht, dass alle A_i messbar sind und das Gewünschte erfüllen. ■

Definition 1.50. Wir nutzen die Notation von Lemma 1.49.

(1) Angenommen $f: M \xrightarrow{0,\infty}$ ist messbar, so definieren wir

$$\int_{A_j} f d\mu^\varphi := \int_{\varphi_j(A_j)} (f \circ \varphi_j^{-1}) \sqrt{\det(g_{rs}^{\varphi_j}(\bullet))_{rs}} d\lambda_m \in [0, \infty] \quad (1.6)$$

und dann

$$\int_M f \, d\mu^M := \sum_{j \in J} \int_{A_j} f \, d\mu^\varphi \in [0, \infty]. \quad (1.7)$$

Es folgt dann unmittelbar aus Proposition 1.48, dass der Wert von $\int_A f \, d\mu^M$ weder davon abhängt, wie wir M als disjunkte Vereinigung der A_j schreiben, noch davon, welchen Atlas wir benutzen. Siehe hierzu auch Lemma 1.51.

- (2) Wir nennen nun eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ **integrierbar**, wenn $\int_M |f| \, d\mu^M < \infty$ und dann setzen wir

$$\int_M f \, d\mu^M := \int_M \max\{f, 0\} \, d\mu^M - \int_M \max\{-f, 0\} \, d\mu^M \in \mathbb{R}.$$

- (3) Ist B eine messbare Teilmenge von M , so definieren wir

$$\int_B f \, d\mu^M := \int_M \chi_B f \, d\mu^M.$$

Hierdurch wird im nicht-negativen numerischen Fall eine Zahl in $[0, \infty]$ definiert, im reellen Fall die Bedeutung von „ f ist auf B integrierbar“ oder äquivalent „ $f|_B$ ist integrierbar“ und im Falle der Integrierbarkeit eine Zahl in $\mathbb{R}$.

- (4) Für eine messbare Teilmenge B von M definieren wir das m -dimensionale **Volumen** von $B \subset M$.

$$\mu^M(B) := \sum_{j \in J} \int_{\varphi_j(B \cap A_j)} \sqrt{\det(g_{rs}^{\varphi_j}(\bullet))_{rs}} \, d\lambda_m \in [0, \infty]. \quad (1.8)$$

Es folgt wiederum unmittelbar aus Proposition 1.48, dass der Wert von $\mu^M(B)$ weder davon abhängt, wie wir M als disjunkte Vereinigung der A_j schreiben, noch davon, welchen Atlas wir benutzen. Siehe hierzu auch Bemerkungen 1.52.

Lemma 1.51. Sei M eine Untermannigfaltigkeit und $f: M \xrightarrow{0, \infty}$ messbar. Dann ist $\int_M f \, d\mu^M$ unabhängig von der Wahl dem Atlanten $\mathcal{A}$, dem Teil-Atlanten $\mathcal{A}'$ und der Zerlegung in A_j .

Beweis: Schreibe wieder $M = \dot{\bigcup}_{i \in J} A_i$ mit $J \subset I$ abzählbar, $\mathcal{A} = \{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ und messbaren $A_i \subset U_i$.

Schreibe andererseits $M = \dot{\bigcup}_{j \in \tilde{J}} B_j$ mit $\tilde{J} \subset \tilde{I}$ abzählbar und $\tilde{\mathcal{A}} = \{\psi_j: W_j \rightarrow Z_j\}_{j \in \tilde{I}}$ mit messbaren $B_j \subset W_j$.

Für $(i, j) \in J \times \tilde{J}$ gilt $A_i \cap B_j \subset U_i \cap W_j$, also gilt nach Proposition 1.48:

$$\int_{A_i} \chi_{A_i \cap B_j} f \, d\mu^{\varphi_i} = \int_{B_j} \chi_{A_i \cap B_j} f \, d\mu^{\psi_j}$$

Rechne also:

$$\sum_{i \in J} \int_{A_i} f \, d\mu^{\varphi_i} = \sum_{i \in J} \int_{A_i} \underbrace{\left(\sum_{j \in \tilde{J}} \chi_{A_i \cap B_j} \right)}_{\chi_{A_i}} f \, d\mu^{\varphi_i}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \in J} \sum_{j \in \tilde{J}} \int_{A_i} \chi_{A_i \cap B_j} f \, d\mu^{\varphi_i} \\
&= \sum_{j \in \tilde{J}} \sum_{i \in J} \int_{B_j} \chi_{A_i \cap B_j} f \, d\mu^{\psi_j} \\
&= \sum_{j \in \tilde{J}} \int_{B_j} f \, d\mu^{\psi_j}
\end{aligned}$$

■

Bemerkungen 1.52. (a) Man kann einfach zeigen, dass die in Definition 1.50 (4) definierte Abbildung μ^M ein Maß auf der σ -Algebra der messbaren Teilmengen von M ist. Außerdem folgt direkt daraus

$$\mu^M(B) = \int_B 1 \, d\mu^M,$$

wobei die rechte Seite der in Definition 1.50 (1) definierte Ausdruck ist. Mit Lemma 1.51 folgt dann die Unabhängigkeit von den getroffenen Wahlen.

- (b) Man kann nun ganz leicht überprüfen, dass das in Analysis III definierte Integral sowohl im nicht-negativen numerischen Fall als auch im reellen Fall dieselbe Bedeutung für das Integral $\int_M f \, d\mu^M$ wie in Definition 1.50 (1) ergibt. Im Vorgriff auf diese Tatsache, haben wir den Ausdruck in Definition 1.50 (1) bereits so genannt²⁰.

8.5.

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 08.05.

Eigenschaften 1.53. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit und $\{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ ein Atlas von M . Wähle $A_i \subset U_i$ messbar mit $M = \bigcup_{i \in I} A_i$ und $A_i \neq \emptyset$ gilt für abzählbar²¹ viele $i \in I$.

- (i) Sei $\mathcal{M}(M) := \{A \in M \mid A \text{ messbar}\}$. Dann ist $\mathcal{M}(M)$ eine σ -Algebra auf M , und μ^M ist ein vollständiges Maß auf $\mathcal{M}(M)$. Wir nennen $\mu^M(M)$ das **m -dimensionale Volumen** von M und schreiben hierfür $\text{vol}_m(M)$ oder einfach $\text{vol}(M)$.
- (ii) $\mathcal{M}(M)$ ist die Vervollständigung von der Borel-Algebra $\mathcal{B}_M$ von M bzgl. μ^M .
- (iii) Sei $A \subset M$. Dann ist A genau dann eine μ^M -Nullmenge, wenn für alle $i \in I$ die Menge $\varphi_i(A \cap U_i) \subset \mathbb{R}^m$ eine Nullmenge ist.
- (iv) Ist $N^n \subset \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit mit $N^n \subset M^m$ und $n < m$. Dann ist N eine Nullmenge in M .
Beispiel: Seien Untermannigfaltigkeiten $N^1 \subset M^2 \subset \mathbb{R}^3$ gegeben. Dann ist N eine Nullmenge in M und in $\mathbb{R}^3$ und M ist eine Nullmenge in $\mathbb{R}^3$, aber M ist keine Nullmenge in M .
- (v) Eine messbare Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ist Lebesgue-integrierbar, wenn
 - (a) Für alle $i \in I$ gilt

$$s_i := \int_{\varphi_i(A_i)} |f \circ \varphi_i^{-1}| \sqrt{\det(g_{ij}^{\varphi_i}(\cdot))} \, d\lambda_m < \infty.$$

²⁰Wer dies logisch verwirrend findet, soll bitte im meinem Skript Analysis IV vom Sommersemester 2015 nachschauen. Dort ist zunächst nur das Maß μ^M definiert und das Integral dann wie in Analysis III definiert. Der didaktische Vorteil des Vorgehens in der aktuellen Vorlesung ist, dass die für konkrete Berechnungen ganz wichtigen Formeln 1.6 und 1.7 bereits als Definition sichtbar sind.

²¹„abzählbar“ ist hier im Sinne von „abzählbar unendlich“ oder „endlich“

(b) $\sum_{i \in I} s_i < \infty$.

Ist f Lebesgue-integrierbar, dann gilt

$$\int_M f \, d\mu^M = \sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(A_i)} (f \circ \varphi_i^{-1}) \sqrt{\det(g_{rs}^{\varphi_i}(\bullet))}_{rs} \, d\lambda_m.$$

wobei die Reihe wegen (b) absolut konvergiert.

(vi) Ist $N^m \subset \mathbb{R}^\ell$ eine Untermannigfaltigkeit und $h: N \rightarrow M$ eine Isometrie. Dann ist $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn $f \circ h: N \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_M f \, d\mu^M = \int_N (f \circ h) \, d\mu^N.$$

(vii) Ist $\mathcal{L}^1(M)$ der Vektorraum der integrierbaren Funktionen $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist die Abbildung

$$\mathcal{L}^1(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_M f \, d\mu^M$$

linear ([Analysis III](#), Kapitel [II](#), Proposition [4.10](#)) und monoton ([Analysis III](#), Kapitel [II](#), Eigenschaften [4.11](#)) und erfüllt auch die übrigen in diesem Umfeld genannten Eigenschaften eines Integrals.

(viii) Ist M eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^k$, so ist das Integral das bereits bekannte Lebesgue-Integral aus [Analysis III](#).

Beweis: „(iv)“: Siehe [Übungsblatt 4, Aufgabe 4](#)

„Rest“: Leichte Übung! ■

Beispiel 1.54. Sei $c: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine glatte Kurve und $\dot{c}(t) \neq 0$ für alle $t \in (a, b)$. (Solche Kurven c nennt man **reguläre Kurven**.) Außerdem sei c ein Homöomorphismus auf $M := \text{im}(c)$. Also ist c eine globale Parametrisierung von M , und M ist eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Es gilt $\mathcal{X}_1|_{c(t)} = \dot{c}(t)$ und somit:
 $g_{11}(t) = \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = \|\dot{c}(t)\|^2$, also $\sqrt{\det(g_{ij}(t))} = \|\dot{c}(t)\|$ und damit rechnen wir

$$\mu^M(M) = \int_{(a,b)} \sqrt{\det(g_{ij}(\bullet))} \, d\lambda_1 = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \, dt = \mathcal{L}(c).$$

Beispiel 1.55 (Ebene Kurven). Sei $c: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ wie in [Beispiel 1.54](#). Dann ist

$$T(t) := \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}$$

der **Tangentenvektor** von c an der Stelle $c(t)$. Dies liefert eine Abbildung

$$T: (a, b) \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2.$$

Weiter ist

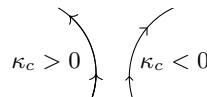
$$N(t) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T(t)$$

der **Normalenvektor** an der Stelle $c(t)$ und es gilt

$$0 = \frac{d}{dt} \underbrace{\langle T(t), T(t) \rangle}_{=1} = 2 \langle \dot{T}(t), T(t) \rangle.$$

Also gibt es eine glatte Funktion $\kappa_c: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ so dass

$$\dot{T}(t) = \kappa_c(t) \|\dot{c}(t)\| N(t)$$



gilt. Dabei heißt κ_c die **(parametrisierte) Krümmungsfunktion** von c .²² Man nennt $\kappa_c(t)$ auch die **Krümmung von $M = c((a, b))$ im Punkt $p = c(t)$** . Wir schreiben diese Krümmung als $H_c := \kappa_c \circ c^{-1}: M \rightarrow \mathbb{R}$. Man rechnet leicht nach, dass $|H_c|$ unabhängig von der Parametrisierung von M ist. Das Vorzeichen von H hängt davon ab, in welcher Richtung die Kurve durchlaufen wird. Wir fixieren diese Richtung.²³

Schreibe nun $T(t) = \begin{pmatrix} \cos(\rho(t)) \\ \sin(\rho(t)) \end{pmatrix}$ für eine glatte Funktion $\rho: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

Es gelten dann

$$\begin{aligned} \dot{T}(t) &= \dot{\rho}(t) \begin{pmatrix} -\sin(\rho(t)) \\ \cos(\rho(t)) \end{pmatrix} = \dot{\rho}(t) \cdot N(t) \\ \kappa_c(t) &= \frac{\dot{\rho}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}. \end{aligned}$$

Sei $a < \alpha < \beta < b$ dann gilt:

$$\int_{c([\alpha, \beta])} H_c \, d\mu^M = \int_{\alpha}^{\beta} \kappa_c(t) \|\dot{c}(t)\| \, dt = \int_{\alpha}^{\beta} \dot{\rho}(t) \, dt = \rho(\beta) - \rho(\alpha).$$

Also ist das Integral über κ_c die Differenz der Winkel zur x -Achse modulo 2π .

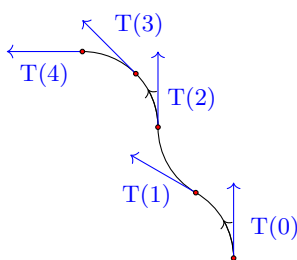


Abbildung 1.16: Eine reguläre Kurve $c: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Markiert sind $T(j)$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$. Es gilt dann $\rho(0) = \pi/2$, $\rho(1) = 5\pi/6$, $\rho(2) = \pi/2$, $\rho(3) = 3\pi/4$, $\rho(4) = \pi$, also $\rho(4) - \rho(0) = \pi/2$.

Im Fall, dass M eine Fläche, d. h. eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit, ist, nennt man $\text{vol}_2(M)$ auch den **Flächeninhalt** von M und schreibt oft $\text{area}(M)$. Im Staatsexamen²⁴ wurde hierfür auch schon der Begriff **Oberflächeninhalt** verwendet.

²²Dies ist die 2-dimensionale und orientierte Version der Krümmung einer Kurve, die auf [Übungsblatt 2, Aufgabe 1](#) diskutiert wurde.

²³Wir sagen dazu später: wir wählen eine Orientierung von M . Auch der Tangentialvektor und Normalenvektor in $p \in M$ ändern unter Parametrisierungswechsel höchstens das Vorzeichen. Das Vorzeichen ändert sich genau dann, wenn die Kurve anders herum durchlaufen wird (Orientierungswechsel).

²⁴Genau: Analysis gym. Lehramt Herbst 2017 Aufgabe 5 (b)

Beispiel 1.56 (Rotationsflächen). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ eine stetig differenzierbar. Die Rotationsfläche $\text{Rot}(f) \subset \mathbb{R}^3$ des Graphen von f sei die Untermannigfaltigkeit

$$\text{Rot}(f) = \{(x, y, z)^T \in [a, b] \times \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = f(x)^2\},$$

siehe [Übungsblatt 4, Aufgabe 2](#). Man kann dann leicht berechnen (Zentralübung am 12.5.), dass

$$\text{area}(\text{Rot}(f)) = 2\pi \int_a^b f(t) \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

1.7 Ableitungen von Funktionen und Vektorfeldern

1.7.1 Tangentialbündel und 1-Jet

Definition 1.57. Sei M^m bzw. N^n eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$ bzw. $\mathbb{R}^\ell$. Dann nennen wir

$$TM := \bigcup_{p \in M} (\{p\} \times T_p M) \subset \mathbb{R}^{2k}$$

das **Tangentialbündel** von M . Eine Abbildung $f \in \mathcal{C}^1(M, N)$ induziert eine Abbildung

$$\mathcal{J}f : TM \rightarrow TN, \quad (p, X) \mapsto (f(p), d_p f(X)),$$

genannt der **1-Jet von f** .²⁵

Übung 1.58.²⁶

- (a) TM ist eine $2m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{2k}$.
- (b) Gilt $f \in \mathcal{C}^r(M, N)$ für $r \in \mathbb{N}$, so folgt $\mathcal{J}f \in \mathcal{C}^{r-1}(TM, TN)$. Gilt $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$, so folgt $\mathcal{J}f \in \mathcal{C}^\infty(TM, TN)$.

Lösung:

- (a) Sei $p_0 \in M$, U eine offene Umgebung von p_0 in $\mathbb{R}^k$, 0 sei regulärer Wert von der glatten Abbildung $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{k-m}$ und $M \cap U = F^{-1}(0)$. Wir definieren dann die glatte Abbildung

$$\begin{aligned} G : U \times \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R}^{2(k-m)} \\ (p, X) &\mapsto (F(p), F'(p) \cdot X) \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt dann $TM \cap (U \times \mathbb{R}^k) = T(M \cap U) = G^{-1}(0)$. Wir berechnen G' in Blöcken bezüglich der Abspaltungen $\mathbb{R}^{2k} = \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^k$ und $\mathbb{R}^{2(k-m)} = \mathbb{R}^{k-m} \oplus \mathbb{R}^{k-m}$:

$$G'(p, X) = \begin{pmatrix} F'(p) & 0 \\ * & F'(p) \end{pmatrix}$$

²⁵Im Fall $N = \mathbb{R}$ ist der 1-Jet $\mathcal{J}f$ ist also fast dasselbe wie das Differential df . Der Unterschied von $\mathcal{J}f$ zu df ist, dass man hier auch noch f dazunimmt. Dieser Unterschied wird dann im Übergang zu Mannigfaltigkeiten verschwinden.

²⁶Dies ist deswegen eine Übung und kein Lemma, da ich davon ausgehe, dass Sie dies nun inzwischen selbst durchführen können sollten.

wobei $*$ ein Ausdruck ist, der keine weitere Rolle mehr spielt. Diese Matrix hat maximalen Rang (Rang = $2(k - m)$) in jedem $p \in M$, da $F'(p)$ maximalen Rang hat. Also ist 0 ein regulärer Wert von G und deswegen TM lokal eine $2m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit.

- (b) Sei $p_0 \in M$. Nach Definition 1.19 von $\mathcal{C}^r(M, N)$ gibt es eine offene Umgebung U von p_0 in $\mathbb{R}^k$ und eine $\mathcal{C}^r$ -Abbildung $\hat{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$, so dass $f|_{N \cap U} = \hat{f}|_{N \cap U}$. Nach Definition von $d_p f$ gilt für $(p, X) \in T_p M$, $p \in U$:

$$\mathcal{J}f(p, X) = (\hat{f}(p), \hat{f}'(p) \cdot X).$$

Aus $\hat{f} \in \mathcal{C}^r$ folgt $\hat{f}' \in \mathcal{C}^{r-1}$ und damit $\mathcal{J}f \in \mathcal{C}^r(TM, TN)$. ■

Ist $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ein glattes Vektorfeld, so ist $(\text{id}_M, Y): M \rightarrow TM$, $p \mapsto (p, Y|_p)$ eine glatte Abbildung $M \rightarrow TM$.

1.7.2 Ableitung reellwertiger Funktionen und Koordinatenkovektorfelder

Es sei $\mathcal{C}^\infty(M) := \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $T_x \mathbb{R} = \mathbb{R}$. Somit ist das Differential von f im Punkt $p \in M$ (im Sinne von Definition 1.30) eine lineare Abbildung $d_p f: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. Nach Definition des Dualraums (siehe Lineare Algebra) haben wir also

$$d_p f \in T_p^* M := (T_p M)^* = \text{Hom}(T_p M, \mathbb{R}).$$

Wdh.: Man nennt $T_p^* M$ den **Kotangentenraum** von M in p .

Definition 1.59. Die Abbildung²⁷

$$\begin{aligned} df: M &\rightarrow \bigcup_{p \in M} T_p^* M \\ p &\mapsto d_p f \end{aligned}$$

heißt das **Differential**²⁸ von f .

Schreibweise: Wir schreiben auch $\partial_X f := (d_p f)(X)$ für die Ableitung von f in Richtung $X \in T_p M$.

Lemma 1.60. Ist $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt und $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Dann ist

$$\begin{aligned} df(Y): M &\rightarrow \mathbb{R} \\ q &\mapsto (d_q f)(Y|_q) \end{aligned}$$

glatt, also $df(Y) \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Beweis: $df(Y)$ ist die Verkettung der glatten Abbildungen $(\text{id}, Y): M \rightarrow TM$, $\mathcal{J}f: TM \rightarrow T\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ und $\pi_y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y$, also ebenfalls glatt.

²⁷Es wäre formal etwas besser, hier die disjunkte Vereinigung statt der mengentheoretischen Vereinigung zu nehmen, ich möchte hier aber den Formalismus möglichst einfach halten. (Ignorieren Sie diesen Fußnote, wenn Sie sie nicht verstehen.)

²⁸Man beachten den kleinen sprachlichen Unterschied: In Definition 1.30 hatten wir vom „Differential in (einem Punkt) p “ gesprochen

Details: $\mathcal{J}f \circ (\text{id}_M, Y)(q) = \mathcal{J}f(q, Y|_q) = (f(q), d_q f(Y|_q))$ und daraus folgt $\pi_y \circ \mathcal{J}f \circ (\text{id}_M, Y)(q) = d_q f(Y|_q)$. ■

Bemerkung. Ist $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $c(0) = p \in M$, $\dot{c}(0) = X$ dann gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ c) = (d_{c(t)} f) (\dot{c}(0)) = \partial_{\dot{c}(0)} f = \partial_X f.$$

Ist $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte mit $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)^T$ mit $\varphi^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Dann gilt

$$d_p \varphi^i (\mathcal{X}_j^\varphi|_p) = d_p \varphi^i (d_{\varphi(p)}(\varphi^{-1})(e_j)) \stackrel{\text{Kettenr.}}{=} d_{\varphi(p)}(\varphi^i \circ \varphi^{-1})(e_j) \stackrel{(*)}{=} \pi^i(e_j) = \delta_{ij},$$

wobei $\pi^i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ die Projektion auf die i -te Komponente ist, und wobei wir an der Stelle $(*)$ benutzt haben, dass $\varphi^i \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^m) = x^i = \pi^i(x)$.

Erinnerung 1.61 (aus der Linearen Algebra). Ist V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Basis $b_1, \dots, b_n$. Dann existiert im Dualraum $V^* := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ eine dazu duale Basis $b^{1*}, \dots, b^{n*}$ definiert durch $b^{i*}(b_j) := \delta_{ij}$.

Wir erhalten also aus obiger Rechnung:

Ergebnis 1.62. Die Vektoren $\mathcal{X}_1^\varphi|_p, \dots, \mathcal{X}_m^\varphi|_p$ bilden eine Basis von $T_p M$ und die Differentiale $d_p \varphi^1, \dots, d_p \varphi^m$ bilden die dazu duale Basis von $T_p^* M$.

Wir nennen $d_p \varphi^i$ das i -te **Koordinatenkovektorfeld**²⁹.

Korollar 1.63. Ist $\varphi: U \rightarrow V$ eine Karte von M^m und $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Dann ist

$$\begin{aligned} d\varphi^i(Y): U &\rightarrow \mathbb{R} \\ q &\mapsto (d_q \varphi^i)(Y|_q) \end{aligned}$$

glatt, also $d\varphi^i(Y) \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Außerdem gilt

$$Y|_U = \sum_{i=1}^m \underbrace{d\varphi^i(Y)}_{\in \mathcal{C}^\infty(U)} \underbrace{\mathcal{X}_i^\varphi}_{\in \mathfrak{X}(U)}. \quad (1.9)$$

Beweis: Die Glattheit von $d\varphi^i(Y) \in \mathcal{C}^\infty(U)$ folgt direkt aus Lemma 1.60, in dem wir die Untermannigfaltigkeit M von $\mathbb{R}^k$ durch die Untermannigfaltigkeit $U \subseteq M$ von $\mathbb{R}^k$ ersetzen. Zu verifizieren bleibt (1.9).

Sei $p \in U$. Dann schreibe $Y|_p = \sum_{i=1}^m a^i \mathcal{X}_i^\varphi|_p$ für $a^i \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$d_p \varphi^i (Y|_p) = \sum_{j=1}^m a^j \underbrace{(d_p \varphi^i)(\mathcal{X}_j^\varphi|_p)}_{=\delta_{ij}} = a^i.$$

²⁹Diese Bezeichnung ist außerhalb unserer Vorlesung wohl nicht üblich, erscheint mir aber logisch, angemessen und für alle mit dem entsprechenden Hintergrund verständlich.

■

Die Funktionen $d\varphi^i(Y)$ sind also die **Koeffizientenfunktionen** des Vektorfelds Y in der Karte $\varphi: U \rightarrow V$. Sie geben an, wie man Y punktweise als Linearkombination der Koordinatenvektorfelder schreiben kann. Wenn aus dem Kontext heraus klar ist, welche Karte verwendet wird, so ist es üblich, $Y^i := d\varphi^i(Y)$ zu schreiben.³⁰

Korollar 1.64. Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Atlas $\mathcal{A} := \{U_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} V_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Sei Y ein $\mathcal{C}^0$ -Vektorfeld auf M . Dann ist Y glatt genau dann, wenn für alle $a \in A$ und $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt, dass $d(\varphi_\alpha)^i(Y): U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ glatt ist. ■

1.7.3 Vektorfelder operieren auf Funktionen

Wiederholung: Wir schreiben auch $\partial_X f := (d_p f)(X)$ für die Ableitung von f in Richtung $X \in T_p M$. Außerdem $\mathcal{C}^\infty(M) = \{f: M \rightarrow \mathbb{R} \text{ glatt}\}$

Ist $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld auf M und $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dann ist nach Lemma 1.60

$$df(Y) = \partial_Y f: M \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto d_p f(Y|_p) = \partial_{Y|_p} f$$

eine glatte Funktion. Also ist $\partial_Y \in \text{End}(\mathcal{C}^\infty(M))$. Offensichtlich gilt für $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und $Y, \hat{Y} \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\begin{aligned} \partial_{f_1 Y} f_2 &= f_1(\partial_Y f_2) \\ \partial_{Y + \hat{Y}} f_2 &= \partial_Y f_2 + \partial_{\hat{Y}} f_2 \end{aligned}$$

Übung 1.65. Zeige die **Produktregel**

$$\partial_Y(f_1 \cdot f_2) = (\partial_Y f_1)f_2 + f_1(\partial_Y f_2) \quad (1.10)$$

für alle $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Lösung Nr. 1: Wir zeigen die Gleichung in $p \in M$. Sei $c(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ eine Kurve mit $c(0) = p$, $\dot{c}(0) = Y|_p$. Unter Nutzung von Lemma 1.31 (iii) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \partial_{Y|_p}(f_1 \cdot f_2) &= d_p(f_1 \cdot f_2)(Y|_p) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \underbrace{\left((f_1 \cdot f_2) \circ c(t) \right)}_{f_1(c(t)) \cdot f_2(c(t))} \\ &= f_2 \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f_1 \circ c(t)) + f_1 \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f_2 \circ c(t)) \end{aligned}$$

■

Lösung Nr. 2: Sei $F: M \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(p) := (f_1(p), f_2(p))^T$ und $\mu: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$. Nach Kettenregel gilt für $p \in M$ und der Formel $d_{(x,y)^T} \mu(A, B)^T = xB + yA$ erhalten wir für $X \in T_p M$

$$d_p(f_1 \cdot f_2)(X) = d_p(\mu \circ F)(X) = d_{(f_1(p), f_2(p))^T} \mu \circ d_p F(X)$$

³⁰Diese Schreibweise ist in der Physik omnipräsent.

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(*)}{=} d_{(f_1(p), f_2(p))^T} \mu \circ \begin{pmatrix} d_p f_1(X) \\ d_p f_2(X) \end{pmatrix} \\
&= f_1(p) d_p f_2(X) + f_2(p) d_p f_1(X).
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir an der Stelle (*) die offensichtliche Tatsache genutzt, dass die Ableitung einer Funktion $F : M \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ gleich der komponentenweisen Ableitung ist. ■

Sei $\varphi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte von M . Schreibe $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)^T$. Dann gilt

$$(\partial_{\mathcal{X}_i^\varphi}(f))(p) = (d_p f) \left(\mathcal{X}_i^\varphi|_p \right) = (d_p f) (d_{\varphi(p)}(\varphi^{-1})(e_i)) = d_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1})(e_i) \quad (1.11)$$

$$= (f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p)) \cdot e_i = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)}. \quad (1.12)$$

Anschaulich in Worten ausgedrückt: $\partial_{\mathcal{X}_i^\varphi}$ ist — in Koordinaten ausgedrückt — gleich der partiellen Ableitung in die i -te Richtung. Später (siehe Lemma 2.5.6 in Kapitel 2) wird gezeigt, dass die Abbildung $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \text{End}(\mathcal{C}^\infty(M))$, $X \mapsto \partial_X$ injektiv ist, und man identifiziert dann X mit ∂_X . Mit dieser Identifikation ist also — in Koordinaten φ ausgedrückt — $\mathcal{X}_i^\varphi$ gleich der partiellen Ableitung in die i -te Richtung, und dies erklärt die Schreibweise $\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p$ für $\mathcal{X}_i^\varphi|_p$, die in Beispiel 1.27 eingeführt wurde, denn φ^i ist ja die i -te Variable. Manche Bücher nutzen den Buchstaben x als Bezeichnung für Karten an Stelle von φ , dann wird der Bezug zur partiellen Ableitung noch deutlicher.

Der Satz von Schwarz impliziert

$$\partial_{\mathcal{X}_j^\varphi} (\partial_{\mathcal{X}_i^\varphi} f) = \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j \partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} = \partial_{\mathcal{X}_i^\varphi} (\partial_{\mathcal{X}_j^\varphi} f)$$

Warnung: Im Allgemeinen haben wir $\partial_X \partial_Y \neq \partial_Y \partial_X$.

1.7.4 Kovariante Ableitung von Vektorfeldern

Definition 1.66. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit und $T_p M$ der Tangentialraum von M im Punkt p . Setze $N_p M := (T_p M)^\perp = \{X \in \mathbb{R}^k \mid X \perp T_p M\}$ als den **Normalraum** von M in $\mathbb{R}^k$ im Punkt p .

Die Orthogonalprojektionen $\pi_p^T : \mathbb{R}^k \rightarrow T_p M$ und $\pi_p^N : \mathbb{R}^k \rightarrow N_p M$ nennt man die **Tangential- und Normalprojektionen**.

Für $X \in \mathbb{R}^k$ gilt

$$X = \pi_p^T(X) + \pi_p^N(X) \quad \text{mit} \quad \pi_p^T(X) \perp \pi_p^N(X).$$

Sei nun $Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $\eta \in T_p M$ für $p \in M$. Die **(innere) Ableitung** – auch **kovariante Ableitung** genannt – von Y in Richtung η ist definiert durch

$$\nabla_\eta Y := \pi_p^T((d_p Y)(\eta)) = \pi_p^T(\partial_\eta Y) \in T_p M.$$

Hierbei ist $\partial_\eta Y$ so zu verstehen, dass man in jeder Komponente von Y die obige Definition von ∂_η anwendet.

Ist $Z \in \mathfrak{X}(M)$, dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\nabla_Z Y &: M \longrightarrow \bigcup_{p \in M} T_p M \\ p &\longmapsto \nabla_{Z|_p} Y\end{aligned}$$

glatt.

Für $\eta \in T_p M$ ist $\nabla_\eta Y \in T_p M$, für $Z \in \mathfrak{X}(M)$ ist $\nabla_Z Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Bemerkung 1.67 (Lokale Formeln). Sei $\varphi: U \rightarrow V$ eine Karte, Y, η, ∇ wie oben. Definiere glatte Funktionen $\Gamma_{ij}^s: V \rightarrow \mathbb{R}$ (die **Christoffel-Symbole**) durch

$$\mathfrak{X}(U) \ni \nabla_{\mathcal{X}_i^\varphi} \mathcal{X}_j^\varphi = \sum_{s=1}^m (\Gamma_{ij}^s \circ \varphi) \mathcal{X}_s^\varphi$$

das heißt

$$\Gamma_{ij}^s: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \Gamma_{ij}^s(x) = (d_{\varphi^{-1}(x)} \varphi^s) \left(\nabla_{\mathcal{X}_i^\varphi} \mathcal{X}_j^\varphi \Big|_{\varphi^{-1}(x)} \right)$$

ist in $\mathcal{C}^\infty(V)$. Schreibe $Y \in \mathfrak{X}(M)$ als

$$Y|_p = \sum_{j=1}^m Y^j(p) \mathcal{X}_j^\varphi|_p \quad (1.13)$$

für alle $p \in U$. Dann ist wegen Korollar 1.63 $Y^j \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Da es etwas aufwändig ist, in Gleichungen wie (1.13) immer überall p hinzuzufügen, betrachtet man in Gleichung (1.13) Y^j als Funktion $\mathcal{C}^\infty(U)$ und $\mathfrak{X}(U)$ als $\mathcal{C}^\infty(U)$ -Modul, dann hat man die einfachere Formel:

$$Y = \sum_{j=1}^m Y^j \mathcal{X}_j^\varphi,$$

was dann eben konkret so zu lesen ist, dass überall wie oben p zu ergänzen ist, und es dann für alle $p \in U$ zu gelten hat. In derselben Art und Weise schreibt man dann $X = \sum_{i=1}^m X^i \mathcal{X}_i^\varphi$ mit $X^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Weiter sei $\eta = \sum_{i=1}^m \eta^i \mathcal{X}_i^\varphi|_p \in T_p M$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\nabla_\eta Y &= \pi_p^T (\partial_\eta Y) = \pi_p^T \left(\partial_{\sum_i \eta^i \mathcal{X}_i|_p} \left(\sum_j Y^j \mathcal{X}_j^\varphi \right) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^m \eta^i \pi_p^T \left(\partial_{\mathcal{X}_i^\varphi|_p} (Y^j \mathcal{X}_j^\varphi) \right) \stackrel{(1.10)}{=} \sum_{i,j=1}^m \eta^i \pi_p^T \left(\left(\partial_{\mathcal{X}_i^\varphi|_p} Y^j \right) \mathcal{X}_j^\varphi|_p + Y^j|_p \partial_{\mathcal{X}_i^\varphi|_p} \mathcal{X}_j^\varphi \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^m \eta^i \left(\left(\partial_{\mathcal{X}_i^\varphi|_p} Y^j \right) \mathcal{X}_j^\varphi|_p + Y^j|_p \underbrace{\pi_p^T (\partial_{\mathcal{X}_i^\varphi|_p} \mathcal{X}_j^\varphi)}_{=\nabla_{\mathcal{X}_i^\varphi|_p} \mathcal{X}_j^\varphi = \sum_{k=1}^m (\Gamma_{ij}^k \circ \varphi) \mathcal{X}_k^\varphi|_p} \right) \\ &= \sum_{\ell=1}^m \left(\sum_{i=1}^m \eta^i (\partial_{\mathcal{X}_i|_p} Y^\ell) + \sum_{i,j=1}^m \eta^i Y^j(p) (\Gamma_{ij}^\ell \circ \varphi(p)) \right) \mathcal{X}_\ell^\varphi|_p\end{aligned}$$

Also folgt:

$$\nabla_X Y = \sum_{\ell=1}^m \left(\sum_{i=1}^m X^i (\partial_{\mathcal{X}_i} Y^\ell) + \sum_{i,j=1}^m X^i Y^j (\Gamma_{ij}^\ell \circ \varphi) \right) \mathcal{X}_\ell. \quad (1.14)$$

Einschub: Einsteinsche Summenkonvention

Einsteinsche Summenkonvention:

Taucht in einem Ausdruck (genauer einem Summanden) in einer Formel derselbe Index oben und unten auf, so wird über diesen Index summiert. Steht die Größe im Nenner, so invertiert sich die Stellung von „oben“ und „unten“.

Abgekürzt wird dies mit (ESK). Wenn man diese Konvention so sieht, hat man den Eindruck, dass sie recht unpräzise ist. Sie haben sicherlich Ideen für Ausdrücke, bei denen nicht so recht klar ist, ob in ihnen über einen gewissen Index summiert werden soll oder nicht.³¹ In der Praxis ist es allerdings meistens klar, und in den wenigen Fällen, in denen es nicht klar ist, sollte man sowieso meistens die Summen besser ausschreiben und „keine ESK“ dazuschreiben. Der Grund, wieso dies gut funktioniert, ist dass diese Index-Schreibweise vor allem eine Methode ist, um die Objekte der Multilinearen Algebra und ihre Verknüpfungen effektiv – aber leider koordinatenabhängig – zu beschreiben. Man lernt die ESK am besten an Hand von Beispielen.

Wie in Beispiel 1.27 bereits eingeführt wird ab jetzt zumeist die Notation $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ für $\mathcal{X}_i^\varphi$ – um Verwechslungen mit X^i zu vermeiden – verwendet. Schreibe zudem kurz ∂_i für $\partial_{\mathcal{X}_i^\varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$. Damit lautet die obige Formel (1.14):

$$\nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) = (X^i (\partial_i Y^\ell) + X^i Y^j (\Gamma_{ij}^\ell \circ \varphi)) \frac{\partial}{\partial \varphi^\ell}. \quad (1.15)$$

Hier wird auf der linken Seite über i und j summiert. Auf der rechten Seite stehen nach Ausmultiplizieren zwei Summanden. Im ersten Summanden wird über i und ℓ summiert und im zweiten Summanden über i, j und ℓ , wie in (1.14).

Diese Formel ist äquivalent zu

$$d\varphi^\ell \left(\nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) \right) = (X^i (\partial_i Y^\ell) + X^i Y^j (\Gamma_{ij}^\ell \circ \varphi)).$$

Allerdings wird hier nun weder auf der linken noch auch der rechten Seite über ℓ summiert. Es ist nun eine skalare Gleichung³², die für jedes ℓ gilt, wohin die Gleichung zuvor eine vektorielle Gleichung³³ war, die von keinen Parametern mehr abhängt.

Ende des Einschubs

Sei nun $\Phi := \varphi^{-1}: V \rightarrow U \subseteq M^m \subset \mathbb{R}^k$ eine Parametrisierung. Dann:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p \stackrel{\text{Def.}}{=} \mathcal{X}_i^\varphi \Big|_p = (d_{\varphi(p)} \Phi) e_i \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)}$$

³¹Sie ist aber schon mal treffender als jede andere Beschreibung, die ich irgendwo gelesen habe.

³²das heißt: beide Seiten sind Skalare

³³das heißt: beide Seiten sind Vektoren

und

$$\begin{aligned}\partial_i \frac{\partial}{\partial \varphi^j} &\stackrel{\text{Def.}}{=} \partial_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \frac{\partial}{\partial \varphi^j} = \partial_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \circ \varphi \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \right) \right) \circ \varphi \\ &= \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j} \right) \circ \varphi \stackrel{\text{Schwarz}}{=} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^i} \right) \circ \varphi = \partial_j \frac{\partial}{\partial \varphi^i}\end{aligned}$$

Weiter:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \frac{\partial}{\partial \varphi^j} = \pi_p^T \left(\partial_i \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) = \pi_p^T \left(\partial_j \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^j}} \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \quad (1.16)$$

Und damit schließlich:

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^s \circ \varphi &= d\varphi^s \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) = d\varphi^s \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^j}} \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) = \Gamma_{ji}^s \circ \varphi \\ \implies \Gamma_{ij}^s &= \Gamma_{ji}^s.\end{aligned}$$

Bemerke zudem, dass ∇ *lokal* ist, das heißt seien $M^m, \widehat{M}^m$ Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^k$ und Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, sowie $\widehat{X}, \widehat{Y} \in \mathfrak{X}(\widehat{M})$. Angenommen es existieren ein $W \subseteq \mathbb{R}^k$ mit $M \cap W = \widehat{M} \cap W$ und

$$X|_{M \cap W} \equiv \widehat{X}|_{\widehat{M} \cap W}, \quad Y|_{M \cap W} \equiv \widehat{Y}|_{\widehat{M} \cap W}.$$

Dann gilt

$$\nabla_X Y|_{M \cap W} = \nabla_{\widehat{X}} \widehat{Y}|_{\widehat{M} \cap W}.$$

Eigenschaften 1.68. Sei $p \in M$. Die innere Ableitung erfüllt für $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $X, X_1 \in T_p M$ oder $X, X_1 \in \mathfrak{X}(M)$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ und $\nabla_{X+X_1} Y = \nabla_X Y + \nabla_{X_1} Y$. (**$\mathcal{C}^\infty(M)$ -Linearität im 1. Argument**)
Das heißt $X \mapsto \nabla_X Y$ ist ein $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Modulhomomorphismus.

(ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$. (**Additivität im 2. Argument**)
Zusammen mit $\nabla_X (\alpha Y) = \alpha \nabla_X Y$ ergibt sich die $\mathbb{R}$ -Linearität im 2. Argument, das heißt $Y \mapsto \nabla_X Y$ ist eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung.

(iii) $\nabla_X (fY) = (\partial_X f)Y + f \nabla_X Y$. (**Produktregel I**)

(iv) $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \frac{\partial}{\partial \varphi^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^j}} \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ für alle $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ und alle Karten φ . (**Torsionsfreiheit**)

(v) $\partial_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$. (**Produktregel II**)

Beweis: „(i)“: Rechne

$$\nabla_{f(p)X|_p} Y = \pi_p^T (\partial_{f(p)X|_p} Y) = \pi_p^T (f(p) \partial_{X|_p} Y) = f(p) \pi_p^T (\partial_{X|_p} Y) = f(p) \nabla_{X|_p} Y.$$

$$\nabla_{X+X_1} Y = \pi_p^T (\partial_{X+X_1} Y) = \pi_p^T (\partial_X Y + \partial_{X_1} Y) = \pi_p^T (\partial_X Y) + \pi_p^T (\partial_{X_1} Y) = \nabla_X Y + \nabla_{X_1} Y.$$

„(ii)“:

$$\nabla_X (Y + Z) = \pi_p^T (\partial_X (Y + Z)) = \pi_p^T (\partial_X Y + \partial_X Z)$$

$$= \pi_p^T (\partial_X Y) + \pi_p^T (\partial_X Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z.$$

„(iii)“:

$$\begin{aligned} \nabla_X (fY) &= \pi^T (\partial_X (fY)) \stackrel{(*)}{=} \pi^T ((\partial_X f)Y + f\partial_X Y) \\ &= (\partial_X f)Y + f\pi^T (\partial_X Y) = (\partial_X f)Y + f\nabla_X Y. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir in der Umformung $(*)$ die Produktregel (1.10) komponentenweise angewendet.

„(iv)“: In Gleichung (1.16) gezeigt.

„(v)“:

$$\begin{aligned} \partial_X \langle Y, Z \rangle &= \langle \partial_X Y, Z \rangle + \langle Y, \partial_X Z \rangle = \langle \pi^T (\partial_X Y), Z \rangle + \langle Y, \pi^T (\partial_X Z) \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle. \end{aligned}$$

■

Notation. Setze $\Gamma_{ij\ell}(y) := \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^\ell} \Big|_p, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p} \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right\rangle$ für $p = \varphi^{-1}(y)$, genannt **Christoffel-Symbole mit gesenktem Index**.

Lemma 1.69. Es gilt $\Gamma_{ij\ell} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} \right)$.

Beweis: Nach Eigenschaften 1.68 (iv) gilt $\Gamma_{ij\ell} = \Gamma_{ji\ell}$. Rechne nun:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i} &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \circ \varphi^{-1}, \frac{\partial}{\partial \varphi^\ell} \circ \varphi^{-1} \right\rangle = \left(\partial_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^j}, \frac{\partial}{\partial \varphi^\ell} \right\rangle \right) \circ \varphi^{-1} \\ &\stackrel{\text{Eig. 1.68 (v)}}{=} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \frac{\partial}{\partial \varphi^j}, \frac{\partial}{\partial \varphi^\ell} \right\rangle \circ \varphi^{-1} + \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \frac{\partial}{\partial \varphi^\ell} \right\rangle \circ \varphi^{-1} = \Gamma_{ij\ell} + \Gamma_{i\ell j} \end{aligned}$$

Hierbei wurde beim ersten Gleichheitszeichen die Definition der $g_{i\ell}$ genutzt. Man beachte, dass $\frac{\partial}{\partial x^i}$ die partielle Ableitung im Sinne der Analysis II bezeichnet und somit auf Funktionen $V \rightarrow \mathbb{R}$ operiert, wohingegen $\partial_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}}$ die hierzu entsprechende Ableitung auf M ist, die auf Funktionen $U \rightarrow \mathbb{R}$ operiert. Und weiter folgt durch Vertauschung der Indizes

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j} &= \Gamma_{jil} + \Gamma_{j\ell i} = \Gamma_{ij\ell} + \Gamma_{j\ell i} \\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} &= \Gamma_{\ell ij} + \Gamma_{\ell ji} = \Gamma_{i\ell j} + \Gamma_{j\ell i} \end{aligned}$$

Also erhält man zusammen die Behauptung:

$$\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} = 2\Gamma_{ij\ell}.$$

■

Notation 1.70. Sei wieder $\varphi: U \rightarrow V$ eine Karte und $g_{ij} = g_{ij}^\varphi$. Es bezeichne $(g^{ij}(x))_{ij}$ die Matrix $(g_{ij}(x))_{ij}^{-1}$ für $x \in V$. Also gilt $g^{ij}(x)g_{j\ell}(x) = \delta_{i\ell}$ und $g_{ij}(x)g^{j\ell}(x) = \delta_{i\ell}$. Hierbei wurde natürlich die Einsteinsche Summenkonvention verwendet.

Es ergibt sich also

$$\Gamma_{ij\ell} \circ \varphi = \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^\ell}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^\ell}, (\Gamma_{ij}^s \circ \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi^s} \right\rangle = (\Gamma_{ij}^s \circ \varphi)(g_{\ell s} \circ \varphi)$$

Dies ist äquivalent zu $\Gamma_{ij\ell} = \Gamma_{ij}^s g_{\ell s}$ und dies wiederum zu

$$\Gamma_{ij}^r = g^{\ell r} \Gamma_{ij\ell}.$$

Wir erhalten also insgesamt:

Korollar 1.71.

$$\Gamma_{ij}^s = \frac{1}{2} g^{s\ell} \left(\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} \right). \quad (1.17)$$

Bemerkung. Die rechte der Seite der Gleichung (1.17) ist *intrinsisch* definiert, das heißt sie hängt nur von den Funktionen g_{ij} ab. Unter der **inneren oder intrinsischen Geometrie einer Untermannigfaltigkeit** versteht man Strukturen und Eigenschaften, die unter Isometrien invariant sind. Mit dem unten stehenden Korollar folgt also, dass die kovariante Ableitung zur inneren Geometrie gehört. Dies ist erstaunlich, denn unsere Definition 1.66 der kovarianten Ableitung nutzt auch Strukturen der **extrinsischen Geometrie**, d.h. solche, die nicht durch g_{ij} ausdrückbar sind, nämlich die Ableitung $\partial_X Y$ im umgebenden Raum oder die Orthogonalprojektion π^T . Es ist gar nicht definierbar, was es heißen soll, dass $\partial_X Y$ und π^T unter Isometrien invariant sind. Es sind keine Objekte der inneren Geometrie.

Korollar 1.72. Ist $f: M^m \rightarrow \widehat{M}^m$ eine Isometrie und $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Wir setzen

$$\widehat{X}|_{f(p)} := (d_p f)(X|_p), \quad \widehat{Y}|_{f(p)} := (d_p f)(Y|_p)$$

für alle $p \in M$. Dann gilt

$$\nabla_{\widehat{X}} \widehat{Y}|_{f(p)} = (d_p f) \left(\nabla_X Y|_p \right) \quad \forall p \in M.$$

Das heißt die kovariante (= innere) Ableitung bleibt unter Isometrien erhalten.

Bemerkung. Als Merkregel, wie im obigen Korollar und an vielen weiteren Stellen der Vorlesung X mit $\widehat{X}$ verbunden ist, schreibt man es als Diagramm wie folgt:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\mathcal{J}f} & T\widehat{M} \\ \uparrow (\text{id}_M, X) & & \uparrow (\text{id}_{\widehat{M}}, \widehat{X}) \\ M & \xrightarrow{f} & \widehat{M} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (p, X|_p) & & (\widehat{p}, \widehat{X}|_{\widehat{p}}) \\ \uparrow (\text{id}, X) & & \uparrow (\text{id}, \widehat{X}) \\ \underline{p} & & \underline{\widehat{p}} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (p, v) \mapsto (f(p), d_p f(v)) & & \\ & & \\ p \xrightarrow{f} f(p) & & \end{array}$$

Wenn das Diagramm kommutiert, so sagt man X ist **f -verwandt** mit $\widehat{X}$. Das Korollar 1.72 sagt also: Ist X mit $\widehat{X}$ f -verwandt, und Y mit $\widehat{Y}$ f -verwandt, dann ist auch $\nabla_X Y$ f -verwandt mit $\nabla_{\widehat{X}} \widehat{Y}$.

Beweis von Korollar 1.72: Sei $\varphi: U \rightarrow V$ eine Karte von M . Wir schreiben dann alle Strukturen auf $\widehat{M}$ mit einem Dach, also z. B. $\hat{\Gamma}_{ij}^k$ für die Christoffelsymbole. Dann ist $\hat{\varphi} := \widehat{U} := \varphi \circ f^{-1}: f(U) \rightarrow V$ eine Karte von $\widehat{M}$. Da f eine Isometrie ist, gilt $g_{ij}^\varphi = g_{ij}^{\hat{\varphi}}$ und damit $\Gamma_{ij\ell} = \hat{\Gamma}_{ij\ell}$ also folgt $\Gamma_{ij}^k = \hat{\Gamma}_{ij}^k$. ■

1.8 Hyperflächen und 2. Fundamentalform

1.8.1 Einheitsnormalenfelder

Definition 1.73. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit. Man nennt M eine **Fläche**, falls $m = 2$. Gilt $k = m + 1$, so heißt M eine **Hyperfläche**.

Beispiel 1.74. Die m -Sphäre $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ ist eine Hyperfläche.

In diesem Abschnitt gilt $k = m + 1$ und somit $\dim(N_p M) = 1$, außer wenn explizit anders angegeben wird.

Definition 1.75. Sei $U \subseteq M$. Ein (auf U definiertes) **lokales Einheitsnormalenfeld** (kurz: **lokales ENF**) ist eine stetige Abbildung

$$\nu: U \rightarrow \mathbb{S}^m, \quad p \mapsto \nu|_p,$$

so dass $\nu|_p \in N_p M$ für alle $p \in U$.

Ein **Einheitsnormalenfeld** (kurz: **ENF**) ist ein auf ganz M definiertes lokales Einheitsnormalenfeld.

Beispiel 1.76. Sei $\varphi: U \rightarrow V$ eine Karte von M , $\Phi := \varphi^{-1}: V \rightarrow U \subseteq M \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Dann ist $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}|_{\Phi(x)} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}|_x$ und somit ist $\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}|_x, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x^m}|_x$ eine Basis von $T_{\Phi(x)} M$. Sei $Y|_{\Phi(x)}$ der Vektor mit

$$\langle Y|_{\Phi(x)}, v \rangle = \det \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}|_x, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x^m}|_x, v \right) \quad \forall v \in \mathbb{R}^{m+1}.$$

Die Abbildung

$$\det \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}|_x, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x^m}|_x, \bullet \right): \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

ist linear. Sei $\beta \in \mathbb{R}^{1 \times (m+1)}$ die zugehörige Matrix, d. h. ein Zeilenvektor. Dann gilt

$$Y|_{\Phi(x)} = \beta^T \in \mathbb{R}^{m+1}.$$

Formel: Sei $\text{sgn}(\sigma)$ das Signum von $\sigma \in \mathcal{S}_{m+1} := \text{Perm}\{1, \dots, m+1\}$. Dann

$$Y|_{\Phi(x)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{m+1}} \text{sgn}(\sigma) \frac{\partial \Phi^{\sigma(1)}}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial \Phi^{\sigma(m)}}{\partial x^m} e_{\sigma(m+1)}$$

$$= „\det“ \begin{pmatrix} & & e_1 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x^m}, & e_2 & \\ & \vdots & \\ & & e_{m+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}.$$

Hierbei bedeutet „det“, dass die übliche polynomiale Formel für die Determinante einer $(m+1) \times (m+1)$ -Matrix auf den Ausdruck in der Klammer angewandt wird, obwohl der Ausdruck in der gar keine $(m+1) \times (m+1)$ -Matrix ist, denn in der letzten Spalte stehen Vektoren an Stelle von Skalaren. Es gilt stets $Y|_{\Phi(x)} \perp \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}|_x$ für alle $1 \leq i \leq m$.

Da die $\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}|_x$ linear unabhängig sind, gilt $Y|_{\Phi(x)} \neq 0$. Außerdem gilt $Y|_{\Phi(x)} \in N_{\Phi(x)}M$.

Die Abbildung

$$x \mapsto Y|_{\Phi(x)}$$

ist glatt.

Definiere nun ein lokales Einheitsnormalenfeld durch

$$\nu: U \longrightarrow \mathbb{S}^m, \quad \nu|_p := \frac{Y|_p}{\|Y|_p\|}.$$

Dieses Einheitsnormalenfeld ist glatt.

Betrachte nun die Spezialfälle $m \in \{1, 2\}$:

Für $m = 1$ sei $\Phi: I \longrightarrow \Phi(I) \subset \mathbb{R}^2$ eine Kurve mit $I = (a, b)$, $\Phi(t) = (\Phi^1(t), \Phi^2(t))^T$. Rechne

$$Y \circ \Phi = \det \begin{pmatrix} \dot{\Phi}^1 & e_1 \\ \dot{\Phi}^2 & e_2 \end{pmatrix} = \dot{\Phi}^1 e_2 - \dot{\Phi}^2 e_1 = \begin{pmatrix} -\dot{\Phi}^2 \\ \dot{\Phi}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\Phi}.$$

Also gilt

$$\|Y|_{\Phi(t)}\| = \|\dot{\Phi}(t)\|, \quad T_{\Phi}(t) = \frac{\dot{\Phi}(t)}{\|\dot{\Phi}(t)\|}, \quad N_{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T_{\Phi}(t).$$

Das heißt $\nu|_{\Phi(t)} = N_{\Phi}(t)$.

Für $m = 2$ sei $\Phi: \mathbb{R}^2 \ni V \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^3$. Dann rechne

$$Y \circ \Phi = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}, e_1 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}, e_2 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}, e_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} \times \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}.$$

Damit ist ein lokales Einheitsnormalenfeld gegeben durch

$$\nu = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x^1} \times \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}}{\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} \times \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} \right\|}.$$

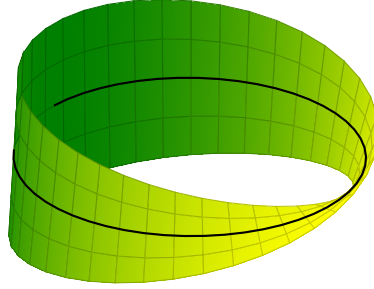
Sind $\nu: U \longrightarrow \mathbb{S}^m$ und $\hat{\nu}: \hat{U} \longrightarrow \mathbb{S}^m$ zwei lokale Einheitsnormalenfelder von M . Dann definiere $\varepsilon: U \cap \hat{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\varepsilon(p) = \langle \nu|_p, \hat{\nu}|_p \rangle$. Dann gilt $\varepsilon(p) \in \{\pm 1\}$, denn aus $\nu|_p, \hat{\nu}|_p \in N_p M$ folgt $\nu|_p = \pm \hat{\nu}|_p$. Also ist ε lokal konstant (da ε stetig). Insbesondere ist ε glatt. Es gilt übrigens $\hat{\nu} = \varepsilon \nu$.

Proposition 1.77. *Jedes (stetige) lokale Einheitsnormalenfeld ist glatt.*

Beweis: Sei $\hat{\nu}$ ein auf $\hat{U}$ definiertes lokales Einheitsnormalenfeld.

Zeige Glattheit von $\hat{\nu}$ auf einer Umgebung von $p \in \hat{U}$. Sei $\varphi: U \rightarrow V$ eine Karte von M mit $p \in U$. Konstruiere ein lokales Einheitsnormalenfeld ν wie in Beispiel 1.76. Dann ist $\nu: U \rightarrow \mathbb{S}^m$ glatt und $\hat{\nu}|_{U \cap \hat{U}} = \varepsilon \cdot \nu|_{U \cap \hat{U}}$. ■

Bemerkung 1.78. Nicht jede Hyperfläche besitzt ein (auf ganz M definiertes) Einheitsnormalenfeld. Betrachte zum Beispiel das **Möbiusband**:



Wir erhalten das Möbiusband $M \subset \mathbb{R}^3$ als Bild der Abbildung

$$\Phi: \mathbb{R} \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (s, t) \mapsto \begin{pmatrix} (1 + \frac{t}{2} \cos(s/2)) \cos s \\ (1 + \frac{t}{2} \cos(s/2)) \sin(s) \\ \frac{t}{2} \sin(s/2) \end{pmatrix}.$$

Später wird – in Definition 3.7.4 – der Begriff einer Orientierung von M definiert. Dann wird man sehen, dass eine Hyperfläche M genau dann orientierbar ist, wenn M ein (auf ganz M definiertes) Einheitsnormalenfeld besitzt.

1.8.2 Weingarten-Abbildung und zweite Fundamentalform

In diesem Unterabschnitt wird angenommen, dass M ein Einheitsnormalenfeld ν besitzt (außer explizit anders angegeben).

Definition 1.79. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ eine Hyperfläche mit ENF ν . Dann ist die **Weingarten-Abbildung** von (M, ν) in $p \in M$ definiert als

$$W_p(X) = -\partial_X \nu \in \mathbb{R}^{m+1} \quad \forall X \in T_p M.$$

Lemma 1.80. Es gilt $W_p(X) \in T_p M$. Also gilt $W_p \in \text{End}(T_p M) \cong T_p^* M \otimes T_p M$.

Beweis: Differenziere $1 = \langle \nu, \nu \rangle \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und erhalte

$$0 = \partial_X \langle \nu, \nu \rangle = \langle \partial_X \nu, \nu \rangle + \langle \nu, \partial_X \nu \rangle = 2 \langle \partial_X \nu, \nu \rangle.$$

Also gilt $\partial_X \nu \perp \nu$. ■

Definition 1.81. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ eine Hyperfläche und ν ein Einheitsnormalenfeld auf M . Dann ist die **2. Fundamentalform** (2. FF) die Abbildung

$$\Pi_p: T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \longmapsto \langle \nu, \partial_X \tilde{Y} \rangle$$

wobei $\tilde{Y}$ ein auf einer Umgebung von p definiertes Vektorfeld mit $\tilde{Y}|_p = Y$ gilt. Dabei ist Π_p bilinear, also $\Pi_p \in T_p^* M \otimes T_p^* M$.

Die Wohldefiniertheit wird in der folgenden Proposition gezeigt. Damit die Definition Sinn ergibt, muss man sich zunächst kurz überlegen, dass man zu jedem Vektor $Y \in T_p M$ überhaupt ein $\tilde{Y}$ wie oben findet. Man wähle eine Karte $\varphi: U \longrightarrow V$ mit $p \in U$. Wir schreiben $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \Big|_p$ mit $Y^j \in \mathbb{R}$. Dann erhalten wir ein $\tilde{Y} \in \mathcal{X}(U)$ mit den gewünschten Eigenschaften durch die Definition $\tilde{Y} := Y^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j}$, wobei wir nun eben Y_j als konstante Funktion interpretieren.

Proposition 1.82. $\Pi_p(X, Y)$ hängt nicht von der Wahl von $\tilde{Y}$ ab und es gilt

$$\Pi_p(X, Y) = \Pi_p(Y, X) = \langle W_p(X), Y \rangle = \langle X, W_p(Y) \rangle.$$

Das heißt: Π_p ist symmetrisch, und W_p ist selbstadjungiert.

Beweis: Wir verwenden die Einsteinsche Summenkonvention. Sei $\varphi: U \longrightarrow V$ eine Karte, $\Phi := \varphi^{-1}$ und $x := \varphi(p)$.

Schreibe $\tilde{Y} = \tilde{Y}^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j}$ mit $\tilde{Y}^j \in C^\infty(U)$. Man beachte $\partial_i \stackrel{(\text{def})}{=} \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$.

Dann gilt

$$Y = \tilde{Y}^j(p) \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \Big|_p, \quad X = X^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p.$$

Rechne damit

$$\partial_X \tilde{Y} = X^i \partial_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \Big|_p \left(\tilde{Y}^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) = X^i \left(\left(\partial_i \tilde{Y}^j \right) \frac{\partial}{\partial \varphi^j} + \tilde{Y}^j \partial_i \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) \Big|_p.$$

Dann $\pi_p^N(\partial_X \tilde{Y}) = X^i \tilde{Y}^j(p) \pi_p^N \left(\partial_i \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right)$ und mit $\frac{\partial}{\partial \varphi^j} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \circ \varphi$ schließlich

$$\partial_i \frac{\partial}{\partial \varphi^j} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \circ \varphi \right) \circ \varphi^{-1} \right) \circ \varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j} \circ \varphi.$$

Damit

$$\pi_p^N(\partial_X \tilde{Y}) = X^i \tilde{Y}^j \Big|_p \pi_p^N \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_x \right)$$

Also ist $\Pi_p(X, Y) = \langle \nu, \pi_p^N(\partial_X \tilde{Y}) \rangle$ unabhängig von der Wahl von $\tilde{Y}$.

Der Satz von Schwarz liefert

$$\pi_p^N \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j} \right) = \pi_p^N \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^i} \right) \implies \Pi_p(X, Y) = \Pi_p(Y, X).$$

Für $X \in T_p M$ und $\tilde{Y} \in \mathfrak{X}(\tilde{U})$ (mit $\tilde{U} \subseteq M$) gilt

$$0 = \partial_X \underbrace{\langle \tilde{Y}, \nu \rangle}_{=0} = \langle \partial_X \tilde{Y}, \nu|_p \rangle + \langle \tilde{Y}|_p, \partial_X \nu \rangle = \Pi_p(X, Y) - \langle \tilde{Y}|_p, W_p(X) \rangle.$$

Also gilt $\langle Y, W_p(X) \rangle = \Pi_p(X, Y)$. ■

Definiere noch die **Koordinatendarstellung der 2. Fundamentalform** bezüglich der Karte $\varphi : U \rightarrow V$ als

$$h_{ij}(x) := \Pi_p \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \Big|_p \right) = \left\langle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_x, \nu \Big|_p \right\rangle, \quad p = \Phi(x).$$

Offensichtlich sind die Funktionen $h_{ij} : V \rightarrow \mathbb{R}$ glatt.

Bemerkung 1.83. Schreibe $W_p \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p \right) = W_i^j(x) \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \Big|_p$, $x = \varphi(p)$, $W_i^j \in C^\infty(V)$ und

$$h_{ij}(x) = \Pi \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \Big|_p \right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p, W_p \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \Big|_p \right) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p, W_j^\ell(x) \frac{\partial}{\partial \varphi^\ell} \Big|_p \right\rangle = W_j^\ell(x) g_{i\ell}(x).$$

Also gilt $h_{ij} = W_j^\ell g_{i\ell}$. Durch Multiplikation mit g^{is} und Summation über i ergibt sich dann

$$W_j^s = W_j^\ell g_{\ell i} g^{is} = g^{si} h_{ij}.$$

Notation 1.84. Sei $\varphi : U \rightarrow V$ eine Karte. Wird in Zukunft eine Gleichung wie

$$(*) \quad W \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) = W_i^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j}$$

geschrieben, die etwas in Koordinaten beschreibt, so sind die Funktionen und Vektorfelder in p oder in $x = \varphi(p)$ auszuwerten, je nachdem, ob das Objekt auf U oder V definiert ist.

Zum Beispiel sind g_{ij} , h_{ij} und W_i^j auf V definiert, hingegen sind $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ und W auf U definiert. Das heißt mit der Gleichung $(*)$ ist genau genommen das folgende gemeint: $W_p \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p \right) = W_i^j(x) \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \Big|_p$ mit $x = \varphi(p)$.

Die Notation hat zwei Vorteile: Zum einen ist sie kürzer und Informationen, die für einen erfahrenen Mathematiker redundant sind, werden unterdrückt. Zum anderen gibt es so manche Objekte, die in einem Teil der Literatur auf U definiert sind und in anderen Quellen auf V . Durch obige Notation sind die Formeln unabhängig von der gewählten Konvention.

Da Π_p symmetrisch ist, ist W_p selbstadjungiert, also $W_p^* = W_p$. Hieraus folgt aus Linearer Algebra, dass W_p diagonalisierbar ist.

Definition 1.85. Sei wieder $M^m \subset \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit, $k = m + 1$.

- (i) Es existiere ein Einheitsnormalenfeld ν .
 - (a) Die Eigenvektoren von W_p nennt man die **Hauptkrümmungsrichtungen** von M (in $\mathbb{R}^{m+1}$) im Punkt p . Die Eigenwerte heißen **Hauptkrümmungen**.
 - (b) Die Abbildung $p \mapsto \frac{1}{m} \text{Tr}(W_p) =: H_p$ nennt man die **mittlere Krümmung**. Das heißt es gilt $mH_p = \text{Tr}(W_p)$. In einer Karte φ erhalten wir also $mH \circ \varphi^{-1} = g^{ij} h_{ij}$, also insbesondere $H \in C^\infty(U)$. Da ganz M durch Definitionsbereiche von Karten überdeckt wird, haben wir auch $H \in C^\infty(M)$.
- (ii) Gilt $k = 3$ und $m = 2$ und sei ν ein lokales Einheitsnormalenfeld. Dann heißt die Abbildung

$p \mapsto K_p := \det(W_p)$ die **Gaußkrümmung**. Es ist eine glatte Funktion.

Seien $\nu: U \rightarrow \mathbb{S}^2$ und $\hat{\nu}: \hat{U} \rightarrow \mathbb{S}^2$ lokale Einheitsnormalenfelder. Dann gilt für $p \in U \cap \hat{U}$ dass $\nu|_{U \cap \hat{U}} = \pm \hat{\nu}|_{U \cap \hat{U}}$ und damit $W_p^\nu = \pm W_p^{\hat{\nu}}$, also $\det(W_p^\nu) = \det(W_p^{\hat{\nu}})$. Die Gauß-Krümmung hängt also gar nicht davon ab, welches lokale Einheitsnormalenfeld benutzt wird, um sie zu definieren. Da jeder Punkt in M im Definitionsbereich einer Karte liegt, gibt es ein um ihn definiertes Einheitsnormalenfeld. Somit ist die Gauß-Krümmung auf M definiert.

Es gilt dabei:

$$K_p = \det(g^{i\ell} h_{\ell j})_{ij} = \det(g^{i\ell})_{i\ell} \det(h_{\ell j})_{\ell j} = \frac{\det(h_{ij})_{ij}}{\det(g_{ij})_{ij}}.$$

Beispiele 1.86. (a) Betrachte wieder einen Zylinder wie in Beispiel 1.37

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ z \end{pmatrix} \mid z, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$\Phi: (\alpha, \alpha + 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow M, \quad (t, z) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ z \end{pmatrix}$$

eine lokale Parametrisierung von M . Die Abbildung Φ ist nie surjektiv, für jedes α ist eine Gerade in M nicht im Bild von Φ , wie in Abbildung 1.17 angedeutet: die rote Gerade $\{1\} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ ist nicht im Bild von Φ für $\alpha = 0$.

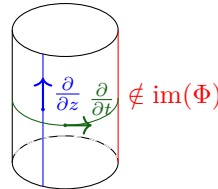


Abbildung 1.17: Der Zylinder M

Sei nun $\alpha = 0$ und $\varphi := (\varphi^1, \varphi^2)^T := \Phi^{-1}$. Dann ist $\varphi^1 \hat{=} t \in (0, 2\pi)$ und $\varphi^2 \hat{=} z \in \mathbb{R}$ also ist

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^1} = \frac{\partial}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

das 1. Koordinatenvektorfeld und das 2. Koordinatenvektorfeld ist gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich $g_{ij} = \delta_{ij}$. Es ist $\nu := \frac{\partial}{\partial t} \times \frac{\partial}{\partial z} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$. Also

$$\partial_{\frac{\partial}{\partial t}} \nu = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\partial_{\frac{\partial}{\partial z}} \nu = \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Also ergibt sich

$$W_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t}, \quad W_p \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) = 0.$$

Damit folgt, dass $\frac{\partial}{\partial t}$ und $\frac{\partial}{\partial z}$ die Hauptkrümmungsrichtungen sind, dass die Hauptkrümmungen -1 und 0 sind und dass damit $H = -\frac{1}{2}$ und $K = 0$ gilt.

- (b) Betrachte nun $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Ein mögliches Einheitsnormalenfeld ist die Abbildung $\nu : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$, $\nu(x) = x$, also $\nu = \text{id}_{\mathbb{S}^m}$. Dann haben wir für $Y \in T_p \mathbb{S}^m$, $p \in \mathbb{S}^n$:

$$\partial_Y \nu = (d_p \text{id}_{\mathbb{S}^m})(Y) = Y,$$

also $W_p(Y) = -Y$. Es folgt $H \equiv -1$. Jeder Tangentialvektor (ungleich Null) ist eine Hauptkrümmungsrichtung, da er Eigenvektor von W zum Eigenwert -1 ist. Wir erhalten auch $\text{II}(X, Y) = -g(X, Y)$. Im Fall $m = 2$ haben wir zudem $K \equiv 1$.

Bemerkung 1.87 (Bedeutung der mittleren Krümmung). Ohne Beweis bemerken wir noch: Sei $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ mit einem Flächeninhalt $\text{vol}(M) = \mu^M(M) = \int_M 1 d\mu^M \in [0, \infty]$.

Dann ist $H \equiv 0$ genau dann, wenn M lokal das Volumen minimiert (siehe Theorem 1.103).

- (i) $m = 1$. $H \equiv 0$ genau dann, wenn M eine Vereinigung von Strecken ist.
- (ii) $m = 2$. $\text{vol}(M) = \text{area}(M)$. Wir haben also: $H \equiv 0$ genau dann, wenn M lokal den Flächeninhalt minimiert. Flächen mit $H \equiv 0$ nennt man **Minimalflächen**.

1.8.3 Ein Ausblick auf höhere Kodimension

Sei $M^m \subset \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit, mit beliebiger Dimension m und beliebiger Kodimension $k - m$, d. h. M sei nicht mehr notwendigerweise eine Hyperfläche.

Definition 1.88. Zu $X, Y \in T_p M$ definieren wir die **vektorwertige 2. Fundamentalform** als

$$\vec{\Pi}_p(X, Y) = \pi_p^N(\partial_X \tilde{Y})$$

wobei $\tilde{Y}$ eine Erweiterung von Y zu einem lokal definierten Vektorfeld ist.

Analog zu Proposition 1.82 zeigt man, dass $\vec{\Pi}_p(X, Y)$ unabhängig von $\tilde{Y}$ ist und dass $\vec{\Pi}_p(X, Y) = \vec{\Pi}_p(Y, X)$.

Falls $k = m + 1$ gilt und ν ein Einheitsnormalenfeld auf M ist, so gilt

$$\vec{\Pi}_p(X, Y) = \Pi_p(X, Y) \cdot \nu.$$

Vorteil: $\vec{\Pi}_p$ ist für alle Untermannigfaltigkeiten definiert.

Es gilt

$$\begin{aligned} \Pi_p: T_p M \times T_p M &\longrightarrow \mathbb{R}, & \Pi_p &\in T_p^* M \otimes T_p^* M \\ \vec{\Pi}_p: T_p M \times T_p M &\longrightarrow N_p M, & \vec{\Pi}_p &\in T_p^* M \otimes T_p^* M \otimes N_p M. \end{aligned}$$

Beispiel 1.89. Sei $m = 1$, $k \geq m$ und $c: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ eine lokale Parametrisierung einer 1-dimensionalen Untermannigfaltigkeit, insbesondere $\dot{c}(t) \neq 0$.

Angenommen $c((a, b)) = M$, dann ist $T_{c(t)} = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}$ eine Basis von $T_{c(t)} M$. Dann ist $\dot{c} \circ c^{-1} \in \mathfrak{X}(M)$ eine Erweiterung von $\dot{c}(t_0) \in T_{c(t_0)} M$. Dann rechne³⁴

$$\vec{\Pi}_{c(t_0)}(\dot{c}(t_0), \dot{c}(t_0)) = \pi_{c(t_0)}^N(\partial_{\dot{c}(t_0)}(\dot{c} \circ c^{-1})) = \pi_{c(t_0)}^N\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}(\dot{c} \circ c^{-1} \circ c)\right) = \pi_{c(t_0)}^N(\ddot{c}(t_0)).$$

Diese Identität wird oft als **Satz von Meusnier** bezeichnet.

Falls $\|\dot{c}(t)\| = \text{const}$, dann gilt

$$0 = \frac{d}{dt} \|\dot{c}(t)\|^2 = 2 \langle \ddot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle.$$

Also $\vec{\Pi}_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = \ddot{c}(t)$.

Definition 1.90. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^k$ Sei $k \geq m$ beliebig und sei $E_1, \dots, E_m$ eine Orthonormalbasis von $T_p M$. Dann setze

$$\vec{H}_p := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \vec{\Pi}_p(E_i, E_i)$$

als das **Mittlere-Krümmungs-Normalenfeld**.

Dabei gilt

$$\vec{H}_p = \frac{1}{m} g^{ij} \pi_p^N \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j} \right).$$

Bemerkung 1.91 (2. FF und Geodätische). Sei $c: (a, b) \longrightarrow M^m \subset \mathbb{R}^k$ glatt mit $\|\dot{c}\| \equiv 1$. Dann sind äquivalent:

- (a) Für alle $t_0 \in (a, b)$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $c|_{(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)}$ die kürzeste Kurve in M von $c(t_0 - \varepsilon)$ nach $c(t_0 + \varepsilon)$ ist.
- (b) $\ddot{c}(t) \perp T_{c(t)} M$ für alle $t \in I$. Das heißt, c ist eine **Geodätische** (vgl. [Übungsblatt 6, Aufgabe 4](#)).

Insbesondere gilt dann $\ddot{c}(t) = \vec{\Pi}(\dot{c}, \dot{c})$, siehe Beispiel 1.89.

³⁴Hier ist die Argumentation noch „recht kurz“. Insbesondere ist hier natürlich auch zu klären, wie $\partial_{\dot{c}(t_0)}(\dot{c} \circ c^{-1})$ zu den obigen Definitionen passt. Man muss dazu zunächst $\dot{c} \circ c^{-1}$ zu einem Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(U)$, U offene Umgebung von $c(t_0)$ in M fortsetzen.

1.9 Theorema egregium

In diesem Abschnitt sei $M^m \subset \mathbb{R}^r$ wieder eine Untermannigfaltigkeit.

Definition 1.92. Seien $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Dann heißt

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z + \nabla_{\nabla_Y X} Z$$

der **riemannsche Krümmungstensor**.

Dabei ist R lokal im folgenden Sinne: Sei $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^r$ so dass $M \cap \mathcal{O} = \hat{M} \cap \mathcal{O}$. Seien $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z} \in \mathfrak{X}(\hat{M})$ so dass $X|_{M \cap \mathcal{O}} = \hat{X}|_{\hat{M} \cap \mathcal{O}}$ (ebenso für Y und Z). Dann gilt auch $\nabla_X Y|_{M \cap \mathcal{O}} = \nabla_{\hat{X}} \hat{Y}|_{\hat{M} \cap \mathcal{O}}$ und somit $R(X, Y)Z|_{M \cap \mathcal{O}} = R(\hat{X}, \hat{Y})\hat{Z}|_{\hat{M} \cap \mathcal{O}}$. In einer Karte $\varphi: U \rightarrow V$ schreibe

$$R\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\right) \frac{\partial}{\partial \varphi^k} = (R_{ijk}{}^\ell \circ \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi^\ell} \in \mathfrak{X}(U).$$

Dann gilt $R_{ijk}{}^\ell \in \mathcal{C}^\infty(V)$.

Die 2. Aufgabe auf dem Tutoriumsblatt 5 besagt für $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$:

$$R(fX, Y)Z = fR(X, Y)Z = R(X, fY)Z = R(X, Y)(fZ).$$

Da R zudem offensichtlich in allen drei Argumenten $\mathbb{R}$ -linear ist, ergibt sich für $X = X^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j}$, $Z = Z^k \frac{\partial}{\partial \varphi^k}$ auf U , dass

$$R(X, Y)Z = X^i Y^j Z^k R_{ijk}{}^\ell \frac{\partial}{\partial \varphi^\ell}. \quad (1.18)$$

Hierbei ist wieder gemäß Notation 1.84 $R_{ijk}{}^\ell$ als $R_{ijk}{}^\ell \circ \varphi^{-1}$ zu lesen.

Korollar 1.93. Sei M^m eine gegebene Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^r$, und sei $p \in M$. Dann hängt $(R(X, Y)Z)|_p$ nur von $X|_p, Y|_p$ und $Z|_p$ ab. Man erhält eine trilineare Abbildung

$$R_p: T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M, \quad (v, w, \eta) \mapsto (R(X, Y)Z)_p$$

Wobei $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$ Fortsetzungen von v, w, η sind und $p \in U \subseteq M$.

Also gilt $R_p \in T_p^* M \otimes T_p^* M \otimes T_p^* M \otimes T_p M$. Wir nennen R bzw. R_p auch den **riemannschen Krümmungstensor**.

Definition 1.94. Sei $f: M \rightarrow \hat{M}$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\hat{X} \in \mathfrak{X}(\hat{M})$. Dann heißt X **f -verwandt** mit $\hat{X}$, falls für alle $p \in M$ gilt, dass $\hat{X}|_{f(p)} = (d_p f)(X|_p)$. In anderen Worten:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\mathcal{J}f} & T\hat{M} \\ \uparrow (\text{id}, X) & \circlearrowleft & \uparrow (\text{id}, \hat{X}) \\ M & \xrightarrow{f} & \hat{M} \end{array}$$

³⁵ Falls f ein Diffeomorphismus ist, dann ist X mit $\hat{X}$ genau dann f -verwandt, wenn $\hat{X}$ mit

³⁵Wir erinnern daran, dass der 1-Jet $\mathcal{J}f$ im wesentlichen dasselbe wie das Differential df ist, nur dass der Basispunkt $p \in M$ und sein Bild $f(p)$ mitberücksichtigt wird.

X f^{-1} -verwandt ist. Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dann setze $\hat{X}|_{f(p)} := (d_p f) \left(X|_p \right)$ und erhalte ein zu X f -verwandtes $\hat{X} \in \mathfrak{X}(\hat{M})$.

Bemerkung 1.95. Aus Korollar 1.72 und der Definition des riemannschen Krümmungstensors folgt unmittelbar:

Sei $f: M \rightarrow \hat{M}$ eine (lokale) Isometrie und $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ seien f -verwandt mit $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z} \in \mathfrak{X}(\hat{M})$. Dann ist $R(X, Y)Z$ f -verwandt mit $\hat{R}(\hat{X}, \hat{Y})\hat{Z}$. Das heißt

$$d_p f(R(X, Y)Z) = (\hat{R}(\hat{X}, \hat{Y})\hat{Z})_{f(p)} \quad \forall p \in M.$$

Satz 1.96 (Gauß-Gleichung). Sei $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ eine Hyperfläche mit ENF ν und $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Dann gilt

$$R(X, Y)Z = \Pi(Y, Z)W(X) - \Pi(X, Z)W(Y) \quad (1.19)$$

oder offensichtlich äquivalent³⁶

$$R(X, Y)Z = \langle Z, W(Y) \rangle W(X) - \langle Z, W(X) \rangle W(Y).$$

Schreibe lokal in Koordinaten:

$$R_{ijk}{}^\ell = h_{jk}W_i{}^\ell - h_{ik}W_j{}^\ell. \quad (1.20)$$

Bemerkung. Es sind äquivalent:

- (i) Es gilt (1.19) für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,
- (ii) Es gilt (1.19) für alle $p \in M$ und für alle $X, Y, Z \in T_p M$,
- (iii) Es gilt (1.20) für alle Karten eines Atlanten.

Beweis von Satz 1.96: Zeige zunächst (1.20) in einer Karte $\varphi: U \rightarrow V$. Sei $\Phi := \varphi^{-1}$ und $x = \varphi(p)$, also $p = \Phi(x)$. Dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_x &= \left(\partial_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) \Big|_p = \underbrace{\pi_p^T \left(\partial_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \Big|_p \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right)}_{= \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \Big|_p} + \underbrace{\pi_p^N \left(\partial_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \Big|_p \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right)}_{= \Pi_p \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \Big|_p \right) \cdot \nu \Big|_p} \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \Big|_p + h_{ij}(x) \cdot \nu(p). \end{aligned}$$

Erneutes Ableiten liefert dann (wir lassen hierbei die Punkte weg, an denen wir die Ausdrücke auswerten, wobei wir der Konvention von Notation 1.84 folgen). Insbesondere verschmelzen durch die Identifikation von p mit $\varphi(p)$ die Bedeutungen von $\partial_i \stackrel{(\text{def})}{=} \partial_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}}$ und $\frac{\partial}{\partial x^i}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^j}} \frac{\partial}{\partial \varphi^k} + h_{jk} \cdot \nu \right) = \partial_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^j}} \frac{\partial}{\partial \varphi^k} + h_{jk} \cdot \nu \right) \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^j}} \frac{\partial}{\partial \varphi^k} + \pi^N \left(\partial_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^j}} \frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right) + \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} \cdot \nu + h_{jk} \cdot \partial_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \nu. \end{aligned}$$

³⁶Prägen Sie sich die Version ein, die Sie sich besser merken können, welche ist egal.

Das heißt

$$\pi^T \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} \right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^j}} \frac{\partial}{\partial \varphi^k} - h_{jk} \cdot W \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right)$$

Aber nach dem Satz von Schwarz gilt:

$$\pi^T \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} \right) = \pi^T \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^j \partial x^i \partial x^k} \right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \frac{\partial}{\partial \varphi^k} - h_{ik} \cdot W \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right)$$

und dies ergibt dann

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^j}} \frac{\partial}{\partial \varphi^k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \frac{\partial}{\partial \varphi^k} &= h_{jk} \cdot W \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) - h_{ik} \cdot W \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) \\ &= (h_{jk} \cdot W_i^\ell - h_{ik} \cdot W_j^\ell) \frac{\partial}{\partial \varphi^\ell}, \end{aligned}$$

wobei wir $W \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) = W_i^\ell \frac{\partial}{\partial \varphi^\ell}$ benutzt haben. Wir nutzen nun Eigenschaften 1.68 (iv), d. h.

$$A := \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \frac{\partial}{\partial \varphi^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^j}} \frac{\partial}{\partial \varphi^i} =: B.$$

$$\begin{aligned} R_{ijk}^\ell \frac{\partial}{\partial \varphi^\ell} &\stackrel{(\text{def})}{=} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^j}} \frac{\partial}{\partial \varphi^k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \frac{\partial}{\partial \varphi^k} - \cancel{\nabla_A \frac{\partial}{\partial \varphi^k}} + \cancel{\nabla_B \frac{\partial}{\partial \varphi^k}} \\ &= (h_{jk} W_i^\ell - h_{ik} W_j^\ell) \frac{\partial}{\partial \varphi^\ell}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Und die Koeffizienten dieser Gleichung ergeben (1.20).

Im Fall $X = \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial \varphi^j}$ und $Z = \frac{\partial}{\partial \varphi^k}$ ist (1.21) gerade die Aussage von (1.19). Dies gilt für alle $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$, d. h. (1.19) gilt, wenn X, Y und Z eine Basis durchläuft. Auf Grund der Trilinearität beider Seiten folgt somit (1.19) für beliebige X, Y und Z . ■

Bemerkung 1.97. Es gibt auch eine Version des Satzes³⁷ für beliebige Untermannigfaltigkeiten $M^m \subset \mathbb{R}^k$, nämlich:

$$\langle R(X, Y)Z, \tilde{Z} \rangle = \langle \vec{\Pi}(Y, Z), \vec{\Pi}(X, \tilde{Z}) \rangle - \langle \vec{\Pi}(X, Z), \vec{\Pi}(Y, \tilde{Z}) \rangle.$$

Diese Version benötigt auch kein Einheitsnormalenfeld.³⁸ Ich kann mir diese Formel am besten in der Form

$$\langle R(X, Y)Z, \tilde{Z} \rangle = \text{„det“} \begin{pmatrix} \vec{\Pi}(X, \tilde{Z}) & \vec{\Pi}(Y, \tilde{Z}) \\ \vec{\Pi}(X, Z) & \vec{\Pi}(Y, Z) \end{pmatrix}$$

merken, denn die rechte Seite ist – wie wir im folgenden Theorem sehen werden – mit einer Determinante einer 2×2 -Matrix, nämlich der Gauß-Krümmung, eng verbunden. Bei der Interpretation der Determinante „det“ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ ist aber Vorsicht geboten, denn die Einträge der Matrix sind Vektoren, und deswegen sind die Produkte ad und bc als Skalarprodukte zu interpretieren.

Theorem 1.98 (Theorema egregium von Gauß, ca. 1827). *Sei $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine Untermannigfaltigkeit.*

³⁷Dieser wird hier nicht bewiesen.

³⁸Wir wollen diese Version hier nicht zeigen, denn in aufbauenden Vorlesungen brauchen wir sowieso auch noch Verallgemeinerungen dieser Aussage.

tigkeit und E_1, E_2 eine Orthonormalbasis von $T_p M$. Dann gilt

$$K_p = \langle R(E_1, E_2)E_2, E_1 \rangle.$$

Beweis: Schreibe $W(E_\alpha) = W_\alpha^\beta E_\beta$, also $W_\alpha^\beta = \langle W(E_\alpha), E_\beta \rangle = \Pi(E_\alpha, E_\beta)$. Dann rechne

$$\begin{aligned} \langle R(E_1, E_2)E_2, E_1 \rangle &= \Pi(E_2, E_2) \langle W(E_1), E_1 \rangle - \Pi(E_1, E_2) \langle W(E_2), E_1 \rangle \\ &= W_2^2 W_1^1 - W_1^2 W_2^1 = \det \begin{pmatrix} W_1^1 & W_2^1 \\ W_1^2 & W_2^2 \end{pmatrix} = \det(W_p) = K_p. \end{aligned}$$

■

Korollar 1.99. Seien $M, \hat{M}$ Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$ mit Gaußkrümmungen $K \in C^\infty(M)$ und $\hat{K} \in C^\infty(\hat{M})$. Ist $f: M \rightarrow \hat{M}$ eine lokale Isometrie, so gilt $\hat{K} \circ f \equiv K$. ■

Ein paar historische Bemerkungen: Der lateinische Name dieses Theorems bedeutet „hervorragend wichtigen Lehrsatz“. Dieser Name und die Tatsache, dass dieser fast 200 Jahre alte Name sich bis heute erhalten hat, deutet darauf hin, welche wichtige Rolle dieser Satz in der Entwicklung der Mathematik und insbesondere der Geometrie der Untermannigfaltigkeiten gespielt hat und immer noch spielt. Die entscheidenden Ideen zu dem Satz kamen Gauß angeblich bei der Landvermessung der Hannoveranerschen Gegend in den Jahren 1821–1825. Das Theorema egregium war ein wichtiger Meilenstein auf dem Weg zur Entdeckung der hyperbolischen Ebene. Eine verallgemeinerte Form des Gauß-Gleichung in Satz 1.96 ist auch von zentraler Bedeutung für Rechnungen in der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Beispiel 1.100. (i) Die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \times \{0\} \rightarrow Z, \quad \begin{pmatrix} t \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ s \end{pmatrix}$$

für den Zylinder $Z := \text{im}(f)$ ist eine lokale Isometrie. Ein Einheitsnormalenfeld auf $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ ist gegeben durch $\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Also gilt $W \equiv 0$ und damit $\Pi \equiv 0$, also auch $K^{\mathbb{R}^2 \times \{0\}} \equiv 0$.

Aus Korollar 1.99 folgt, dass die Gaußkrümmung von Z konstant verschwindet.

(ii) Für $M = \mathbb{S}^m$ ist $\nu|_p := p$ ein Einheitsnormalenfeld. Das heißt $W(X) = -\partial_X \nu = -X$ und damit $\Pi = -I$ also $\Pi(X, Y) = -\langle X, Y \rangle$. Damit rechne

$$R(X, Y)Z = -\Pi(Y, Z)X + \Pi(X, Z)Y = \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y.$$

Im Spezialfall $m = 2$ erhalten wir

$$K = \langle R(E_1, E_2)E_2, E_1 \rangle = \langle E_2, E_2 \rangle \langle E_1, E_1 \rangle - \langle E_1, E_2 \rangle^2 = 1.$$

Zu jeder offenen Menge $U \subset \mathbb{S}^2$ gibt es also keine Isometrie $U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 22.05.

1.10 Variationsformel

Ziel dieses Abschnitts ist die folgenden Aussagen zu präzisieren und beweisen:

- (i) Sei $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche, die lokal den Flächeninhalt minimiert. Dann gilt $H \equiv 0$.
- (ii) Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow M^m \subset \mathbb{R}^r$ die kürzeste aller Kurven $\tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow M$ mit $\tilde{\gamma}(a) = \gamma(a)$, $\tilde{\gamma}(b) = \gamma(b)$ und $\|\dot{\gamma}(t)\| = \text{const.}$ Dann ist γ eine Geodätische in M , d. h. für alle $t \in [a, b]$ gilt $\ddot{\gamma}(t) \in N_{\gamma(t)}M$.

Umkehrungen dieser Aussagen sind lokal ebenfalls richtig.³⁹

Definition 1.101. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^r$ eine Untermannigfaltigkeit. Eine **Variation** von M ist eine glatte Abbildung

$$F = F_\bullet: M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^r, \quad (p, t) \mapsto F(p, t) = F_t(p)$$

so dass $F_0 = \text{id}_M$.

Der **Träger** $\text{supp}(F_\bullet)$ ist der Abschluss in M der Menge

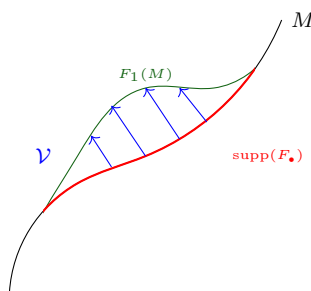
$$\left\{ p \in M \mid F(p, t) \neq p \text{ für ein } t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \right\}$$

in M . Das heißt für alle $q \in \overline{M \setminus \text{supp}(F_\bullet)}$ gilt $F_t(q) = q$ für alle t . Man nennt $F_\bullet$ eine **Variation mit kompaktem Träger**, falls $\text{supp}(F_\bullet)$ kompakt ist.

Das **Variationsfeld** von $F_\bullet$ ist die glatte Abbildung

$$\mathcal{V}: M \rightarrow \mathbb{R}^r, \quad q \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F_t(q).$$

Für $\mathcal{V}: M \rightarrow \mathbb{R}^r$ ist $\text{supp}(\mathcal{V}) := \overline{\mathcal{V}^{-1}(\mathbb{R}^r \setminus \{0\})}$ der **Träger des Variationsfeldes**.



Bemerkung 1.102.

- (i) Es gilt $\text{supp}(\mathcal{V}) \subset \text{supp}(F_\bullet)$, aber im Allgemeinen gilt keine Gleichheit.
- (ii) Für gegebenes glattes $\mathcal{V}: M \rightarrow \mathbb{R}^r$ definiere $F^\mathcal{V}(p, t) := p + t\mathcal{V}(p)$. Dabei ist $F^\mathcal{V}$ glatt und erfüllt $F^\mathcal{V}(p, 0) = p$, also ist $F^\mathcal{V}$ eine Variation von M mit Variationsfeld $\mathcal{V}$ und $\text{supp}(\mathcal{V}) = \text{supp}(F^\mathcal{V})$.
- (iii) Ist $F_\bullet$ eine Variation mit kompaktem Träger, dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ so dass $F_t(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^r$ für alle $|t| < \varepsilon_0$ ist. (Wir wollen diese Aussage nicht beweisen,

³⁹Wir werden die Umkehrungen aber unbewiesen lassen

da der Beweis etwas aufwändiger ist. Recht einfach folgt aber aus Stetigkeitsgründen, dass ein $\varepsilon_1 > 0$ gibt, so dass F_t für alle t mit $|t| < \varepsilon_1$ eine Immersion ist. Diese schwächere Aussage ist für unsere Zwecke eigentlich schon ausreichend. Denn man kann die Formel für das Volumen naheliegend auf Immersionen so ausdehnen, dass das gewünschte herauskommt: wie folgt:)

- (iv) Ist M eine Untermannigfaltigkeit und $F : M \rightarrow \mathbb{R}^r$ eine stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit, so kann man definieren

$$\text{vol}(F : M \rightarrow \mathbb{R}^r) := \int_M \sqrt{\det \underbrace{((d_p F)^T \circ d_p F)}_{\in \text{End}(T_p M)}} d\mu^M(p) \in [0, \infty].$$

Ist $F(M)$ eine Untermannigfaltigkeit und $F : M \rightarrow F(M)$ ein Diffeomorphismus, so zeigt man leicht, dass $\text{vol}(F : M \rightarrow \mathbb{R}^r) = \text{vol}(M)$. Wir haben das Volumen von Untermannigfaltigkeiten erweitert. Erlaubt sind nun zum Beispiel Untermannigfaltigkeiten, die sich selbst durchdringen oder nicht-glatte Stellen besitzen. Insbesondere ist dann $\text{vol}(F_t : M \rightarrow \mathbb{R}^r)$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ definiert und alle folgenden Beweise gelten auch in dieser größeren Allgemeinheit.

Theorem 1.103 (Variationsformel). *Ist $F : M^m \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^r$ eine Variation von M mit kompaktem Träger. Dann gilt für jede kompakte Menge $K \supset \text{supp}(F_\bullet)$:*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Vol}(F_t(K)) = -m \int_M \langle \mathcal{V}, \vec{H} \rangle d\mu^M.$$

Bemerkung. Falls $\text{Vol}(M) < \infty$, dann ist auch $\text{Vol}(F_t(M)) < \infty$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ und es gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \overbrace{\text{Vol}(F_t(M))}^{=\text{Vol}(F_t(K)) + \text{Vol}(M \setminus K)} = -m \int_M \langle \mathcal{V}, \vec{H} \rangle d\mu^M.$$

Beachte dass $F_t(M \setminus K) = M \setminus K$.

Lemma 1.104. *Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $0 \in (a, b)$ und sei*

$$(a, b) \rightarrow \text{Gl}_m(\mathbb{R}), \quad t \mapsto A_t$$

in $\mathcal{C}^1$. Dann gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(A_t) = (\det(A_0)) \text{Tr} \left(A_0^{-1} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A_t \right).$$

Beweis: Definiere $B_t := A_0^{-1} A_t$. Dann gilt $B_0 = \mathbb{1}$ und $\det(A_t) = \det(A_0) \det(B_t)$. Dann bleibt zu zeigen, dass $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(B_t) = \text{Tr} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} B_t \right)$.
Schreibe $B_t = (b_{ij}(t))_{ij}$. Dann gilt

$$\det(B_t) = b_{11}(t) \cdots b_{mm}(t) + \sum_{\text{id} \neq \sigma \in \mathcal{S}_m} \text{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)}(t) \cdots b_{m\sigma(m)}(t).$$

In den Summanden der zweiten Summe sind mindestens zwei Faktoren Null für $t = 0$, im ersten Summanden sind alle Faktoren Eins für $t = 0$.

Das heißt, es gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (b_{1\sigma(1)}(t) \cdots b_{m\sigma(m)}(t)) = 0 \quad \forall \sigma \neq \text{id}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (b_{11}(t) \cdots b_{mm}(t)) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (b_{11}(t) + \dots + b_{mm}(t)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Tr } B_t = \text{Tr} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} B_t \right). \end{aligned}$$

Also folgt die Behauptung. ■

Bemerkung. Im Beweis von Theorem 1.103 werden der Einfachheit halber zwei Annahmen getroffen:

- (i) Es gibt eine Karte $\varphi: U \rightarrow V$ mit $K \subset U$,
- (ii) Es gilt $\mathcal{V}(p) \perp T_p M$ für alle $p \in M$.

Dabei wird der allgemeine Fall ohne Annahme (i) ähnlich gezeigt, wenn man eine „Partition der Eins“ nutzt.

Im allgemeinen Fall ohne Annahme (ii) kann durch Uparametrisierung eine Variation mit $\mathcal{V}(p) \perp T_p M$ erreicht werden.

Beweis von Theorem 1.103: Es gibt ein $\epsilon_0 \in (0, \epsilon]$, so dass für alle $t \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ die Funktion $\Phi_t := F_t \circ \varphi^{-1}: V \rightarrow F_t(U)$ eine lokale Parametrisierung von $F_t(M)$ ist. Setze $\varphi_t := (\Phi_t)^{-1} = \varphi \circ F_t^{-1}: F_t(U) \rightarrow V$, dies ist also eine Karte von $F_t(M)$.

Schreibe weiter $g_{ij}^t := g_{ij}^{\varphi_t}$. Dann ist⁴⁰

$$\eta: V \times (-\epsilon_0, \epsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, t) \mapsto \sqrt{|\det(g_{ij}^t(x))_{ij}|}$$

glatt in x und t und es gilt

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \eta(x, t) &= \frac{\text{sgn}(\det(g_{ij}^0(x)))}{2\eta(x, 0)} \cdot \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(g_{ij}^t(x)) \\ &= \frac{|\det(g_{ij}^0(x))|}{2\eta(x, 0)} \text{Tr} \left(\left(\sum_{k=1}^m g^{\ell k}(x) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g_{ks}^t(x) \right) \right)_{\ell s} \right) \\ &= \frac{1}{2} \eta(x, 0) \sum_{k, \ell=1}^m g^{\ell k}(x) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g_{k\ell}^t(x). \end{aligned}$$

Mit $(g^{ij}) := (g_{ij}^0)^{-1}$.

Es gilt $g_{k\ell}^t = \langle \frac{\partial \Phi_t}{\partial x^k}, \frac{\partial \Phi_t}{\partial x^\ell} \rangle$, also:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g_{k\ell}^t = \left\langle \left. \frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial x^k \partial t} \right|_{t=0}, \frac{\partial \Phi_0}{\partial x^\ell} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Phi_0}{\partial x^k}, \left. \frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial t \partial x^\ell} \right|_{t=0} \right\rangle$$

⁴⁰Hier wurde in der Vorlesung gefragt: wissen wir nicht bereits, dass $\det(g_{ij}^t(x))$ immer positiv ist? Die Antwort ist „Ja“, man kann also den sgn-Term und die Betragsstriche hier weglassen, das wäre vielleicht sogar etwas einfacher. So wie es steht, ist es auch richtig und hat zudem den Vorteil, dass sich der Beweis dann auch auf nicht positiv definite (indefinite) Skalarprodukte erweitert.

$$= \underbrace{\left\langle \frac{\partial}{\partial x^k} \mathcal{V}(\Phi_0(\bullet)), \frac{\partial \Phi_0}{\partial x^\ell} \right\rangle}_{= (*)} + \underbrace{\left\langle \frac{\partial \Phi_0}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^\ell} \mathcal{V}(\Phi_0(\bullet)) \right\rangle}_{= (\dagger)}.$$

Wir betrachten zunächst den Summanden $(*)$.

$$(*) = \frac{\partial}{\partial x^k} \underbrace{\left\langle \mathcal{V} \circ \Phi_0, \frac{\partial \Phi_0}{\partial x^\ell} \right\rangle}_{=0} - \left\langle \mathcal{V} \circ \Phi_0, \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^k \partial x^\ell} \right\rangle = - \left\langle \mathcal{V} \circ \Phi_0, \underbrace{\pi^N \left(\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^k \partial x^\ell} \right)}_{=\vec{\Pi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^k}, \frac{\partial}{\partial \varphi^\ell} \right)} \right\rangle.$$

Der erste Summand verschwindet hierbei auf Grund der unserer Annahme $\mathcal{V}(p) \perp T_p M$. Wenn wir $(\dagger)$ an Stelle von $(*)$ berechnen, so müssen wir k und ℓ vertauschen und erhalten dann letztendlich auf Grund der Symmetrie von Π dasselbe, d. h. $(\dagger) = (*)$. Also (mit ESK)

$$g^{\ell k} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g_{k\ell}^t \right) = g^{\ell k} ((*) + (\dagger)) = -2g^{\ell k} \left\langle \mathcal{V}, \vec{\Pi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^k}, \frac{\partial}{\partial \varphi^\ell} \right) \right\rangle.$$

Wenn $E_1, \dots, E_m$ eine Orthonormalbasis von $T_p M$ ist, dann gilt (ohne ESK)

$$m\vec{H} = \sum_{i=1}^m \vec{\Pi}(E_i, E_i) = \sum_{k,\ell=1}^m g^{\ell k} \vec{\Pi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^k}, \frac{\partial}{\partial \varphi^\ell} \right).$$

Vergleiche dazu [Übungsblatt 7, Aufgabe 3](#).

Also gilt (mit ESK)

$$g^{\ell k} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g_{k\ell}^t = -2 \left\langle \mathcal{V}, m\vec{H} \right\rangle$$

und damit:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Vol}(F_t(K)) &= \int_{\varphi(K)} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \eta(x, t) \, d\lambda_m = \int_{\varphi(K)} \eta(x, t) \left(-m \left\langle \mathcal{V}, \vec{H} \right\rangle \right) d\lambda_m \\ &= -m \int_K \left\langle \mathcal{V}, \vec{H} \right\rangle d\mu^M. \end{aligned}$$

Beachte dabei dass $d\mu^M = \eta(x, t) \, d\lambda_m$. ■

Theorem 1.105. *Sei $M^m \subset \mathbb{R}^r$ eine Untermannigfaltigkeit. Es gebe eine offene Menge $U \subset M$ so dass jede Variation $F : M \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^r$ von M mit kompaktem Träger in U das folgende erfüllt:*

$$\text{Vol}(F_t(U)) \geq \text{Vol}(U) < \infty \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Dann gilt $\vec{H}|_U \equiv 0$.

Definition 1.106. *Eine Untermannigfaltigkeit $M^m \subset \mathbb{R}^r$ heißt **minimale Untermannigfaltigkeit**, falls $\vec{H} \equiv 0$. Eine minimale Fläche in $\mathbb{R}^3$ heißt **Minimalfläche**.*

Bemerkungen 1.107.

- (1) Das Wort „minimal“ ist etwas irreführend, denn dies bedeutet nur, dass die Untermannigfaltigkeit lokal und unter kleinen Störungen das Volumen minimiert. Wenn M eine Minimalfläche ist, so bedeutet dies eben *nicht*, dass M den Flächeninhalt minimiert. Es sind hier zwei Klassen von Gegenbeispielen zu nennen: (a) Beispiele, die durch globale Änderungen

zu einem kleineren Flächeninhalt führen, (b) instabile Minimalflächen.

- (a) Zum Beispiel ist $M = \mathbb{R}^2 \times \{0, 1\}$ eine Minimalfläche in $\mathbb{R}^3$. Wenn man aber die kompakte Menge $[0, R]^2 \times \{0, 1\}$, $R > 10$ aus M herausnimmt, so kann man dieses „Loch“ mit einer kleineren Fläche (mit Flächeninhalt $4R + \varepsilon$ mit beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ statt des weggenommenen Flächeninhalts $2R^2$) schließen. Dies ist keine Variation, sondern eine globale Änderung.
- (b) Es gibt aber auch *instabile* Minimalflächen, das sind $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit H , die eine Variation $F_\bullet$ mit kompaktem Träger besitzen, so dass $\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \text{Vol}(F_t(K)) < 0$. Konkrete Beispiele findet man in [21, Fig. 13. in Abschnitt 5.1]. Oder man betrachte das stabile und instabile Katenoid auf der Seite <http://facstaff.susqu.edu/brakke/evolver/examples/cat/catenoids.html>. Beide Minimalflächen füllen hierbei dasselbe Paar von Kreisen, aber die obere Minimalfläche minimiert unter allen Variationen (stabil), wohingegen die andere instabil ist.
- (2) Es gibt einige Mathematiker, die sich sehr intensiv mit Minimalflächen beschäftigen. Dies führt zu sehr vielen Beispielen, die nicht nur eine gute Anschauung vermitteln, sondern auch ästhetisch sehr schön sind. Ich verweise hierfür auf die Link-Sammlung auf der Webseite der Vorlesung oder auf den Übersichtsartikel [20].

Lemma 1.108. Sei $W \subseteq \mathbb{R}^r$ und $p \in W$. Es gibt eine C^∞ -Funktion $f: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit kompaktem Träger $\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^r \mid f(x) \neq 0\}}$ so dass $f(p) = 1$, $f \geq 0$ und $\text{supp}(f) \subset W$.

Beweis: Betrachte

$$\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(s) := \begin{cases} 0 & , s \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{s}} & , s > 0. \end{cases}$$

Zeige nun induktiv

$$\psi^{(k)}(s) = \frac{p_k(s)}{s^{2k}} e^{-\frac{1}{s}}$$

für ein Polynom p_k . Dann gilt $\lim_{s \searrow 0} \psi^{(k)}(s) = 0$, also ist ψ glatt auf $\mathbb{R}$.

Sei nun $\delta > 0$, so dass $\overline{B_\delta(p)} \subset W$. Dann setze

$$f(q) := \frac{\psi(\delta^2 - 4\|q - p\|^2)}{\psi(\delta^2)}.$$

Für $\|q - p\| \geq \frac{\delta}{2}$ gilt dann $f(q) = 0$, und damit gilt $\text{supp}(f) \subset \overline{B_{\delta/2}(p)}$.

Außerdem $f(p) = 1$ und $f \in C^\infty$. ■

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 26.05.

Beweis von Theorem 1.105: Angenommen es gebe $p \in U$ mit $\vec{H}(p) \neq 0$. Wähle $\mathcal{V}(p) \in N_p M$ mit $\langle \vec{H}(p), \mathcal{V}(p) \rangle > 0$. Ein Vektor, der dies erfüllt, ist $\mathcal{V}(p) := \vec{H}(p)$. Da $q \mapsto \langle \vec{H}(q), \mathcal{V}(p) \rangle$ stetig ist, gibt es ein $W \subseteq \mathbb{R}^r$ mit $p \in W \cap M \subset U$, $\langle \vec{H}(q), \mathcal{V}(p) \rangle > 0 \quad \forall q \in W \cap M$ und $W \cap M \subset W$ abgeschlossen.

Bestimme $f \in C^\infty(\mathbb{R}^r)$ wie in Lemma 1.108. Definiere $\mathcal{V}(q) := f(q) \cdot \pi_q^N(\mathcal{V}(p))$. Dann gilt

$$\langle \mathcal{V}(q), \vec{H}(q) \rangle = \underbrace{f(q)}_{\geq 0} \underbrace{\langle \mathcal{V}(p), \vec{H}(q) \rangle}_{> 0 \text{ auf } W \cap M} \begin{cases} \geq 0 & \text{auf } M \\ = 0 & \text{auf } M \setminus W \\ > 0 & \text{in Umgebung von } p. \end{cases}$$

Setze $F_t(q) := q + t\mathcal{V}(q)$. Wir haben $\text{supp}(F_\bullet) = \text{supp}(\mathcal{V}) \subset U$. Nach Konstruktion von f gilt $\text{supp}(f) \subset W \cap M$. Wir erhalten $\text{supp}(F_\bullet) \subset \text{supp}(f) \cap M$. Also ist $\text{supp}(F_\bullet)$ abgeschlossen im kompaktem Träger $\text{supp}(f)$.

Nach der Variationsformel gilt nun

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Vol}(F_t(U)) = -m \int_U \underbrace{\langle \vec{H}(q), \mathcal{V}(q) \rangle}_{\geq 0} d\mu^M(q) < 0.$$

Das (strikte) $<$ -Zeichen erhalten wir, da der Integrand stetig ist und in p positiv ist. Das heißt $\text{Vol}(F_t(U)) < \text{Vol}(U)$ für $t > 0$ und t nahe 0. Widerspruch. ■

Satz 1.109. Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ eine glatte Kurve in einer Untermannigfaltigkeit $M^m \subset \mathbb{R}^r$ mit $\|\dot{\gamma}(t)\| = \text{const}$, und es gelte für alle Kurven $\tau: [a, b] \rightarrow M$ mit $\tau(a) = \gamma(a)$ und $\tau(b) = \gamma(b)$, dass $\mathcal{L}(\tau) \geq \mathcal{L}(\gamma)$. Dann ist γ eine Geodätische (Wdh.: d. h. $\ddot{\gamma}(t) \in N_{\gamma(t)}M$).

Bemerkung 1.110.

- (i) Die Umkehrung in Satz 1.109 gilt nicht. Betrachte $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ in der S^2 . Dann ist γ eine Geodätische. Die Kurve $\gamma|_{[0, t_1]}$ ist die kürzeste Verbindungskurve von $\gamma(0)$ nach $\gamma(t_1)$, falls $t_1 < \pi$, aber dies gilt nicht mehr für $t_1 \in (\pi, 2\pi)$.

- (ii) Lokal gilt jedoch die Umkehrung von Satz 1.109:

Ist γ eine Geodätische, so besitzt jedes $t \in (a, b)$ ein $\varepsilon > 0$ so dass $\gamma|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}$ die kürzeste Verbindungskurve zwischen den Endpunkten in M ist. (Ohne Beweis)

Beweis von Satz 1.109: Ohne Einschränkung sei $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ injektiv und $\gamma((a, b))$ eine Untermannigfaltigkeit.

Es gilt $0 = \frac{d}{dt} \|\dot{\gamma}(t)\|^2 = 2 \langle \ddot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle$, also $\ddot{\gamma}(t) \perp \dot{\gamma}(t)$.

Angenommen $\ddot{\gamma}(t_0) \notin N_{\gamma(t_0)}M$. GE gelte $t_0 \notin \{a, b\}$.

Dann wähle $\mathcal{V}(t_0) \perp \dot{\gamma}(t_0)$ mit $\mathcal{V}(t_0) \in T_{\gamma(t_0)}M$, $\langle \mathcal{V}(t_0), \ddot{\gamma}(t_0) \rangle > 0$ und $\mathcal{V}(t_0) \perp \dot{\gamma}(t_0)$. Eine mögliche Wahl von $\mathcal{V}(t_0)$ ist $\mathcal{V}(t_0) := \pi_{\gamma(t_0)}^T(\ddot{\gamma}(t_0))$.

Setze $\mathcal{V}(t_0)$ fort zu $\mathcal{V}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^r$ mit $\text{supp}(\mathcal{V}) \subset (a, b)$. Durch Methoden, die ähnlich zu denen im vorangehenden Beweis sind, können wir erreichen, dass für alle $t \in (a, b)$ gilt: $\mathcal{V}(t) \perp \dot{\gamma}(t)$, $\mathcal{V}(t) \in T_{\gamma(t)}M$, $\langle \mathcal{V}(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle \geq 0$ und $\text{supp } \mathcal{V} \subset (a, b)$.

Dann: $F_s(t) = \pi(\gamma(t) + s\mathcal{V}(t)) \in M$, wobei π die Projektion auf den nächsten Punkt in M ist. (Dies ist für s nahe 0 wohldefiniert und glatt.⁴¹)

⁴¹Da wir dies nicht zeigen, entsteht an dieser Stelle leider eine kleine Lücke im Skript. Man kann diese Aussage zunächst präzise formulieren und dann beweisen. Wer hier einen vollständigen Beweis sehen will, kommt aber einfacher zum Ziel, in dem er/sie die Variation $F_\bullet$ in einer Karte konstruiert. Sei hierzu o. B. d. A. $\gamma([a, b]) \subset U$ für eine Karte $\varphi: U \rightarrow V$ von M . Definiere $\mathcal{V}^\varphi(t) := d_{\gamma(t)}\varphi(\mathcal{V}(t))$, $F_s^\varphi(t) = \gamma(t) + s\mathcal{V}^\varphi(t)$. Man zeigt

Dann ist $\mathcal{V}$ das Variationsvektorfeld der Variation $F_\bullet$ und $\text{supp}(F_\bullet) \subset (a, b)$.

Wir wenden nun die Variationsformel auf das 1-dimensionale Volumen der Kurven F_s , das heißt auf deren Länge an. Wir müssen also insbesondere auf der rechten Seite der Variationsformel die mittlere Krümmung von γ und nicht die von M betrachten. Wir leiten die Länge $\mathcal{L}(F_s) := \text{Vol}(F_s([a, b]))$ ab:

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{L}(F_s([a, b])) = - \int_{\gamma([a, b])} \langle \vec{H}, \mathcal{V} \rangle d\mu = - \int_a^b \underbrace{\langle \ddot{\gamma}(t), \mathcal{V}(t) \rangle}_{\geq 0} \underbrace{\|\dot{\gamma}(t)\|}_{> 0} dt < 0.$$

Wiederum erhalten wir das (strikte) $<$ -Zeichen, da der Integrand stetig ist und in mindestens einem Punkt positiv ist. Wir haben $F_0 = \gamma$.

Für kleine $s > 0$ gilt $\mathcal{L}(F_s) < \mathcal{L}(F_0) = \mathcal{L}(\gamma)$, $F_s(a) = \gamma(a)$, $F_s(b) = \gamma(b)$. ■

Geodätische werden im Rahmen der Differentialgeometrie im nächsten Semester näher betrachtet.

1.11 Kompakte Flächen in $\mathbb{R}^3$

1.11.1 Erste Fakten zu kompakten Flächen

Zur Abrundung des Kapitels wollen wir noch einige Fakten zu kompakten Flächen in $\mathbb{R}^3$ darstellen, allerdings ohne uns zu bemühen, diese Aussagen zu beweisen. Dies hat zum einen den Hintergrund, dass einige der Aussagen relativ zu ihrem Nutzen schwer zu zeigen sind. Andere Aussagen können in einigen Wochen (oder in folgenden Semestern⁴²) allgemeiner formuliert und mit geeigneten Hilfsmitteln dann schneller und effizienter gezeigt werden.

Zwei kompakte Flächen haben wir bereits näher kennengelernt:

(0) die Kugel $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$

(1) und den Torus T^2 , siehe [Übungsblatt 3, Aufgabe 3](#). Für $\rho \in (0, 1)$ sei T^2 das Bild der Abbildung

$$\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(\psi)(1 - \rho \cos(\varphi)) \\ \sin(\psi)(1 - \rho \cos(\varphi)) \\ \rho \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.111. *Sei M eine zusammenhängende kompakte Fläche in $\mathbb{R}^3$.*

- (i) *Dann besitzt $\mathbb{R}^3 \setminus M$ genau 2 Zusammenhangskomponenten, eine beschränkte Zusammenhangskomponente Ω_0 und eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente Ω_∞ . Außerdem gilt $\partial\Omega_0 = M = \partial\Omega_\infty$.*

die Existenz eines $\epsilon > 0$, so dass für alle $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ und alle $t \in [a, b]$ gilt $F_s^\varphi(t) \in V$. Dann definieren wir $F_s(t) := \varphi^{-1}(F_s^\varphi(t)) \in U \subset M$.

⁴²Die Inhalte lernt man typischerweise in Regensburg in Vorlesungen wie Differentialgeometrie I, Algebraische Topologie I, Riemannsche Flächen, Geometrie für gymnasiales Lehramt, wo genau hängt vom Resultat und dem Dozenten der Vorlesungen ab.

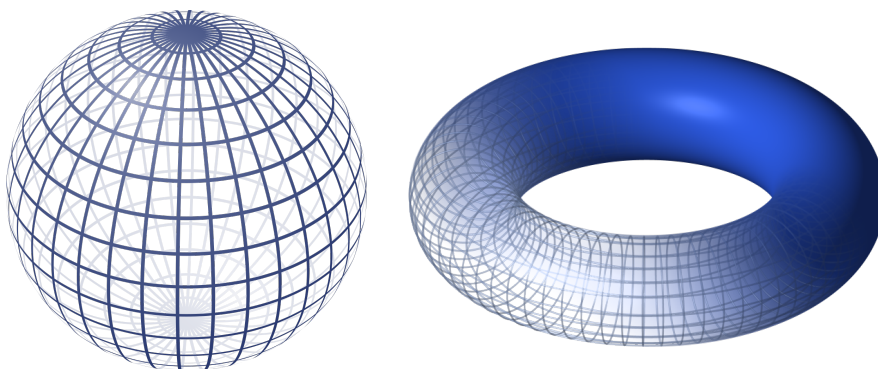


Abbildung 1.18: Links: die Sphäre[©]. Rechts ein Torus[©].

- (ii) M besitzt genau zwei Einheitsnormalenfelder, eines das in die beschränkte Komponenten hineinweist und eines das in die unbeschränkte Komponente hineinweist.
- (iii) M besitzt einen Punkt p mit positiver Gauß-Krümmung $K_p > 0$.

Die Beweise dieser Teilaussagen sind sehr unterschiedlich aufwändig, von einfachen Übungsaufgaben bis dazu hin, dass man zunächst gute Theorien aufbauen sollte, um sie zu beweisen.

1.11.2 Zusammenhängende Summe

Wir wollen nun zwei zusammenhängende kompakte Flächen zu einer neuen „zusammenkleben“. Kurz gesagt: wir schneiden aus beiden Flächen einen kleinen Ball heraus und kleben ein zylinderförmiges Stück dazwischen, das beide Flächen zu einer neuen kompakten zusammenhängenden Fläche verbindet. Die Vorstellung von dieser Konstruktion wird in Abbildung 1.19 dargestellt, allerdings ist die unten folgende technische Durchführung der Konstruktion ein klein bisschen anders als in den Zeichnungen dargestellt.

Seien also M_1 und M_2 disjunkte zusammenhängende kompakte Flächen in $\mathbb{R}^3$. Die Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^3 \setminus M_1$, in der M_2 enthalten ist, nennen wir Ω_1 , und die Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^3 \setminus M_2$, in der M_1 enthalten ist, nennen wir Ω_2 . Dann hat $\mathbb{R}^3 \setminus (M_1 \cup M_2)$ drei Zusammenhangskomponenten $\Omega := \Omega_1 \cap \Omega_2$.

Wir wählen nun eine glatte Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit den folgenden Eigenschaften.

- (a) $\gamma(0) \in M_1$, $\gamma(1) \in M_2$ und für alle $t \in (0, 1)$ gilt $\gamma(t) \in \Omega$,
- (b) $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ für alle $t \in [0, 1]$,
- (c) $\dot{\gamma}(0) \perp T_{\gamma(0)}M_1$ und $\dot{\gamma}(1) \perp T_{\gamma(1)}M_2$

Solch einen Weg bekommt man zum Beispiel, indem man ein Minimum (p_0, q_0) der Funktion

$$M_1 \times M_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (p, q) \mapsto \|p - q\|^2$$

wählt, das auf Grund der Kompaktheit der M_i existiert, und dann $\gamma(t) := (1-t)p_0 + tq_0$ definiert.

Wir definieren die Funktion $d_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $d_i(x) := \min\{d(x, p) \mid p \in M_i\}$. Diese Funktion

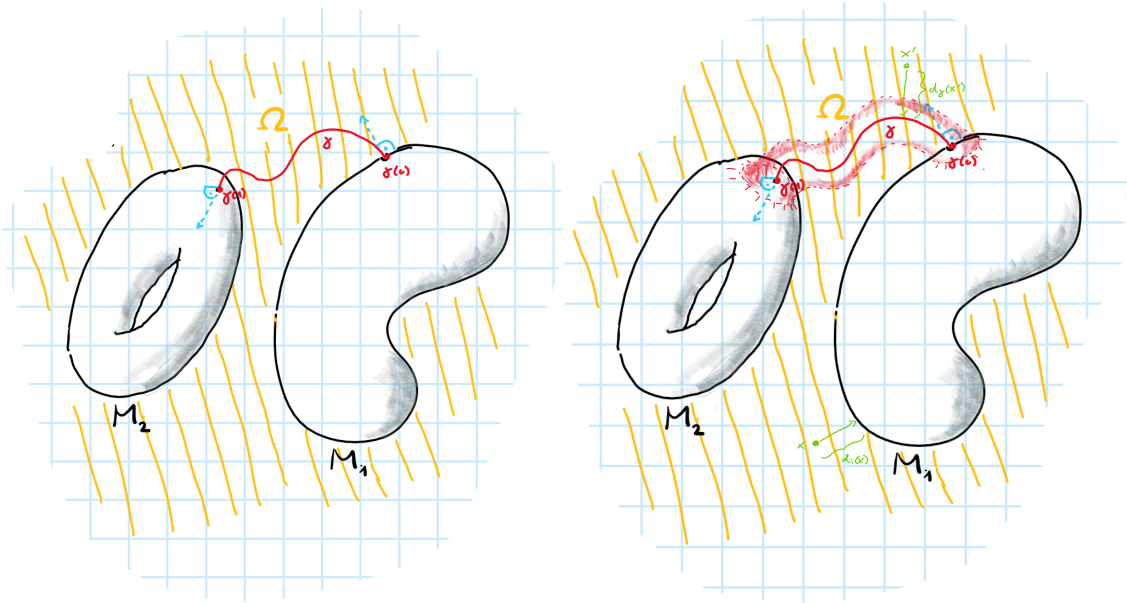


Abbildung 1.19: Die zusammenhängende Summe der Flächen M_1 und M_2 . Links vor der Konstruktion. Rechts ist angedeutet, dass ein „Schlauch“ um die Kurve γ hinzugefügt wird, nachdem kleine ballförmige Umgebungen von $\gamma(0)$ in M_1 und von $\gamma(1)$ in M_2 entfernt wurden. Die eigentliche technische Durchführung weicht aber von der Zeichnung etwas ab, da wir somit auf einfachere Art und Weise eine glatte Fläche bekommen. (Danke an Benedikt Fröhlich für die Zeichnungen.)

ist stetig, aber nicht differenzierbar⁴³. Analog definieren wir $d_\gamma(x) := \min\{d(x, \gamma(t)) \mid t \in [0, 1]\}$.

Für eine Zahl $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$S_\varepsilon(M_1, M_2) := \left\{ x \in \Omega \setminus \gamma([0, 1]) \mid \frac{1}{d_1(x)} + \frac{1}{d_2(x)} + \frac{1}{d_\gamma(x)} = \frac{1}{\varepsilon} \right\}.$$

Wir sollten für ε nahe 0 eine Vorstellung von dieser Menge erhalten. Wenn ein Punkt $x \in \Omega \setminus \gamma([0, 1])$ die Gleichung

$$\frac{1}{d_1(x)} + \frac{1}{d_2(x)} + \frac{1}{d_\gamma(x)} = \frac{1}{\varepsilon}$$

erfüllt, so bedeutet dies

- (i) x ist in der Nähe von M_1 und ε ist „ungefähr“ die Entfernung zu M_1 , oder
- (ii) x ist in der Nähe von M_2 und ε ist „ungefähr“ die Entfernung zu M_2 , oder
- (iii) x ist in der Nähe von $\gamma([0, 1])$ und ε ist „ungefähr“ die Entfernung zu $\gamma([0, 1])$.

Was „ungefähr“ genau bedeutet, wollen wir vage lassen. Es bedeutet aber insbesondere, dass die Entfernung im Intervall $(\varepsilon, 3\varepsilon)$ enthalten ist, und für kleine ε ist die Entfernung „sehr nahe“ an ε , es sei denn wir sind in der Nähe der Punkte p_0 oder q_0 . Dort sind die Entfernungsfunktionen zu M_1 , M_2 und $\gamma([0, 1])$ auf glatte Art zusammengeführt.

Das wichtige ist nun:

⁴³Sie ist sicher nicht differenzierbar in M_i . Es gibt aber noch weitere Punkte, in denen sie nicht differenzierbar ist, zum Beispiel ist d_1 im Fall $M_1 = S^2$ nicht in 0 differenzierbar.

Lemma 1.112. Zu gegebenen disjunkten zusammenhängenden kompakten Flächen M_1 und M_2 gibt es ein ϵ_0 , so dass für alle $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ die Menge $S_\epsilon(M_1, M_2)$ eine zusammenhängende kompakte (glatte) Fläche ist.

(ohne Beweis)

Die Fläche $S_\epsilon(M_1, M_2)$ verläuft in einem Teil mit Abstand ungefähr ϵ parallel zu $M_1 \setminus B_{3\epsilon}(p_0)$, in einem anderen Teil mit Abstand ungefähr ϵ parallel zu $M_2 \setminus B_{3\epsilon}(p_0)$ und in einem dritten Teil auf dem Rand einer zylinderförmigen Menge um die Verbindungskurve γ herum.

Die zusammenhängende Summe von M_1 und M_2 ist nun im wesentlichen als $S_\epsilon(M_1, M_2)$ definiert. Dies ist aber noch nicht ganz exakt: wir hätten gerne noch die Assoziativität dieser Summe, aber für drei paarweise disjunkte zusammenhängende kompakte Flächen M_1 , M_2 und M_3 gilt **nicht**

$$S_\epsilon(S_\epsilon(M_1, M_2), M_3) = S_\epsilon(M_1, S_\epsilon(M_2, M_3)).$$

Dieses Problem betrachten wir im nächsten Abschnitt.

1.11.3 Assoziativität

Man löst, das obige Problem, indem wir diffeomorphe Flächen identifizieren: zwei Flächen M und $\widehat{M}$ sind **diffeomorph**, wenn es einen Diffeomorphismus $M \rightarrow \widehat{M}$ gibt; dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Flächen in $\mathbb{R}^3$. Wir betrachten nun nicht mehr konkrete Flächen M , sondern stattdessen Äquivalenzklassen von Flächen unter der Relation „diffeomorph“, genannt **Diffeomorphismusklassen**. Wir schreiben die Diffeomorphismusklasse von M als $[M]$.

Lemma 1.113. Seien $M_1, \widehat{M}_1, M_2, \widehat{M}_2$ zusammenhängende kompakte Flächen mit $M_1 \cap M_2 = \widehat{M}_1 \cap \widehat{M}_2 = \emptyset$. Gibt es Diffeomorphismen $f: M_1 \rightarrow \widehat{M}_1$ und $g: M_2 \rightarrow \widehat{M}_2$ und ist ϵ nahe an 0, so gibt es auch einen Diffeomorphismus $S_\epsilon(M_1, M_2) \rightarrow S_\epsilon(\widehat{M}_1, \widehat{M}_2)$.

Bemerkung. Das Lemma ist richtig, aber einer Stelle etwas „getrickst“. Es wäre besser, die Existenz von „orientierungserhaltenden Diffeomorphismen“ vorauszusetzen, eine etwas stärkere Annahme. Denn in dieser Form verallgemeinert sich die Konstruktion von $S_\epsilon(M_1, M_2)$ auf andere Dimensionen und Kodimensionen⁴⁴. Und im Beweis wäre es auch gut, diese Zusatzannahme zu haben. Da wir aber den Begriff der Orientierung noch nicht eingeführt haben und nichts beweisen wollen, würde uns dies zu weit vom Thema wegführen.

Definition 1.114 (Zusammenhängende Summe). Seien M_1 und M_2 zusammenhängende kompakte Flächen, und $[M_1]$ und $[M_2]$ ihre Diffeomorphismusklassen. Durch Verschieben einer der Fläche können wir o. B. d. A. $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ annehmen. Die **zusammenhängende Summe** $[M_1] \# [M_2]$ definieren wir als $[S_\epsilon(M_1, M_2)]$, d. h. die Diffeomorphismusklasse von $S_\epsilon(M_1, M_2)$.

Es gilt nun (ohne Beweis)

$$([M_1] \# [M_2]) \# [M_3] = [M_1] \# ([M_2] \# [M_3]), \quad [M_1] \# [M_2] = [M_2] \# [M_1].$$

Beispiel 1.115. $[M] \# [S^2] = [M]$, d. h. $[M]$ ist das neutrale Element der zusammenhängenden Summe. Es gibt aber kein inverses Element zu $[T^1]$. Wir haben also ein kommutatives Monoid⁴⁵

⁴⁴Ich erkläre nicht, wie das geht!

⁴⁵Dies bedeutet: die Verknüpfung ist assoziativ, kommutativ und besitzt ein neutrales Element

erhalten, aber keine Gruppe.

1.11.4 Geschlecht

Durch die zusammenhängende Summe erhalten wir aus mehreren Kopien von T^2 viele zusammenhängende kompakte Flächen. Und erstaunlicherweise sind dies – bis auf Diffeomorphie – alle!

Theorem 1.116 (Klassifikation der orientierbaren Flächen). *Sei M eine zusammenhängende kompakte Fläche in $\mathbb{R}^3$. Dann gibt es eine Zahl $g \in \mathbb{N}_0$, so dass*

$$[M] = [S^2] \underbrace{\#[T^2] \#[T^2] \cdots \#[T^2]}_{g\text{-mal}}.$$

Diese Zahl ist eindeutig bestimmt.

Man nennt diese Zahl g das **Geschlecht** von M .

Beispiele 1.117. S^2 hat Geschlecht 0. T^2 hat Geschlecht 1. Die zusammenhängende Summe von zwei Tori hat Geschlecht 2. Die Oberfläche einer Tasse mit k Henkeln hat Geschlecht k .

1.11.5 Der Satz von Gauß und Bonnet

Wir wollen nun das Geschlecht, das unter Diffeomorphismen invariant ist nun mit der Gauß-Krümmung verbinden, die offensichtlich sehr subtil auf Diffeomorphismen reagiert.

Satz 1.118 (Gauß–Bonnet). *Sei M eine zusammenhängende kompakte Fläche in $\mathbb{R}^3$ mit Gauß-Krümmung $K : M \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\int_M K \, d\mu^M = 4\pi(1 - g).$$

(Ohne Beweis)

Wenn wir also eine Fläche variieren, dann ändert sich die Gauß-Krümmung, aber das Integral der Gauß-Krümmung verändert sich nicht. Der Satz ist auch deswegen sehr wichtig, weil man die Größe auf beiden Seiten auch noch ganz anders beschreiben kann: zum Beispiel, wenn man M in dreieckige Teile zerlegt und dann die Anzahl der Ecken, Seiten (= Kanten) und Dreiecke (= Flächen) mit e , k und f bezeichnet, so gilt

$$e - k + f = 2(1 - g) = \frac{1}{2\pi} \int_M K \, d\mu^M.$$

Man erhält diese Zahl auch durch die Betti-Zahlen, die wir am Ende der Vorlesung einführen werden. Wir bekommen also durch ganz verschiedenartige Konstruktionen immer dieselbe Zahl, siehe hierzu Abschnitt 3.10.

Und das ganze geht noch viel weiter: der Satz von Gauß–Bonnet ist letztendlich ein Spezialfall des Indexsatzes von Atiyah und Singer, der ähnliche Aussagen in beliebigen Dimensionen macht und wichtige Einflüsse auf einen großen Teil der modernen Mathematik hat, bis hin zu Anwendungen in der mathematischen Physik, zum Beispiel einer mathematisch rigorosen Erklärungen

für Phänomene der Teilchen-Physik in Verbindung mit Allgemeiner Relativitätstheorie, wie zum Beispiel der 2016 veröffentlichten Arbeit [19].

Korollar 1.119. *Sei M eine zusammenhängende kompakte Fläche in $\mathbb{R}^3$ von Geschlecht $g \geq 1$. Dann gibt es ein $p \in M$ mit Gauß-Krümmung $K_p < 0$.*

Beweis: Nach Gauß–Bonnet gilt $\int_M K \, d\mu^M \leq 0$. Da $K : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist und in mindestens einem Punkt positiv ist, folgt daraus, dass es in mindestens einem Punkt negativ ist. ■

1.12 Zusammenfassung innere und äußere Geometrie

29.5.

Innere Geometrie	Äußere Geometrie
1. Fundamentalform	2. Fundamentalform
kovariante Ableitung	mittlere Krümmung
Geodätische	
Gaußkrümmung	

Dabei bedeutet „innere Geometrie“, dass die studierten Objekte invariant unter Isometrien sind.

Unser Ziel ist nun, Unter-Mannigfaltigkeiten und ihre intrinsische Geometrie möglichst weitgehend zu verstehen, ohne auf den umgebenden Raum Bezug zu nehmen. Wir definieren hierzu zunächst den Begriff der Mannigfaltigkeit. Jede Untermannigfaltigkeit ist eine Mannigfaltigkeit, die Definition der Mannigfaltigkeit ist aber so gewählt, dass der umgebende Raum nicht mehr benutzt wird. Die Topologie und die Definition glatter Abbildungen wird dann über Karten definiert.

2 Mannigfaltigkeiten

2.1 C^k -Strukturen und C^k -Mannigfaltigkeiten

2.1.1 C^k -Strukturen

Definition 2.1.

- (1) Sei M eine Menge, $U_i \subset M$ für $i \in I$. Wir sagen $\{U_i\}_{i \in I}$ **überdeckt** die Menge M , falls $M = \bigcup_{i \in I} U_i$. Wir sagen dazu auch: $\{U_i\}_{i \in I}$ eine **Überdeckung** von M .
- (2) Ist M ein topologischer Raum, sind alle U_i offen und ist $\{U_i\}_{i \in I}$ eine **Überdeckung** von M , so heißt $\{U_i\}_{i \in I}$ eine **offene Überdeckung** von M .
- (3) Ein m -dimensionaler C^k -**Atlas** auf M (für $m \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$) ist eine Menge $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i \mid i \in I\}$, so dass gilt:
 - (i) $\{U_i\}_{i \in I}$ ist eine Überdeckung von M ,
 - (ii) für alle $i \in I$ ist $V_i \subset \mathbb{R}^m$ offen,

(iii) für alle $i \in I$ ist $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i$ bijektiv,

(iv) für alle $i, j \in I$ ist $\varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^m$ offen,

(v) für alle $i, j \in I$ ist

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

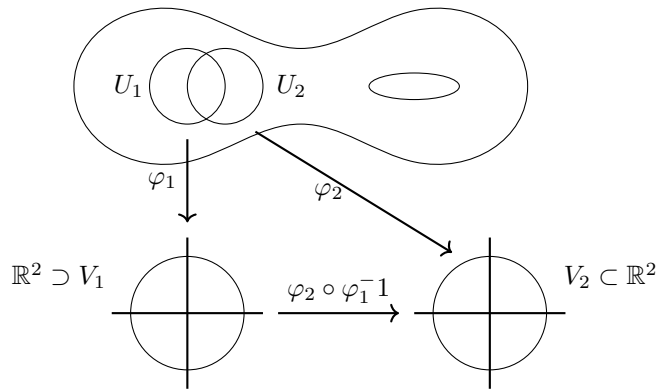
in $\mathcal{C}^k$.

Die φ_i heißen **Karten**. Die U_i nennt man **Definitionsbereich der Karte** oder **Kartengebiet**. Die V_i nennt man die **Koordinatenbereiche**.

Wir schreiben oft

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)}.$$

Diese Abbildung nennt man **Kartenwechsel**.



Bemerkung 2.2. Im Fall $k = 0$ impliziert die Bedingung (v) in Definition 2.1, dass $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ ein Homöomorphismus ist. Für $k \geq 1$ ist $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ ein $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus.

Zum Fall $k = \omega$ ist zu sagen, dass $\mathcal{C}^\omega$ *reell-analytisch* bedeutet. Das heißt, dass $f \in \mathcal{C}^\omega$ gilt, wenn $f = (f^1 \dots f^m)^T$ und alle f^i schreiben sich lokal als Potenzreihe in m Variablen.

Ist $f \in \mathcal{C}^\omega$, so auch $f \in \mathcal{C}^\infty$, also „ $\omega > \infty$ “.

Lemma 2.3. Sei M eine Menge und $\mathcal{A} = \{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i \mid i \in I\}$ ein m -dimensionaler $\mathcal{C}^k$ -Atlas auf M . Setze

$$\mathcal{O}_{\mathcal{A}} := \left\{ U \subset M \mid \varphi_i(U_i \cap U) \subset \mathbb{R}^m \text{ offen für alle } i \in I \right\}.$$

Dann ist $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ eine Topologie auf M . Außerdem gelten:

- (i) $\mathcal{B} := \bigcup_{i \in I} \{\varphi_i^{-1}(V) \mid V \subseteq V_i\} \subset \mathcal{P}(M)$ ist eine Basis der Topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$.
- (ii) $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i$ sind Homöomorphismen.

Insbesondere ist dann $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M .

Beweis: Der Beweis ist eine [Übungsblatt 8, Aufgabe 1](#). ■

Bemerkung 2.4. Ist $(M, \mathcal{O}_M)$ bereits ein topologischer Raum, dann ist $\mathcal{A} = \{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i \mid i \in I\}$ ein m -dimensionaler $\mathcal{C}^k$ -**Atlas** auf M mit $\mathcal{O}_M = \mathcal{O}_{\mathcal{A}}$, wenn gilt

- (i) $\{U_i\}_{i \in I}$ ist eine offene Überdeckung von M ,

-
- (ii) für alle $i \in I$ ist $V_i \subset \mathbb{R}^m$ offen,
 - (iii) für alle $i \in I$ ist $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i$ ein Homöomorphismus
 - (iv) für alle $i, j \in I$ ist

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

in $\mathcal{C}^k$.

Der Beweis folgt aus mehreren nun fast offensichtlichen Schritten.

Die Beschreibung eines $\mathcal{C}^k$ -Atlanten in Bemerkung 2.4 ist meines Erachtens leichter zu merken als die in Definition 2.1 (3). Der Vorteil von Definition 2.1 (3) ist, dass dies manchmal in Anwendungen leichter zu zeigen ist.

Ab jetzt trage M stets die Topologie aus Lemma 2.3.

Definition 2.5. Ist $\mathcal{A} = \{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ ein $\mathcal{C}^k$ -Atlas von M , so nennt man eine Bijektion $\varphi: U \rightarrow V$ eine mit $\mathcal{A}$ **$\mathcal{C}^k$ -verträgliche Karte**, falls $U \subseteq M$ (d. h. $U \in \mathcal{O}_{\mathcal{A}}$), $V \subseteq \mathbb{R}^m$ und falls für alle $i \in I$ gilt:

- $\varphi(U_i \cap U)$ sind offen,¹
- $\varphi_i(U_i \cap U) \xrightleftharpoons[\varphi_i \circ \varphi^{-1}]{\varphi \circ \varphi_i^{-1}} \varphi(U \cap U_i)$ sind in $\mathcal{C}^k$.

Proposition 2.6. Sei $\mathcal{A}$ ein $\mathcal{C}^k$ -Atlas auf M . Setze

$$\mathcal{A}_{\max} := \left\{ \varphi: U \rightarrow V \mid \varphi \text{ ist } \mathcal{C}^k\text{-verträglich mit } \mathcal{A} \right\}.$$

Dann ist $\mathcal{A}_{\max}$ ein $\mathcal{C}^k$ -Atlas.

Es gelten $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\max}$, $(\mathcal{A}_{\max})_{\max} = \mathcal{A}_{\max}$ und $\mathcal{O}_{\mathcal{A}_{\max}} = \mathcal{O}_{\mathcal{A}}$.

Weiter gilt $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\max}$ genau dann, wenn $\mathcal{A}$ ein maximales Element der partiell geordneten Menge

$$\left(\left\{ \tilde{\mathcal{A}} \mid \tilde{\mathcal{A}} \text{ ist ein } \mathcal{C}^k\text{-Atlas auf } M \right\}, \subset \right).$$

In diesem Fall heißt $\mathcal{A}$ ein **maximaler $\mathcal{C}^k$ -Atlas** auf M oder eine **$\mathcal{C}^k$ -Struktur** auf M .

Den Beweis sollten Sie nun selbst durchführen können. Er wurde in der Vorlesung skizziert.

Beispiel. Ist M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^r$ und sind $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ zwei Atlanten im Sinne von Kapitel 1, so gilt $(\mathcal{A}_1)_{\max} = (\mathcal{A}_2)_{\max}$ und dies stimmt mit der Menge aller Karten auf M (im Sinne von Kapitel 1) überein.

Das heißt: jede $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit (mit $k \geq 1$) hat eine induzierte $\mathcal{C}^k$ -Struktur $\mathcal{A}$. Dabei ist $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ die von $\mathbb{R}^r$ induzierte Topologie.

Bemerkung 2.7. (i) Es gibt $\mathcal{C}^\infty$ -Atlanten $\mathcal{A}$ auf Mengen M so dass $(M, \mathcal{O}_{\mathcal{A}})$

- (a) nicht hausdorffsch ist. Für ein Beispiel siehe Aufgabe 1 auf Tutoriumsblatt 7.
- (b) $(M, \mathcal{O}_{\mathcal{A}})$ keine abzählbare Basis der Topologie besitzt.

Beispiel:

¹Wegen $U \subseteq M$ wissen wir bereits, dass $\varphi_i(U_i \cap U)$ offen ist.

Sei $M = \mathbb{R}$ mit der 0-dimensionalen C^∞ -Struktur $\mathcal{A} := \{\varphi_i: \{i\} \rightarrow \{0\}\}_{i \in \mathbb{R}}$.

$\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ ist die diskrete Topologie. Jede Basis der diskreten Topologie auf $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

(c) zusammenhängend ist und keine abzählbare Basis der Topologie existiert. Für ein Beispiel siehe [http://en.wikipedia.org/wiki/Long_line_\(topology\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Long_line_(topology)).

(ii) Zu jedem $W \subseteq \mathbb{R}^m$ wählen wir eine abzählbare Basis der Topologie $\mathcal{B}_W$ auf W .

Besitzt ein Atlas $\{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i\}_i$ ein $J \subset I$ abzählbar so dass $\bigcup_{j \in J} U_j = M$, dann ist

$$\mathcal{B}_M := \bigcup_{j \in J} \left\{ \varphi_j^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{B}_{V_i} \right\} \subset \mathcal{P}(M)$$

eine abzählbare Basis der Topologie.

(iii) Ist $\mathcal{A}$ ein Atlas auf M , dann ist $(M, \mathcal{O}_{\mathcal{A}})$

(a) lokal zusammenhängend. Das heißt: Für jedes $p \in M$ und jede Umgebung U von p gibt es eine offene zusammenhängende Umgebung W von p mit $W \subset U$. Also sind alle Zusammenhangskomponenten offen.

(b) lokal kompakt. Das heißt: Für jedes $p \in M$ und jede Umgebung U von p gibt es eine kompakte Umgebung W von p mit $W \subset U$.

Die Beweise sollten Sie selbst durchführen können. Sie wurden in der Vorlesung skizziert.

2.1.2 C^k -Mannigfaltigkeiten

Definition 2.8. Eine C^k -Mannigfaltigkeit ist ein Paar $(M, \mathcal{A})$, wobei $\mathcal{A}$ eine C^k -Struktur auf M ist und $(M, \mathcal{O}_{\mathcal{A}})$ ein Hausdorffraum ist, so dass jede Zusammenhangskomponente von $(M, \mathcal{O}_{\mathcal{A}})$ eine abzählbare Basis der Topologie besitzt.

Bemerkung. Falls eine C^k -Struktur auf M existiert, so ist die Bedingung an die Zusammenhangskomponenten äquivalent dazu, dass $(M, \mathcal{O}_{\mathcal{A}})$ parakompakt ist. Dies ist nicht einfach zu zeigen. Wir erwähnen es, um zu zeigen wie unsere Definition mit der Definition in anderen Quellen verbunden ist.

Im Folgenden schreibt man M statt $(M, \mathcal{A})$.

Definition. Eine C^0 -Mannigfaltigkeit heißt **topologische Mannigfaltigkeit**.

Eine C^∞ -Mannigfaltigkeit heißt auch **glatte Mannigfaltigkeit**.

Eine C^ω -Mannigfaltigkeit heißt **reell-analytische Mannigfaltigkeit**.

Im Folgenden sind alle Mannigfaltigkeiten glatt.

Beispiel 2.9.

(i) Jede Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^r$ ist eine Mannigfaltigkeit mit dem in Kapitel 1 definierten Atlas.

(ii) Seien M_1 und M_2 Mannigfaltigkeiten und $\mathcal{A}_1 = \{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ und $\mathcal{A}_2 = \{\psi_j: W_j \rightarrow$

$Z_j\}_{j \in J}$ Atlanten von M_1 bzw. M_2 . Dann ist

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \{\varphi_i \times \psi_j : U_i \times W_j \longrightarrow V_i \times Z_j\}_{(i,j) \in I \times J}$$

ein Atlas von $M_1 \times M_2$. Hierbei definieren wir $(\varphi_i \times \psi_j)(p, q) := (\varphi_i(p), \psi_j(q))$.

Das heißt $(M_1 \times M_2, (\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)_{\max})$ ist eine Mannigfaltigkeit, die **Produktmannigfaltigkeit**. Wir nennen $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ den **Produktatlas** von $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$. Ihre Dimension ist $\dim(M_1 \times M_2) = \dim(M_1) + \dim(M_2)$. Man beachte: selbst wenn wir $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ als maximal voraussetzen, so ist $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ nur in seltenen² Fällen maximal.

Notation. Wenn $\mathcal{A}$ ein $\mathcal{C}^k$ -Atlas auf M , so dass $(M, \mathcal{A}_{\max})$ eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit ist, so benutzen wir oft $(M, \mathcal{A})$ im Sinne von $(M, \mathcal{A}_{\max})$. Im obigen Beispiel ist dann also $(M_1 \times M_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ die Produktmannigfaltigkeit von $(M_1, \mathcal{A}_1)$ und $(M_2, \mathcal{A}_2)$.

Bemerkung 2.10. Sei $k < \ell$. Jede $\mathcal{C}^\ell$ -Struktur ist ein $\mathcal{C}^k$ -Atlas, aber als $\mathcal{C}^k$ -Atlas ist er nicht mehr maximal. Das heißt: jede $\mathcal{C}^\ell$ -Struktur ist in einer $\mathcal{C}^k$ -Struktur enthalten.³

Für $k \geq 1$ gilt auch umgekehrt: In jeder $\mathcal{C}^k$ -Struktur ist eine $\mathcal{C}^\ell$ -Struktur enthalten. Diese $\mathcal{C}^\ell$ -Struktur ist *nicht* eindeutig, sondern nur noch eindeutig „bis auf Diffeomorphismen“.

Dies bedeutet: Sind $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ zwei $\mathcal{C}^\ell$ -Strukturen, die in einer gemeinsamen $\mathcal{C}^k$ -Struktur $\mathcal{A}$ liegen, dann gibt es einen $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus $\psi: M \longrightarrow M$ so dass $\psi^* \mathcal{A}_1 := \{\varphi \circ \psi \mid \varphi \in \mathcal{A}_1\} = \mathcal{A}_2$.

Beweis aufwändig!

Für $k = 0$ gilt: Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten, die keinen (mit der Topologie verträglichen) $\mathcal{C}^1$ -Atlas besitzen.

Beweis sehr aufwändig! Fields-Medaille

Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten, die im folgenden Sinne mehrere $\mathcal{C}^1$ -Strukturen besitzen, die nicht durch Homöomorphismen auseinander hervorgehen:

- (i) Es gibt überabzählbar viele $\mathcal{C}^\infty$ -Strukturen auf dem topologischen Raum $\mathbb{R}^4$ mit der Standard-Topologie, die nicht zueinander diffeomorph sind. Es gibt also 4-dimensionale Mannigfaltigkeiten, die homöomorph zu $\mathbb{R}^4$ sind, aber die nicht ($\mathcal{C}^1$ -)diffeomorph zu $\mathbb{R}^4$ sind. Die Behauptung ist hier nicht, dass ein gegebener Homöomorphismus kein Diffeomorphismus ist (dies wäre ganz einfach zu konstruieren), sondern dass es gar keinen Diffeomorphismus gibt. Siehe http://en.wikipedia.org/wiki/Exotic_R4
- (ii) Es gibt 7-dimensionale $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeiten Σ^7 , die homöomorph sind zu $\mathbb{S}^7$ sind, aber nicht $\mathcal{C}^1$ -diffeomorph zu $\mathbb{S}^7$ sind. Siehe dazu http://en.wikipedia.org/wiki/Exotic_sphere

5.6.

Lemma 2.11. Sei X ein topologischer Raum mit Zusammenhangskomponenten X_α (mit $\alpha \in A$) und alle X_α seien offen.⁴

- (i) Sei $U \subset X$. Dann ist U genau dann offen in X , wenn für alle $\alpha \in A$ die Menge $U \cap X_\alpha$ offen in X_α ist.
- (ii) X besitzt genau dann eine abzählbare Basis der Topologie, wenn A abzählbar ist und jedes X_α eine abzählbare Basis der Topologie besitzt.

²Genauer: nur dann, wenn entweder ein M_i die leere Menge ist oder 0-dimensional ist.

³Bis hier ist die Bemerkung nahezu offensichtlich.

⁴Alle Zusammenhangskomponenten sind per definitionem nicht-leer

Beweis: „(i)“: Die Hinrichtung ist klar. Für die Rückrichtung argumentieren wir wie folgt. Sei U eine Teilmenge von X , so dass $U \cap X_\alpha$ für alle $\alpha \in A$ offen in X_α ist. Da X_α in X offen ist, ist also $U \cap X_\alpha$ offen in X . Mit der Rechnung

$$U = U \cap X = U \cap \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (U \cap X_\alpha)$$

sehen wir, dass U die Vereinigung offener Teilmengen von X ist und somit selber offen ist.

„(ii)“: Für die Hinrichtung sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis der Topologie. Zu jedem $\alpha \in A$ wähle ein $U_\alpha \in \mathcal{B}$ mit $U_\alpha \neq \emptyset$ und $U_\alpha \subset X_\alpha$. Erhalte eine injektive Abbildung $A \rightarrow \mathcal{B}$, $\alpha \mapsto U_\alpha$, also ist auch A abzählbar. Für alle $\alpha \in A$ ist $\mathcal{B}_\alpha := \{U \cap X_\alpha \mid U \in \mathcal{B}\}$ eine abzählbare Basis der Topologie von X_α .

Für die Rückrichtung seien $\mathcal{B}_\alpha$ die abzählbaren Basen der Topologie der X_α . Dann ist $\mathcal{B} = \bigcup_\alpha \mathcal{B}_\alpha$ eine abzählbare Basis der Topologie von X . Um dies zu zeigen, nehmen wir eine offene Teilmenge U von X her. Dann ist auch $U \cap X_\alpha$ offen und schreibt sich somit als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}_\alpha \subset \mathcal{B}$. Somit erhalten wir aber auch U als Vereinigung von geeignet ausgewählten Elementen von $\mathcal{B}$. Wir haben also gezeigt, dass $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie von X ist. ■

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 05.06.

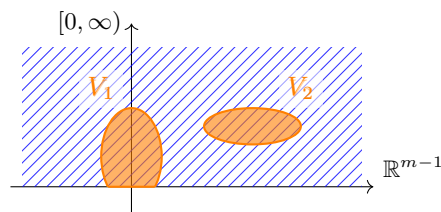
Korollar 2.12. Eine Mannigfaltigkeit hat eine abzählbare Basis der Topologie genau dann, wenn sie abzählbar viele Zusammenhangskomponenten hat.

2.1.3 C^k -Mannigfaltigkeiten mit Rand

Definition 2.13. Sei $B \subset \mathbb{R}^m$. Eine Abbildung $f: B \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ heißt C^k (mit $k \geq 1$), falls eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und eine Abbildung $\hat{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ existiert so dass $B \subset U$, $\hat{f} \in C^k$ und $\hat{f}|_B \equiv f$.

Modifiziere nun Definition 2.1 (3) für $m \geq 1$:

Ersetze (ii) durch (ii'): Für alle $\alpha \in A$ ist V_α offen in $[0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}$.



Ersetze weiter (iv) durch (iv'): Für alle $\alpha, \beta \in A$ ist $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ offen in $[0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}$.

Man nennt dann $\mathcal{A}$ einen C^k -Atlas mit Rand.⁵

Eine C^k -Mannigfaltigkeit mit Rand ist ein Paar $(M, \mathcal{A})$ so dass $\mathcal{A}$ ein maximaler C^k -Atlas mit Rand auf M ist, so dass $(M, \mathcal{O}_{\mathcal{A}})$ hausdorffsch ist und jede Zusammenhangskomponente eine abzählbare Basis der Topologie besitzt.

⁵Äquivalent dazu könnte man an dieser Stelle auch Bemerkung 2.4 modifizieren, indem man durch (ii) durch (ii') ersetzt und diese Bemerkung dann zur Definition macht. Ansonsten ist dann nichts zu tun.

Der **Rand** ∂M von M ist definiert als

$$\partial M := \bigcup_{\alpha \in A} \varphi_{\alpha}^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}),$$

wobei

$$\mathcal{A}_A := \left\{ U_{\alpha} \xrightarrow{\varphi_{\alpha}} V_{\alpha} \mid \alpha \in A \right\}$$

ein Teilatlas von $\mathcal{A}$ sei. Aus dem lokalen Umkehrsatz ($k \geq 1$) folgt $\varphi_{\alpha} \circ \varphi_{\beta}^{-1}((\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap V_{\beta}) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$. Man sieht so auch, dass ∂M unabhängig von der Wahl des Teilatlanten $\mathcal{A}_A$ ist.

Setze $\psi_{\alpha} := \varphi_{\alpha}|_{U_{\alpha} \cap \partial M}$, dann ist $\left(\partial M, \left\{ U_{\alpha} \cap \partial M \xrightarrow{\psi_{\alpha}} V_{\alpha} \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \right\} \right)$ eine $(m-1)$ -dimensionale $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit, und die von M auf ∂M induzierte Topologie ist auch die von diesem Atlas induzierte.

!ACHTUNG!. Der Fall $\partial M = \emptyset$ ist nicht ausgeschlossen. Wir haben dann eine Mannigfaltigkeit mit Rand, deren Rand leer ist.

Beispiel. Sei

$$\begin{aligned} \Phi &:= \exp \times \text{id}: \mathbb{R}^m \longrightarrow [0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1} \\ (x_1, \dots, x_m) &\longmapsto (\exp(x_1), x_2, \dots, x_m). \end{aligned}$$

Dann ist Φ injektiv, $\mathcal{C}^{\omega}$ und $\Phi(\mathbb{R}^m) = (0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1} \subsetneq [0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}$. Außerdem ist Φ ein $\mathcal{C}^{\omega}$ -Diffeomorphismus auf sein Bild.

Ist nun $\mathcal{A} = \left\{ U_{\alpha} \xrightarrow{\varphi_{\alpha}} V_{\alpha} \right\}$ ein $\mathcal{C}^k$ -Atlas einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M , dann ist $\tilde{\mathcal{A}} := \left\{ U_{\alpha} \xrightarrow{\Phi \circ \varphi_{\alpha}} \Phi(V_{\alpha}) \right\}$ sowohl ein $\mathcal{C}^k$ -Atlas von M , als auch ein $\mathcal{C}^k$ -Atlas mit Rand einer Mannigfaltigkeit mit Rand (denn $\Phi(V_{\alpha}) \subsetneq [0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}$) mit $\partial M = \emptyset$.

Umgekehrt gilt: Ist M eine m -dimensionale $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit **mit Rand**, dann ist $M \setminus \partial M$ eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit.

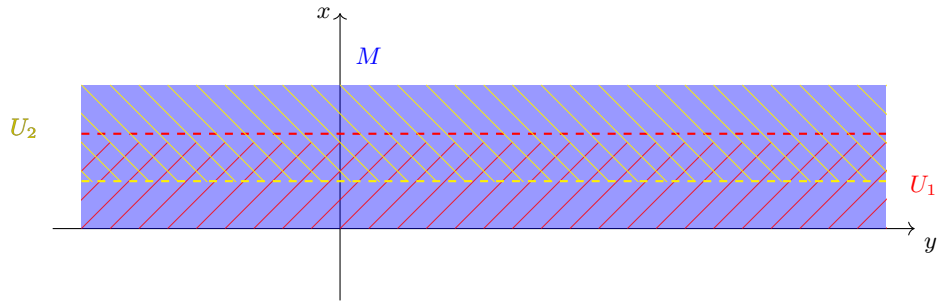
Durch Nutzung der Abbildung Φ wird also aus jeder Mannigfaltigkeit eine Mannigfaltigkeit mit Rand, deren Rand die leere Menge ist, und umgekehrt ist jede Mannigfaltigkeit mit Rand, deren Rand die leere Menge ist, eine Mannigfaltigkeit.

Der Sprachgebrauch ist hier etwas gewöhnungsbedürftig. Jede Mannigfaltigkeit ist also eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Ist M eine Mannigfaltigkeit mit Rand, dann gilt $\partial M = \emptyset$ genau dann, wenn M auch eine Mannigfaltigkeit ist.⁶

Im Folgenden seien alle Mannigfaltigkeiten glatt.

Beispiele 2.14. (i) $M := [0, 1] \times \mathbb{R}$ ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand.

⁶Und noch eine kleine Warnung: viele Mathematiker, vor allem in der Topologie, nutzen den Begriff „Mannigfaltigkeit“ im Sinne von unserem Begriff „Mannigfaltigkeit mit Rand“. Für mich sind Mannigfaltigkeiten mit Rand nur ein Spezialfall einer **Mannigfaltigkeit mit Ecken**: hierbei haben wir $V_{\alpha} \subsetneq [0, \infty]^{\ell} \times \mathbb{R}^{m-\ell}$.



Wähle $U_1 := V_1 := V_2 := [0, \frac{2}{3}) \times \mathbb{R} \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}$ mit $\varphi_1 := \text{id}$ und $U_2 := (\frac{1}{3}, 1] \times \mathbb{R}$ mit $\varphi_2(x, y) := (1 - x, y)$.

- (ii) Ebenso ist $[a, \infty) \times M^{m-1}$ eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand, falls M eine $(m - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Wir verwenden hierbei den Produktatlas wie unten beschrieben.
- (iii) $\overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^m$ ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand, siehe [Übungsblatt 9, Aufgabe 3](#).
- (iv) Sei M_1 eine Mannigfaltigkeit mit Rand und M_2 eine Mannigfaltigkeit und ansonsten alles wie in Beispiel 2.9 (ii). Dann ist auch wieder $(M_1 \times M_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Wir nennen $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ wieder den **Produktatlas** von $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$.

Warnung: Ist M_2 auch eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M_2 \neq \emptyset$, so ist für das Produkt $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ kein Atlas mit Rand mehr.

Siehe dazu: $[0, 1] \times [0, 1]$ ist homöomorph zu $\overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2$, besitzt einen glatten Atlas mit Rand, der mit der Topologie verträglich ist, aber $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ ist kein Atlas mit Rand.

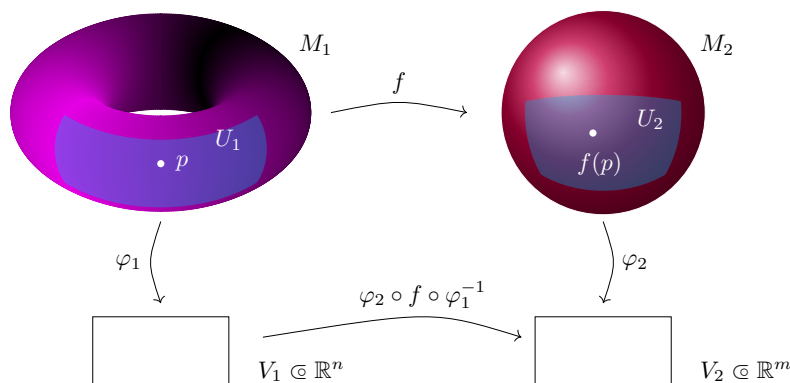
2.1.4 $\mathcal{C}^\ell$ -Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, zu definieren, wann eine Abbildung $f : M_1 \rightarrow M_2$ zwischen Mannigfaltigkeiten k -mal stetig differenzierbar ist. Die Idee hinter dieser Definition ist, die Charakterisierung von k -maliger stetiger Differenzierbarkeit für Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten in Korollar 1.24 (iv) zur Definition zu machen.

Definition 2.15. Seien M_1 und M_2 zwei $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten (mit Rand), $0 \leq \ell \leq k \leq \omega$ mit Atlanten $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$. Eine Abbildung $f : M_1 \rightarrow M_2$ ist eine **$\mathcal{C}^\ell$ -Abbildung**, falls für alle $(\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1) \in \mathcal{A}_1$ und für alle $(\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2) \in \mathcal{A}_2$ die Abbildung

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} \Big|_{\varphi_1(f^{-1}(U_2) \cap U_1)}$$

in $\mathcal{C}^\ell$ ist.



Da $\ell \leq k$ gilt dann diese Eigenschaft auch für alle Karten φ_1 von M_1 , die mit $\mathcal{A}_1$ verträglich sind und für alle Karten φ_2 von M_2 , die mit $\mathcal{A}_2$ verträglich sind, also überträgt sich die Eigenschaft auf die ganze Struktur der Mannigfaltigkeit und ist insbesondere unabhängig von der Wahl des Atlanten.

Die Eigenschaft in $\mathcal{C}^\ell$ zu sein, ist stabil unter Komposition, genauer: sind $f_1 : M_1 \rightarrow M_2$ und $f_2 : M_2 \rightarrow M_3$ $\mathcal{C}^\ell$ -Abbildungen, dann ist auch $f_2 \circ f_1 : M_1 \rightarrow M_3$ $\mathcal{C}^\ell$.

Ist $f : M_1 \rightarrow M_2$ bijektiv und $\mathcal{C}^\ell$, sowie $f^{-1} \in \mathcal{C}^\ell$, dann heißt f ein **$\mathcal{C}^\ell$ -Diffeomorphismus** (falls $\ell \geq 1$).

M_1 und M_2 heißen **$\mathcal{C}^\ell$ -diffeomorph**, wenn ein $\mathcal{C}^\ell$ -Diffeomorphismus von M_1 nach M_2 existiert.

2.2 Kompakte Ausschöpfung und Partition der Eins

Definition 2.16. Sei X ein Hausdorffraum. Eine **kompakte Ausschöpfung** von X ist eine Familie $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von kompakten Teilmengen von X so dass $K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $X = \bigcup_i K_i$.

Beispiele 2.17.

- (i) $K_j := \overline{B_j(0)} \subset \mathbb{R}^m$ ist eine kompakte Ausschöpfung.
- (ii) $K_j := \overline{B_{3j}(j \cdot e_1)} \subset \mathbb{R}^m$ ist eine kompakte Ausschöpfung.
- (iii) Sei X kompakt. Wir wählen $K_i := X$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dies ist eine kompakte Ausschöpfung. Umgekehrt folgt aus der Heine-Borel-Eigenschaft, dass jede kompakte Ausschöpfung nach endlich vielen Schritten von dieser Form ist, d. h. es gibt ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $K_{j_0} = X$.

Wiederholung: Ein topologischer Raum ist lokal kompakt, wenn er hausdorffsch ist und wenn jede Umgebung eines beliebigen Punktes eine kompakte Teilumgebung enthält. In anderen Worten: Ein Hausdorffraum X ist lokal kompakt, wenn es zu jedem $p \in X$ und jeder Umgebung U von p eine kompakte Umgebung W von p mit $W \subset U$ gibt.

Lemma 2.18. Sei X ein Hausdorffraum, in dem jeder Punkt $p \in X$ eine kompakte Umgebung besitze. Dann ist X lokal kompakt.

Beweis: Seien X und p wie oben, und U eine Umgebung von p . Sei K eine kompakte Umgebung von p .⁷ Zu jedem $q \in K \setminus \{p\}$ bestimme eine offene Umgebung V_q von q und eine offene Umgebung

⁷Die Aussage des Lemmas ist nicht trivial, da wir nicht wissen, ob $K \subset U$. Man kommt auch nicht weiter, indem man K durch die Umgebung $U \cap K$ ersetzt, denn diese ist im allgemeinen nicht mehr kompakt ist.

W_q von p , so dass $V_q \cap W_q = \emptyset$.⁸ Wir setzen $V_p := U$. Dann ist $\{V_q \cap K \mid q \in K\}$ eine offene Überdeckung von K . Wegen der Kompaktheit gibt es eine endliche Teilüberdeckung, d. h. es gibt $q_1, \dots, q_N \in K \setminus \{p\}$, $N \in \mathbb{N}$, so dass $K \subset U \cup V_{q_1} \cup \dots \cup V_{q_N}$. Dies ergibt

$$\tilde{K} := K \setminus (V_{q_1} \cup \dots \cup V_{q_N}) \subset U.$$

Offensichtlich ist $\tilde{K}$ kompakt. Außerdem enthält $\tilde{K}$ die Umgebung $K \cap W_{q_1} \cap \dots \cap W_{q_N}$, ist also selber eine Umgebung von p . Wir haben somit die Lokalkompaktheit gezeigt. ■

Korollar 2.19. *Hausdorffräume mit einer kompakten Ausschöpfung sind lokal kompakt.* ■

Lemma 2.20. *Ist X ein lokal kompakter Hausdorffraum und besitzt X eine abzählbare Basis der Topologie $\mathcal{B}$, dann besitzt X eine kompakte Ausschöpfung.*

Beweis: Setze $\tilde{\mathcal{B}} := \{U \in \mathcal{B} \mid \overline{U} \text{ kompakt}\}$.

Behauptung: $\tilde{\mathcal{B}}$ ist ebenfalls eine Basis der Topologie auf X .

Denn sei $V \subseteq X$. Dann ist V eine Umgebung von jedem $p \in V$. Wegen der Lokalkompaktheit existiert eine kompakte Umgebung W von p mit $W \subset V$. Schreibe $p \in \overset{\circ}{W} = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \in \mathcal{B}$. Das heißt, es existiert ein $i_0 \in I$ mit $p \in U_{i_0} \subset \overline{U_{i_0}}$. Wegen $\overline{U_{i_0}} \subset \overline{W} = W$ ist $\overline{U_{i_0}}$ eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge, also selber kompakt.

Also existiert für alle $V \subseteq X$ und alle $p \in V$ ein $U \in \tilde{\mathcal{B}}$ mit $p \in U \subset \overline{U} \subset V$. Das impliziert $V = \bigcup \left\{ U \in \tilde{\mathcal{B}} \mid p \in U, U \subset V \right\}$, und damit ist $\tilde{\mathcal{B}}$ eine Basis der Topologie. $\square_{\text{Beh.}}$

Da $\tilde{\mathcal{B}}$ abzählbar ist, können wir $\tilde{\mathcal{B}} = \{U_1, U_2, \dots\}$ schreiben. Definiere nun die K_i rekursiv:

Anfang $i = 1$: $K_1 := \overline{U_1}$ ist kompakt. Setze $\ell_1 := 1$.

Schritt von $i - 1$ auf i : Seien die kompakte Menge K_{i-1} und $\ell_{i-1} \in \mathbb{N}$ mit $\ell_{i-1} \leq \#\tilde{\mathcal{B}}$ bereits definiert.⁹

Bestimme die kleinste natürliche Zahl $\ell_i \in \mathbb{N}$ so, dass

- $K_{i-1} \subset U_1 \cup \dots \cup U_{\ell_i}$ (nutze die Kompaktheit von K_i) und
- $\ell_i > \ell_{i-1}$ falls $\#\tilde{\mathcal{B}} > \ell_{i-1}$. (Sonst setze $\ell_i := \ell_{i-1} = \#\tilde{\mathcal{B}}$.)

Dann setze

$$K_i := \overline{U_1} \cup \overline{U_2} \cup \dots \cup \overline{U_{\ell_i}}.$$

Aus $K_{i-1} \subset U_1 \cup \dots \cup U_{\ell_i} \subset K_i$ und der Offenheit von U_k , $k = 1, \dots, \ell_i$ folgt $K_i \subset \overset{\circ}{K_{i+1}}$. Schließlich haben wir $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i = \bigcup \tilde{\mathcal{B}} = X$. ■

Definition 2.21. Sei $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Überdeckung eines topologischen Raums X . Dann heißt $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ **lokal endlich**, falls jeder Punkt $p \in X$ eine Umgebung V_p besitzt, sodass die Menge $\{\alpha \in A \mid U_\alpha \cap V_p \neq \emptyset\}$ endlich ist.

Eine Überdeckung $(V_\beta)_{\beta \in B}$ heißt **Verfeinerung** von $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$, falls zu jedem $\beta \in B$ ein $\alpha \in A$ existiert mit $V_\beta \subset U_\alpha$. Wir sagen auch $(V_\beta)_{\beta \in B}$ **verfeinert** $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$.

⁸Es ist kein Druckfehler, dass wir hier W_q und nicht W_p schreiben. Es ist zwar eine Umgebung von p , wir betrachten aber p als fixiert; und weiterhin hängt W_q von q ab.

⁹Im Fall, dass $\tilde{\mathcal{B}}$ unendlich ist, ist $\ell_{i-1} \leq \#\tilde{\mathcal{B}}$ natürlich trivial erfüllt.

Man beachte den Unterschied zu einer Teilüberdeckung: Eine Teilüberdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ wäre eine Überdeckung der Form $(U_\alpha)_{\alpha \in B}$ mit B endlich. Jede Teilüberdeckung ist also eine Verfeinerung. Aber nicht umgekehrt: in der Verfeinerung hat man mehr Flexibilität, da die Mengen kleiner werden dürfen.

Proposition 2.22 (Partition der Eins, starke Version). *Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung einer $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit M mit Atlas $\{\varphi_j: \widetilde{U}_j \rightarrow V_j\}_{j \in J}$ (mit $0 \leq k \leq \infty$). Dann gibt es eine Familie $(\eta_\alpha)_{\alpha \in A}$ mit $\eta_\alpha \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R})$ mit*

- (i) (a) $\text{supp}(\eta_\alpha)$ ist kompakt für alle $\alpha \in A$,
- (b) $(\text{supp}(\eta_\alpha))_{\alpha \in A}$ ist eine lokal endliche Überdeckung von M ,
- (c) $0 \leq \eta_\alpha \leq 1$,
- (d) $\sum_{\alpha \in A} \eta_\alpha(x) = 1$ für alle $x \in M$.
- (ii) $(\text{supp}(\eta_\alpha))_{\alpha \in A}$ verfeinert $(U_i)_{i \in I}$.
- (iii) $(\text{supp}(\eta_\alpha))_{\alpha \in A}$ verfeinert $(\widetilde{U}_j)_{j \in J}$.

Besitzt M nur abzählbare viele Zusammenhangskomponenten, dann kann A abzählbar gewählt werden.

Beweis: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass M zusammenhängend ist (sonst führe für jede Zusammenhangskomponente aus und summiere). Dann besitzt M eine abzählbare Basis der Topologie und somit eine kompakte Ausschöpfung $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Setze $K_0 := K_{-1} := \emptyset$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ zunächst fixiert. Zu jedem $p \in K_n \setminus \overset{\circ}{K}_{n-1}$ wähle $i_p \in I$ und $j_p \in J$ mit $p \in U_{i_p} \cap \widetilde{U}_{j_p}$. Wähle mit Lemma 1.108 eine glatte Funktion $f_p: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ mit $0 \leq f_p \leq 1$, $\text{supp}(f_p)$ kompakt und $\text{supp}(f_p) \subset \varphi_{j_p} \left(U_{i_p} \cap \widetilde{U}_{j_p} \cap \left(\overset{\circ}{K}_{n+1} \setminus K_{n-2} \right) \right) =: Y$, sowie $f_p(\varphi_{j_p}(p)) = 1$.

Wir haben benutzt, dass die Menge Y offen ist und $\varphi_{j_p}(p)$ enthält.

Definiere

$$\psi_p := \begin{cases} f_p \circ \varphi_{j_p} & , \text{ auf } \widetilde{U}_{j_p} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}).$$

Wir haben $0 \leq \psi_p \leq 1$, $\psi_p(p) = 1$ und $\text{supp}(\psi_p)$ kompakt.

Nun ist $W_p := \psi_p^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset \text{supp}(\psi_p)$ eine offene Umgebung von p .

Wähle mit einem Kompaktheitsargument $p_1, \dots, p_{r_n}$ so, dass $K_n \setminus \overset{\circ}{K}_{n-1} \subset \bigcup_{\ell=1}^{r_n} W_{p_\ell}$.

Setze nun $A := \left\{ \underbrace{(n, \ell)}_{\alpha :=} \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq \ell \leq r_n \right\}$ und $\Psi_\alpha := \Psi_{n, \ell} := \psi_{p_\ell}$.

Dann ist $(\text{supp}(\Psi_\alpha))_{\alpha \in A}$ lokal endlich, $\text{supp}(\Psi_\alpha)$ ist kompakt und $\sum_{\ell=1}^{r_n} \Psi_{(n, \ell)}(p) > 0$ für alle $p \in K_n \setminus \overset{\circ}{K}_{n-1}$, $0 \leq \Psi_\alpha(p) \leq 1$ für alle $p \in M$.

Also gilt auch $\sum_{\alpha \in A} \Psi_\alpha > 0$ auf M und diese Funktion ist in $\mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}_{>0})$.

Offenbar verfeinert $(\text{supp}(\Psi_\alpha))_\alpha$ die Überdeckungen $(U_i)_{i \in I}$ und $(\widetilde{U}_j)_{j \in J}$.

Setze nun

$$\eta_\alpha := \frac{\Psi_\alpha}{\sum_{\alpha' \in A} \Psi_{\alpha'}}.$$

Dann erfüllen die η_α alle gewünschten Eigenschaften. ■

Korollar 2.23 (Partition der Eins, schwache Version). Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung einer $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit M , $0 \leq k \leq \infty$. Dann gibt es $\zeta_i \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R})$ mit $0 \leq \zeta_i \leq 1$, $\text{supp}(\zeta_i) \subset U_i$, $\sum_{i \in I} \zeta_i = 1$ und $(\text{supp}(\zeta_i))_{i \in I}$ ist eine lokal endliche Überdeckung. Man nennt $(\zeta_i)_{i \in I}$ eine **Partition der Eins** zur Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$.

Beweis: Wähle $(\eta_\alpha)_{\alpha \in A}$ zu einem Atlas wie in Proposition 2.22. Wähle zu jedem $\alpha \in A$ ein $i_\alpha \in I$ mit $\text{supp}(\eta_\alpha) \subset U_{i_\alpha}$. Setze dann

$$\zeta_i := \sum_{\substack{\alpha \in A \\ i_\alpha = i}} \eta_\alpha. \quad \blacksquare$$

Beispiel 2.24. Sei $p \in M$ und U eine offene Umgebung von p in M . Bestimme zur offenen Überdeckung $(U, M \setminus \{p\})$ eine Partition der Eins (ζ_1, ζ_2) mit $\text{supp}(\zeta_2) \subset M \setminus \{p\}$. Dann gilt $p \in W := U \cap (M \setminus \text{supp}(\zeta_2)) \Subset M$ und

$$\zeta_1 = 1 - \zeta_2 = \begin{cases} 0 & , \text{ auf } M \setminus U \\ \in [0, 1] & , \text{ auf } U \setminus W \\ 1 & , \text{ auf } W. \end{cases}$$

2.3 Der Tangentialraum

Definition 2.25. Sei M^m eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit ($1 \leq k \leq \infty$), $p \in M$ und $\ell \leq k$. Eine $\mathcal{C}^\ell$ -**Kurve** in M ist eine $\mathcal{C}^\ell$ -Abbildung $c: I \rightarrow M$ wobei I ein offenes Intervall ist.

Für $p \in M$ definiere $\mathcal{C}_p := \{c: I \rightarrow M \mid 0 \in I, I \text{ ein offenes Intervall, } c(0) = p, c \text{ ist } \mathcal{C}^1\text{-Kurve}\}$. Definiere eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathcal{C}_p$: Seien $c_1, c_2 \in \mathcal{C}_p$ und sei $\varphi: U \rightarrow V$ eine Karte mit $p \in U$. Dann gilt $c_1 \sim c_2$ genau dann, wenn $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}(\varphi \circ c_1) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}(\varphi \circ c_2)$.

Den **Tangentialraum** von M im Punkte p definieren wir als die Menge $T_p M := \mathcal{C}_p / \sim$. Die Elemente in $T_p M$ heißen **Tangentialvektoren**.

Lemma 2.26. Die Relation $\sim$ in Definition 2.25 hängt nicht von der Wahl der Karte φ ab.

Beweis: Sei $\psi: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ eine weitere Karte und $p \in U \cap \tilde{U}$. Dann rechne für $c = c_1$ und $c = c_2$

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(\psi \circ c) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c) = (\psi \circ \varphi^{-1})' \big|_{\varphi(p)} \cdot \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(\varphi \circ c).$$

Nun ist aber $(\psi \circ \varphi^{-1})' \big|_{\varphi(p)}$ ein Isomorphismus von Vektorräumen. Deshalb

$$\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(\varphi \circ c_1) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(\varphi \circ c_2) \right) \iff \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(\psi \circ c_1) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(\psi \circ c_2) \right). \quad \blacksquare$$

Lemma 2.27. Die Definition

$$d_p \varphi: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad [c] \mapsto \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(\varphi \circ c)$$

liefert eine wohldefinierte und bijektive Abbildung.

Beweis: „Wohldefiniertheit und Injektivität“: Beides folgt sofort aus der Definition von $\sim$ (Hin- und Rückrichtung).

„Surjektivität“: Sei $v \in \mathbb{R}^m$. Da $V = \text{im } \varphi$ offen ist, gibt es aus Stetigkeitsgründen ein $\epsilon > 0$, so dass $\varphi(p) + tv \in V$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Setze $c(t) := \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)$.

Es gilt $(d_p \varphi)([c]) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi(p) + tv) = v$, also folgt die Surjektivität.

Dabei ist $c(t)$ nur wohldefiniert für t so klein, dass $\varphi(p) + tv \in \text{im}(\varphi)$ gilt. Solch ein $\epsilon > 0$ findet man, da $t \mapsto \varphi(p) + tv$ stetig ist und wegen $\varphi(p) \in \text{im}(\varphi)$ und der Offenheit von $\text{im}(\varphi)$. ■

Definiere nun eine Vektorraumsstruktur auf $T_p M$ so, dass $d_p \varphi$ linear ist. Diese Vektorraumstruktur auf $T_p M$ ist unabhängig von der Wahl der Karte, siehe Aufgabe 1 auf Tutoriumsblatt 9.

Bemerkung 2.28. Für $p \neq q$ gilt $T_p M \cap T_q M = \emptyset$. Diese offensichtliche Eigenschaft ist anders als bei unserer elementaren Definition von $T_p M$ in Kapitel 1.

Bemerkung. Ist M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^\ell$, $p \in M$ und $T_p M \subset \mathbb{R}^\ell$ der Tangentialraum im Sinne von Kapitel 1, $T_p M = \mathcal{C}_p / \sim$ wie oben.

Dann ist

$$\begin{aligned} T_p M &\longrightarrow T_p M \\ [c] &\longmapsto \dot{c}(0) \end{aligned}$$

ein Vektorraum-Isomorphismus.

Definition 2.29 (Koordinatenvektorfelder). Definiere das i -te **Koordinatenvektorfeld** der Karte φ als

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p := \left[t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i) \right].$$

Es gilt $d_p \varphi \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi(p) + te_i) = e_i$, und damit ist $\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^m} \Big|_p \right)$ eine Basis von $T_p M$. Ist $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)$, so folgt analog $d_p \varphi^j \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) = \delta_i^j$.

Definition 2.30. Seien M^m und N^n zwei $\mathcal{C}^1$ -Mannigfaltigkeiten, $f \in \mathcal{C}^1(M, N)$ und $p \in M$. Dann definiere das **Differential** oder die **Ableitung** von f in p durch

$$d_p f: T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N, \quad [c] \longmapsto [f \circ c].$$

Lemma 2.31. Die Abbildung $d_p f$ in Definition 2.30 ist wohldefiniert und linear.

Beweis: Sei $\varphi: U \longrightarrow V$ eine Karte von M mit $p \in U$ und $\psi: \tilde{U} \longrightarrow \tilde{V}$ eine Karte von N mit $f(p) \in \tilde{U}$.

Seien $c_1 \sim c_2$. Das heißt $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c_1) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c_2)$. Rechne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\psi \circ f \circ c_1) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c_1) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})' \Big|_{\varphi(p)} \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c_1) \\ &= (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})' \Big|_{\varphi(p)} \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c_2) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\psi \circ f \circ c_2) \end{aligned}$$

Also gilt $f \circ c_1 \sim f \circ c_2$.

Betrachte nun das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{d_p f} & T_{f(p)} N \\ \downarrow d_p \varphi \wr & \circlearrowleft & \downarrow d_{f(p)} \psi \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'|_{\varphi(p)}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Da $d_p \varphi$, $d_{f(p)} \psi$ und $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'|_{\varphi(p)}$ linear sind, ist auch $d_p f$ linear als Verkettung linearer Abbildungen. ■

Bemerkung 2.32. (i) Ist V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $p \in V$. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus $I_p: V \rightarrow T_p V$, $v \mapsto [t \mapsto p + tv]$. Wir identifizieren im folgenden zumeist V mit $T_p V$.

(ii) Das Symbol $d_p \varphi$ besitzt zwei Bedeutungen (siehe Lemma 2.27 und Definition 2.30 mit $N = \mathbb{R}^m$). Man rechnet leicht nach, dass

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{d_p \varphi} & \mathbb{R}^m \\ \downarrow d_p \varphi & \circlearrowleft & \nearrow I_{\varphi(p)} \\ T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^m & & \end{array}$$

kommutiert. Das heißt, die beiden Bedeutungen stimmen nach Identifikation von $\mathbb{R}^m$ mit $T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^m$ überein.

(iii) Ist $c: I \rightarrow M$ eine $\mathcal{C}^1$ -Kurve, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Dann betrachte

$$d_{t_0} c: \mathbb{R} \cong T_{t_0} \mathbb{R} \rightarrow T_{c(t_0)} M, \quad e_1 \mapsto [c(\bullet + t_0)] = d_{t_0} c(e_1).$$

Schreibweise: $T_{c(t_0)} M \ni \dot{c}(t_0) := [c(\bullet + t_0)] = (d_{c(t_0)} \varphi)^{-1} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} (\varphi \circ c) \right)$.

Insbesondere haben wir dann $\dot{c}(0) = [c]$.

Wenn wir den über Äquivalenzklassen von Kurven definierten Tangentialraum mit dem Tangentialraum aus Kapitel 1 identifizieren, so verallgemeinert $\dot{c}(t_0)$ die für Untermannigfaltigkeiten bereits bekannte Bedeutung.

(iv) Seien $f_1 \in \mathcal{C}^1(M_1, M_2)$ und $f_2 \in \mathcal{C}^1(M_2, M_3)$. Dann gilt die **Kettenregel** $d_p(f_2 \circ f_1) = d_{f_1(p)} f_2 \circ d_p f_1$. Beweis: Tutoriumsblatt 8, 1. Aufgabe.

(v) Es gelte $\dim(M_1) = \dim(M_2)$ und $f \in \mathcal{C}^\ell(M, N)$. Ist nun $d_p f$ ein Isomorphismus, dann gibt es eine offene Umgebung $p \in U \subset M_1$, so dass $f(U) \subseteq M_2$ gilt und so dass $f|_U: U \rightarrow f(U)$ ein $\mathcal{C}^\ell$ -Diffeomorphismus ist.

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 12.06.

12.6.

lokaler Umkehrsatz, d. h. Analysis II, Kapitel 9, Satz 4.3

2.4 Derivationen in einem Punkt

Erinnerung: Wir schreiben oft verkürzend

$$\mathcal{C}^\infty(M) := \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}).$$

Definition 2.33. Zu $\dot{c}(0) = [c] = X \in T_p M$ und $f \in \mathcal{C}^1(M)$ definiere die **Richtungsableitung**¹⁰

$$\partial_X f := d_p f(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ c) = [f \circ c].$$

Es gilt dabei $d_p \varphi^i \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) = \delta_{ij}$. Das heißt $\{d_p \varphi^i\}_{1 \leq i \leq m}$ ist die zu $\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p \right\}_{1 \leq i \leq m}$ duale Basis des **Kotangentialraums** $T_p^* M := (T_p M)^* = \text{Hom}(T_p M, \mathbb{R})$.

Definition 2.34. Eine **Derivation** in p ist eine lineare Abbildung $D: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g)$. Man sollte diese Formel als Produktregel für die Ableitung ansehen, vergleiche das unten stehende Beispiel.

Es bezeichne $\mathcal{D}_p$ die Menge aller Derivationen in p . Dann ist $\mathcal{D}_p \subset \mathcal{C}^\infty(M)^*$ ein Untervektorraum.

Beispiel. Für $X \in T_p M$ ist $\partial_X: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Derivation in p .

Satz 2.35. Die Abbildung $\partial := \partial_\bullet: T_p M \rightarrow \mathcal{D}_p$, $X \mapsto \partial_X$ ist ein Vektorraum-Isomorphismus.

Beweis: „**Schritt 1:** Linearität“: Die Linearität von ∂ folgt aus der Linearität von $d_p f$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

„**Schritt 2**“: Sei $D \in \mathcal{D}_p$. Dann gilt $D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) \cdot 1 + 1 \cdot D(1) = 2D(1)$, also $D(1) = 0$ und damit $D(f) = 0$ für alle $f \equiv \text{const}$.

„**Schritt 3:** Lokalität, Teil1“: Sei $D \in \mathcal{D}_p$, U eine offene Umgebung von p , $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Gilt nun $f|_U \equiv g|_U$, dann folgt $D(f) = D(g)$.

Begründung: Bestimme mit Beispiel 2.24 eine Funktion $\chi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $\text{supp}(\chi) \subset U$, $\chi \equiv 1$ auf Umgebung um p . Dann folgt $\chi \cdot (f - g) \equiv 0$, also

$$0 = D(\chi \cdot (f - g)) = D(\chi) \cdot \underbrace{(f(p) - g(p))}_{=0} + \underbrace{\chi(p)}_{=1} D(f - g).$$

Also gilt $D(f - g) = 0$ und damit $D(f) = D(g)$.

„**Schritt 4:** Lokalität, Teil2“: Sei $U \subseteq M$, $p \in M$. Bestimme χ wie in Schritt 3. Dann sind die beiden Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_p^U &\longleftrightarrow \mathcal{D}_p^M \\ D^U &\longmapsto D^U \circ \text{res}_U \\ D^M \circ (\cdot \chi) &\longleftarrow D^M \end{aligned}$$

zueinander invers (Begründung: folgt aus Schritt 3). Hierbei ist

$$\text{res}_U: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U), \quad f \mapsto f|_U$$

¹⁰Dies verallgemeinert also Definition 1.59 von Untermannigfaltigkeiten auf Mannigfaltigkeiten.

die Restriktionsabbildung, und

$$\cdot \chi: \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M), \quad f \longmapsto „f \cdot \chi“ = \left(x \longmapsto \begin{cases} f(x) \cdot \chi(x) & x \in U \\ 0 & x \in M \setminus U \end{cases} \right)$$

ist die Multiplikation mit der **Abschneidefunktion** χ , gefolgt von einer Fortsetzung durch Null auf $M \setminus U$. Die Funktion $f \cdot \chi$ ist glatt auf $M \setminus \text{supp}(\chi)$ und glatt auf U , also auch glatt auf M .

„**Schritt 5:** Injektivität“: Sei $\varphi: U \longrightarrow V$ eine Karte, χ wie oben und $p \in U$.

Angenommen $\partial_X = 0$. Dann schreibe: $X = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p$ und rechne

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_X \overbrace{(\chi \cdot \varphi^i)}^{\mathcal{C}^\infty(M)} = \partial_{\sum_j a^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \Big|_p} (\chi \cdot \varphi^i) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_j a^j \partial_{\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \Big|_p} (\varphi^i) = \sum_j a^j \underbrace{d_p \varphi^i \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \Big|_p \right)}_{\delta_{ij}} = a^i. \end{aligned}$$

Also folgt $X = 0$.

(*) Dies gilt nach Schritt 3 und 4, da $\chi \equiv 1$ auf einer Umgebung um p .

„**Schritt 6:** Surjektivität“: Seien φ und χ wie oben und $D \in \mathcal{D}_p^M$ beliebig. Setze $a^j := D(\chi \cdot \varphi^j)$ und $X := \sum_j a^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \Big|_p$.

$\tilde{D} := \partial_X - D \in \mathcal{D}_p^M$ erfüllt $\tilde{D}(\chi \cdot \varphi^k) = 0$ für alle $k = 1, \dots, m$. Mit denselben Rechnungen wie in Schritt 5 folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{D}(\chi \cdot \varphi^k) &= \partial_X(\chi \cdot \varphi^k) - D(\chi \cdot \varphi^k) \\ &= \left(\sum_i a^i \partial_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} (\chi \cdot \varphi^k) \right) - a^k \\ &= \left(\sum_i a^i \underbrace{\partial_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} (\varphi^k)}_{\delta_{ik}} \right) - a^k = a^k - a^k = 0. \end{aligned}$$

Sei nun $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ beliebig gegeben. Wähle h_i und W wie im folgenden Lemma 2.36. Nun rechne

$$\begin{aligned} \tilde{D}(f) &= \tilde{D}^W(f|_W) = \underbrace{\tilde{D}^W(\underbrace{f(p)}_{=\text{const}})}_{=0} + \tilde{D}^W\left(\sum_i h_i \varphi^i\right) \\ &= \sum_i \left(\tilde{D}^W(h_i) \underbrace{\varphi^i(p)}_{=0} + h_i(p) \cdot \underbrace{\tilde{D}^W(\varphi^i)}_{=\tilde{D}(\chi^W \varphi^i)=0} \right) = 0. \end{aligned}$$

(Beachte $\tilde{D}^W := \tilde{D} \circ (\cdot \chi)$ und $\text{supp}(\chi^W) \subset W$).

Damit gilt also $D = \partial_X$, und damit folgt die Surjektivität. ■

Lemma 2.36. Sei $f \in \mathcal{C}^1(M)$, $\varphi: U \longrightarrow V$ eine Karte, $p \in U$ und $\varphi(p) = 0$. Dann gibt es eine

offene Umgebung $W \subseteq U$ von p und Funktionen $h_i \in \mathcal{C}^0(W)$ mit $f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^m h_i(q) \varphi^i(q)$ für alle $q \in W$.

Ist $f \in \mathcal{C}^k(M)$, so können die $h_i \in \mathcal{C}^{k-1}(M)$ gewählt werden.

Beweis: Setze $F := f \circ \varphi^{-1}$. Sei nun $x \in B_r(0) \subseteq V$ und $W_x(t) := F(tx)$ für $t \in [0, 1]$. Es gilt

$$F(x) - F(0) = W_x(1) - W_x(0) \stackrel{\text{HDI}}{=} \int_0^1 W'_x(t) dt = \sum_{i=1}^m \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x^i} \Big|_{tx} \cdot \underbrace{x^i}_{=\varphi^i(q)} dt$$

für $\varphi(q) =: x = (x^1, \dots, x^m)$. Setze $h_i(q) := \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x^i} \Big|_{t\varphi(q)} dt$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_i \underbrace{h_i \circ \varphi^{-1}(x)}_{h_i(q)} \cdot \underbrace{x^i}_{\varphi^i(q)} &= \underbrace{F(x)}_{F(\varphi(q))} - F(0) \\ \implies \sum_i h_i(q) \varphi^i(q) &= f(q) - f(p). \end{aligned}$$

■

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 16.06.

2.5 Vektorfelder und Lie-Klammer

16.6.

Sei M^m eine (glatte) Mannigfaltigkeit.

Wiederholungen: Für $q \neq p$ gilt $T_p M \cap T_q M = \emptyset$. Das Symbol $\dot{\bigcup}$ bezeichnet die disjunkte Vereinigung.

Definition 2.5.1. Das **Tangentialbündel** von M ist gegeben durch¹¹

$$TM := \dot{\bigcup}_{p \in M} T_p M$$

und das **Kotangentialbündel** von M ist gegeben durch

$$T^*M = \dot{\bigcup}_{p \in M} T_p^* M.$$

Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \pi_{TM}: TM &\longrightarrow M, & T_p M \ni X &\longmapsto p \\ \pi_{T^*M}: T^*M &\longrightarrow M, & T_p^* M \ni \alpha &\longmapsto p \end{aligned}$$

¹¹Sie fragen sich hier vielleicht: wieso schreiben wir hier $\dot{\bigcup}_{p \in M} T_p M$ und nicht $\bigcup_{p \in M} T_p M$ oder $\coprod_{p \in M} T_p M$? Alle drei Schreibweisen führen zum richtigen Ziel, wenn man sie richtig interpretiert. Da die Tangentialräume bereits disjunkt ist, stimmt die Vereinigung $\bigcup$ mit der disjunkten Vereinigung $\dot{\bigcup}$ „im wesentlichen“ überein. Viele Mathematiker nutzen für das die disjunkte Vereinigung das Koprodukt-Symbol $\coprod$, was deswegen gerechtfertigt ist, da es das kategorientheoretische Koprodukt in der Kategorie der Mengen ist. An dieser Stelle muss man dann aber dazu sagen, dass wir hier in der Kategorie der Mengen arbeiten. In den Kategorien der topologischen Räume oder glatten Mannigfaltigkeiten ist die Aussage $TM := \coprod_{p \in M} T_p M$ nicht mehr richtig.

Um hier Missverständnisse auszuschließen, nutze ich das Symbol $\dot{\bigcup}$.

heißen die **Projektionsabbildungen** von TM bzw. T^*M .

Ein **Vektorfeld** ist eine Abbildung $X: M \rightarrow TM$ mit $\pi_{TM} \circ X = \text{id}_M$ und eine **1-Form** (oder **Pfaffsche Form**) ist eine Abbildung $\alpha: M \rightarrow T^*M$ mit $\pi_{T^*M} \circ \alpha = \text{id}_M$. Man beachte: $\pi_{TM} \circ X = \text{id}_M$ ist äquivalent zu $\forall p \in M: X|_p \in T_pM$, und $\pi_{T^*M} \circ \alpha = \text{id}_M$ ist äquivalent zu $\forall p \in M: \alpha|_p \in T_p^*M$.

Schreibweise.

Für den Wert von X an der Stelle $p \in M$ schreiben wir zumeist X_p oder $X|_p$, wohingegen wir die Bezeichnung $X(p)$ nicht nutzen wollen, um Verwechslungen mit $X(f) := \partial_X(f)$ zu vermeiden. Analog schreiben wir dann α_p oder $\alpha|_p$ für den Wert von α an der Stelle $p \in M$.

Bemerkung 2.5.2. Übungsblatt 10, Aufgabe 4 liefert eine glatte Struktur auf TM , sodass TM zu einer glatten Mannigfaltigkeit der Dimension $2 \dim(M)$ wird. So ähnlich macht man aus T^*M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $2 \dim(M)$.

Sei $\varphi: U \rightarrow V$ eine Karte von M^m . Für $p \in U$ gilt $T_pU = T_pM$. Wir definieren hierzu eine Karte von TM

$$\Phi: TU \rightarrow V \times \mathbb{R}^m, \quad T_pU \ni v \mapsto (\varphi(p), d_p\varphi(v)).$$

Wenn nun φ einen Atlas von M durchläuft, so ergeben die zugehörigen Φ einen Atlas von TM . Man beachte, dass sich hieraus nun eine Topologie auf TM ergibt.¹² In der oben genannten Übungsaufgabe ist insbesondere zu zeigen, dass diese Topologie hausdorffsch ist und jede Zusammenhangskomponenten eine abzählbare Basis der Topologie besitzt.

Analog definiert man

$$\Phi^*: T^*U = \bigcup_{p \in U} T_p^*M \rightarrow V \times \mathbb{R}^m, \quad \alpha \mapsto \left(\varphi(p), \underbrace{\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p \right)}_{\alpha \circ (d_p\varphi)^{-1} \in (\mathbb{R}^m)^* \cong \mathbb{R}^m} \right)_{1 \leq i \leq m}.$$

Diese Abbildung definiert analog eine glatte Struktur auf T^*M .

Bemerkung 2.5.3. Man nennt ein Vektorfeld $\mathcal{C}^k$, wenn es als Abbildung $\mathcal{C}^k$ ist. Stimmt nun diese Definition von „ $\mathcal{C}^k$ -Vektorfeldern“ mit der aus Kapitel 1 über Untermannigfaltigkeiten überein?

Sei $\varphi: U \rightarrow V$ eine Karte. Schreibe $X_p = \sum_{i=1}^m X_\varphi^i|_p \frac{\partial}{\partial \varphi^i}|_p$. Daraus folgt $X_\varphi^i|_p = d_p\varphi(X|_p)$.

$X|_U$ ist genau dann $\mathcal{C}^k$, wenn $\Phi \circ X|_U$ in $\mathcal{C}^k$ ist, also genau dann, wenn für alle i gilt, dass $X_\varphi^i \in \mathcal{C}^k$ ist.

X ist genau dann $\mathcal{C}^k$, wenn in allen Karten $\varphi: U \rightarrow V$ eines Atlanten und für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt, dass $X_\varphi^i \in \mathcal{C}^k$.

Somit haben wir gezeigt: Das Vektorfeld X auf einer Untermannigfaltigkeit ist als Abbildung $M \rightarrow TM$ genau dann $\mathcal{C}^k$, wenn es im Sinne von Kapitel 1 $\mathcal{C}^k$ ist.

Analog dazu: Die glatte Struktur auf T^*M ist so gewählt, so dass für jede 1-Form α gilt:

$$\alpha \text{ ist in } \mathcal{C}^k \text{ genau dann, wenn für alle Karten } (\varphi_i: U \rightarrow V) \in \mathcal{A} \text{ und} \\ \text{alle } i \in \{1, \dots, m\} \text{ die Abbildung } p \mapsto \alpha|_p \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p \right) \text{ in } \mathcal{C}^k \text{ ist.}$$

¹²Diese Stelle der Vorlesung ist der Grund, wieso wir in Definition 2.1 (3) nicht mit einer gegebenen Topologie begonnen haben, sondern durch Lemma 2.3 die Topologie bestimmt haben.

Wenn wir α als Linearkombination der Koordinatenkovektorfelder schreiben $\alpha = \sum_{j=1}^m \alpha_j d\varphi^j$, dann rechnet man

$$\alpha|_p \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p \right) = \sum_{j=1}^m \alpha_j|_p \underbrace{d\varphi^j \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p \right)}_{\delta_{ij}} = \alpha_i|_p.$$

Wir sehen somit: α ist $\mathcal{C}^k$ als Abbildung $M \rightarrow \mathbb{T}^*M$ genau dann wenn die Koeffizienten φ_i für alle i und alle Karten eines Atlanten glatt sind.

Definitionen und Bemerkungen 2.5.4.

- (i) Es bezeichne $\mathfrak{X}(M) := \Gamma(TM) := \{\text{glatte Vektorfelder}\}$. Dies ist ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum und ein $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Modul.
- (ii) Setze $\Omega^1(M) := \Gamma(\mathbb{T}^*M) := \{\text{glatte 1-Formen}\}$. Dies ist ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum und ein $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Modul.
- (iii) Ist $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, so ist die Abbildung $df : M \rightarrow \mathbb{T}^*M$ definiert durch $p \mapsto d_p f$ glatt. Damit erhält man eine Abbildung

$$d : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \Omega^1(M), \quad f \mapsto df. \quad (2.5.1)$$

- (iv) Ist $\alpha \in \Omega^1(M)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$ so erhält man eine Abbildung

$$\alpha(X) : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \alpha|_p(X|_p)$$

wobei $\alpha(X) \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Die Abbildung $\Omega^1(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$, $(\alpha, X) \mapsto \alpha(X)$ ist $\mathcal{C}^\infty(M)$ -bilinear, d. h. bilinear im Sinne von $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Moduln.

- (v) Erhalte eine Abbildung $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \text{End}(\mathcal{C}^\infty(M))$, $X \mapsto \partial_X = (f \mapsto (df)(X))$. Hierbei bezeichnet End die Vektorraum-Endomorphismen. Diese Abbildung ist $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linear im folgenden Sinn: $\partial_{gX} f = g \partial_X f$ für $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$.
- (vi) Für $f, \tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(M)$ gilt: $\partial_X(f\tilde{f}) = (\partial_X f)\tilde{f} + f(\partial_X \tilde{f})$. (Produktregel) Mit Hilfe von $\partial_X f = df(X)$ übersetzt sich dies in

$$d(f\tilde{f}) = \tilde{f}df + f d\tilde{f}. \quad (2.5.2)$$

- (vii) Ist A eine $\mathbb{R}$ -Algebra, so nennt man $D \in \text{End}(A)$ eine **Derivation** von A , falls

$$D(f\tilde{f}) = (Df)\tilde{f} + f(D\tilde{f})$$

gilt. Zum Beispiel ist ∂_X ist eine Derivation von $A = \mathcal{C}^\infty(M)$. Den Raum aller Derivation von A bezeichnen wir mit $\mathcal{D}(A)$. Somit $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{C}^\infty(M))$, $X \mapsto \partial_X$.

Es sei $\text{ev}_p : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto f(p)$ die **Einsetzungsabbildung**.

Bemerkung 2.5.5. Jede lineare Abbildung $D : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ erfüllt:

$$\begin{aligned} & D \text{ ist eine Derivation von } \mathcal{C}^\infty(M) \\ \iff & \text{ für alle } p \in M \text{ gilt: } D(f\tilde{f})(p) = f(p)(D\tilde{f})(p) + (Df)(p)\tilde{f}(p). \end{aligned}$$

$$\iff \text{ für alle } p \in M \text{ gilt: } \text{ev}_p \circ D \in \mathcal{D}_p.$$

Wir bezeichnen nun

Lemma 2.5.6. Die Abbildung $\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{C}^\infty(M))$, $X \longmapsto \partial_X$ ist bijektiv und $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linear.

Beweis: „Linearität“: Die Linearität ist klar.

„Injektivität“: Sei $\partial_X = 0$, dann $\partial_{X_p} = \text{ev}_p \circ \partial_X = 0$. Mit Satz 2.35 folgt also $X_p = 0$ für alle p , also $X = 0$.

„Surjektivität“: Sei D eine Derivation von $\mathcal{C}^\infty(M)$, dann ist $\text{ev}_p \circ D$ eine Derivation in p für alle $p \in M$.

Nach Satz 2.35 existiert damit für alle $p \in M$ genau ein $X_p \in T_p M$ mit $\partial_{X_p} = \text{ev}_p \circ D$.

Es bleibt zu zeigen, dass das Vektorfeld $p \longmapsto X_p$ glatt ist.

Zu $p_0 \in M$ wähle eine Karte $\varphi: U \longrightarrow V$ mit $p_0 \in U$. Mit Beispiel 2.24 wähle eine Funktion $\eta \in \mathcal{C}^\infty(M)$, die auf einer Umgebung W von p_0 konstant 1 ist und $\text{supp}(\eta) \subset U$. Wir setzen die glatte Funktion $\eta\varphi^i: U \longrightarrow \mathbb{R}$ durch Null zu einer glatten Funktion $\eta\varphi^i: M \longrightarrow \mathbb{R}$ fort, die wir im Sinne einer einfachen Notation wieder mit $\eta\varphi^i$ bezeichnen.

Schreibe $X|_U = \sum X^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ auf U . Dann gilt für $p \in W$, wobei wir an der Stelle $(*)$ die Teilaussagen im Beweis von Satz 2.35 nutzen:

$$\begin{aligned} \left(D \left(\underbrace{\eta\varphi^i}_{\in \mathcal{C}^\infty(M)} \right) \right) (p) &= \partial_{X_p} (\eta\varphi^i) \stackrel{(*)}{=} \underbrace{\partial_{X_p}}_{\in \mathcal{D}_p^W} (\varphi^i|_W) \\ &= \sum_j X^j|_p \underbrace{\partial_{\frac{\partial}{\partial \varphi^j}}|_p}_{=\delta_{ij}} (\varphi^i) = X^i|_p. \end{aligned}$$

Wir haben also $D(\eta\varphi^i)|_W = X^i|_W$ und mit $D(\eta\varphi^i) \in \mathcal{C}^\infty(M)$ folgt hieraus $X^i|_W \in \mathcal{C}^\infty(W)$. Also ist X glatt auf der Umgebung W von p_0 . Da diese Argumentation für alle $p_0 \in M$ gilt, ist somit X glatt. ■

Ab sofort werden Elemente in $T_p M$ mit Derivationen $\mathcal{D}_p$ in p identifiziert (via $X \hat{=} \partial_X$).

Außerdem werden glatte Vektorfelder identifiziert mit Derivationen auf $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Es gilt somit

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p f = \partial_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p} f = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}).$$

Also entspricht $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ der partiellen Ableitung $\frac{\partial}{\partial x^i}$ in der Karte φ .

Lemma 2.5.7. Ist A eine $\mathbb{R}$ -Algebra und $D, \tilde{D}$ Derivationen auf A . Dann ist $[D, \tilde{D}] = D\tilde{D} - \tilde{D}D$ ebenfalls eine Derivation.

Beweis: Eine Übungsaufgabe: [Übungsblatt 10, Aufgabe 1](#). ■

Lemma 2.5.8. Mit $\mathfrak{X}(M) = \{\text{Derivationen auf } \mathcal{C}^\infty(M)\}$ erhält man eine lineare Abbildung

$$\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$(X, Y) \mapsto [X, Y] = XY - YX = \partial_X \partial_Y - \partial_Y \partial_X = \partial_{[X, Y]} \in \text{End}(\mathcal{C}^\infty(M)).$$

Dabei heißt $[X, Y]$ die **Lie-Klammer** von X und Y .

Es gelten für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ die Relationen

$$(i) \quad [X, Y] = -[Y, X]. \quad (\text{Antisymmetrie})$$

$$(ii) \quad [fX, Y] = f[X, Y] - \underbrace{Y(f)}_{=\partial_Y f} X.$$

$$(iii) \quad [X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y.$$

$$(iv) \quad [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \quad \text{für alle } X, Y, Z \in \text{End}(V) \text{ also insbesondere für} \\ \text{alle } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M) \subset \text{End}(\mathcal{C}^\infty(M)). \quad (\text{Jacobi-Identität})$$

Beweis: „(i)“: Offensichtlich.

„(ii)“: Es gilt für alle $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dass

$$\begin{aligned} [fX, Y](g) &= \partial_{fX} \partial_Y g - \partial_Y \partial_{fX} g = f \partial_X \partial_Y g - \underbrace{\partial_Y (f \partial_X g)}_{=(\partial_Y f)(\partial_X g) + f \partial_Y \partial_X g} \\ &= f \cdot \underbrace{[\partial_X, \partial_Y](g)}_{=\partial_{[X, Y]}(g)} - \underbrace{\partial_Y f}_{Y(f)} \underbrace{\partial_X g}_{X(g)}. \end{aligned}$$

Dies bedeutet dann:

$$[fX, Y] = f \cdot [X, Y] - Y(f)X.$$

„(iii)“: folgt direkt aus (i) und (ii).

„(iv)“: Nachrechnen liefert 12 Summanden, von denen sich je zwei wegheben. ■

Bemerkung 2.5.9. Ist $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Die Ableitung $dF : TM \rightarrow TN$ wird dann durch die folgende Formel charakterisiert:

$$\partial_{dF(X)} f = \partial_X (f \circ F) \quad \forall p \in M, \forall X \in T_p M \forall f \in \mathcal{C}^\infty(N).$$

Mit Hilfe der neuen Identifikation von Tangentialvektoren mit Derivationen kann man hierfür auch schreiben: $(dF(X))(f) = X(f \circ F)$.

2.6 Tensoren

Sei M^m eine glatte Mannigfaltigkeit. Im folgenden sind alle Tensorprodukte als Tensorprodukte von reellen Vektorräumen zu verstehen. Man beachte auch, dass die Abbildung $V \otimes \mathbb{R} \rightarrow V$, $v \otimes 1 \mapsto v$ ein „natürlicher“ Isomorphismus ist. Deswegen könnte man zu allen Tensorprodukten $\otimes \mathbb{R}$ hinzufügen, ohne dass sich etwas wesentliches daran ändert. 19.6.

Definition 2.6.1. Setze

$$\mathcal{T}_p^{(r,s)} M := \bigotimes_{r,s} T_p M := \underbrace{T_p M \otimes T_p M \otimes \dots \otimes T_p M}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{T_p^* M \otimes T_p^* M \otimes \dots \otimes T_p^* M}_{s\text{-mal}}.$$

und $\mathcal{T}_p^{(0,0)} := \mathbb{R}$.¹³

Ein Element aus $\mathcal{T}_p^{(r,s)}M$ heißt ein (r, s) -Tensor.

Wieso brauchen wir Tensoren? Man benötigt sie, um Spannungen in einem Material in der Elastizitätstheorie und Materialwissenschaft zu beschreiben; daher kommt das Wort Tensor, von den Spannungen. Wir brauchen sie auch, um die erste Fundamentalform auf Mannigfaltigkeiten zu verallgemeinern. Der riemannsche Krümmungstensor beschreibt die Krümmung einer Mannigfaltigkeit. Ein Spezialfall von Tensoren sind die (alternierenden) Differentialformen, die dann in Kapitel 3 eine zentrale Rolle spielen.

Beispiel 2.6.2. (i) $\mathcal{T}_p^{(1,0)}M = T_pM$.

(ii) $\mathcal{T}_p^{(0,1)}M = T_p^*M$.

(iii) $\mathcal{T}_p^{(0,2)}M = T_p^*M \otimes T_p^*M \cong \text{Bil}(T_pM \times T_pM, \mathbb{R}) \cong \text{Hom}(T_pM, T_p^*M)$.

(iv) der riemannsche Krümmungs-Tensor aus Definition 1.92 ist in jedem Punkt $p \in M$ eine trilineare Abbildung $R_p: T_pM \times T_pM \times T_pM \rightarrow T_pM$ und kann deswegen durch einen Tensor $R_p \in T_p^*M \otimes T_p^*M \otimes T_p^*M \otimes T_pM = \mathcal{T}_p^{(1,3)}M$ dargestellt werden. Die Definition, die wir bereits für Untermannigfaltigkeiten kennen, werden wir bald verallgemeinern.

Bemerkung 2.6.3. Man hat eine bilineare Abbildung $\mathcal{T}_p^{(r,s)}M \times \mathcal{T}_p^{(\tilde{r},\tilde{s})}M \rightarrow \mathcal{T}_p^{(r+\tilde{r},s+\tilde{s})}M$ gegeben durch

$$\begin{aligned} & (v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_s, w_1 \otimes \dots \otimes w_{\tilde{r}} \otimes \beta_1 \otimes \dots \otimes \beta_{\tilde{s}}) \\ & \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_{\tilde{r}} \otimes \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_s \otimes \beta_1 \otimes \dots \otimes \beta_{\tilde{s}}. \end{aligned}$$

Diese bilineare Abbildung faktorisiert über die kanonische lineare Abbildung aus dem Tensorprodukt und ergibt dann den Isomorphismus

$$\mathcal{T}_p^{(r,s)}M \otimes \mathcal{T}_p^{(\tilde{r},\tilde{s})}M \rightarrow \mathcal{T}_p^{(r+\tilde{r},s+\tilde{s})}M.$$

Bemerkung 2.6.4. Ist $\varphi: U \rightarrow V$ eine Karte. Dann ist $\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\Big|_p\right)_i$ eine Basis von T_pM und $(d_p\varphi^i)_i$ ist eine Basis von T_p^*M .

Weiter ist dann

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi^{i_1}}\Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial \varphi^{i_r}}\Big|_p \otimes d_p\varphi^{j_1} \otimes \dots \otimes d_p\varphi^{j_s} \mid (i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s) \in \{1, \dots, m\}^{r+s} \right\} \subset \mathcal{T}_p^{(r,s)}M$$

eine Basis von $\mathcal{T}_p^{(r,s)}$. Die Dimension von $\mathcal{T}_p^{(r,s)}$ ist insbesondere m^{r+s} .

Wir machen aus $\mathcal{T}^{(r,s)}M := \bigcup_{p \in M} \mathcal{T}_p^{(r,s)}M$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m + m^r m^s$.

¹³Der Spezialfall (r, s) ist deswegen sinnvoll definiert, da man in der Definition von $\mathcal{T}_p^{(r,s)}M$ noch $\otimes \mathbb{R}$ hinzufügen kann und dann im Fall $r = s = 0$ nur noch $\mathbb{R}$ „übrig bleibt“. Wichtiger als diese vage Diskussion um Sinnhaftigkeit ist aber die klare Tatsache: alle folgenden Aussagen sind auch in Spezialfällen richtig, wenn wir $\mathcal{T}_p^{(0,0)} := \mathbb{R}$ definieren.

Wir nennen diese Mannigfaltigkeit das (r, s) -**Tensorbündel über M** . Die **Projektionsabbildung** hierzu ist

$$\mathcal{T}^{(r,s)}M \xrightarrow{\pi_{\mathcal{T}^{(r,s)}M}} M, \quad \mathcal{T}_p^{(r,s)}M \ni v_I \otimes \alpha_J \mapsto p.$$

Schreibe für $I = (i_1, \dots, i_r)$ und $J = (j_1, \dots, j_s)$ kurz

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^I} \Big|_p \otimes d_p \varphi^J := \frac{\partial}{\partial \varphi^{i_1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial \varphi^{i_r}} \Big|_p \otimes d_p \varphi^{j_1} \otimes \dots \otimes d_p \varphi^{j_s}.$$

Sei $\varphi: U \rightarrow V$ eine Karte von M . Dann betrachte

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{(r,s)}U &= \bigcup_{p \in U} \mathcal{T}_p^{(r,s)}M \xrightarrow{\Phi_\varphi} V \times \mathbb{R}^{m^{r+s}} \subseteq \mathbb{R}^{m+m^r m^s} \\ \sum_{\substack{I \in \{1, \dots, m\}^r \\ J \in \{1, \dots, m\}^s}} a_J^I \frac{\partial}{\partial \varphi^I} \Big|_p \otimes d_p \varphi^J &\mapsto (\varphi(p), (a_J^I)_{I,J}) \end{aligned}$$

Ist nun $\{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ ein Atlas von M , so ist $\{\Phi_{\varphi_i}: \mathcal{T}_p^{(r,s)}U_i \rightarrow V_i \times \mathbb{R}^{m^{r+s}}\}_{i \in I}$ ein Atlas von $\mathcal{T}_p^{(r,s)}(M)$. Die induzierte Topologie ist hausdorffsch und jede Zusammenhangskomponente hat eine abzählbare Basis der Topologie.¹⁴

Definition 2.6.5. Ein (r, s) -**Tensor(feld)** ist eine Abbildung $a: M \rightarrow \mathcal{T}^{(r,s)}M$ so dass $\pi_{\mathcal{T}^{(r,s)}M} \circ a = \text{id}_M$ gilt. Äquivalent dazu: $\forall p \in M: a|_p \in \mathcal{T}_p^{(r,s)}M$.

Aus obigen Definitionen folgt: a ist genau dann glatt, wenn alle Koeffizienten a_J^I in allen Karten (eines Atlanten) glatt sind.

Es bezeichne $\Gamma(\mathcal{T}^{(r,s)}M)$ die Menge aller glatten (r, s) -Tensorfeldern. Dabei ist $\Gamma(\mathcal{T}^{(0,0)}M) := \mathcal{C}^\infty(M)$.

Beispiele 2.6.6.

(i) Es gilt $\Gamma(\mathcal{T}^{(1,0)}M) = \Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ und $\Gamma(\mathcal{T}^{(0,1)}M) = \Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$.

(ii) Es sei $g \in \Gamma(\mathcal{T}^{(0,2)}M)$. Dann ist g lokal in einer Karte $\varphi: U \rightarrow V$ gegeben durch $g_p = \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(\varphi(p)) d_p \varphi^i \otimes d_p \varphi^j$.

Es ist g genau dann glatt, wenn alle $g_{ij}: V \rightarrow \mathbb{R}$ glatt sind. Dabei gilt $g_{ij} \circ \varphi = g \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right)$.

Es ist $g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear, also ein Element in $T_p^* M \otimes T_p^* M$.

Es ist g_p genau dann symmetrisch für alle $p \in M$, wenn $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$ für alle Karten U , alle x in V und alle $i, j \in \{1, \dots, m\}$.

Es ist g_p positiv definit genau dann für alle $p \in M$, wenn $(g_{ij}(x))_{i,j}$ für alle Karten U und alle x in V eine positiv definite Matrix ist.

Unterbeispiel: Ist $M^m \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, dann ist die 1. Fundamentalform $g \in \Gamma(\mathcal{T}^{(0,2)}M)$ symmetrisch und positiv definit.

Definition 2.6.7. Eine **riemannsche Metrik** auf M ist ein glatter $(0, 2)$ -Tensor so dass die Abbildung $g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ symmetrisch und positiv definit ist. Das heißt g_p definiert ein Skalarprodukt auf $T_p M$. Dabei „hängt g_p glatt von p ab“. Eine **riemannsche Mannigfaltigkeit** ist ein Paar (M, g) , wobei M eine Mannigfaltigkeit ist und g eine riemannsche Metrik auf M ist.

¹⁴Der Beweis dieser beiden Sätze ist nicht schwer, aber etwas länglich aufzuschreiben und meines Erachtens nicht so interessant, dass er hier im Detail ausgeführt werden soll. Wenn Sie die Fälle $(r, s) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$ gut verstanden haben, können Sie auch hier alle Details selbst ausführen.

Die oben definierten Funktionen $g_{ij} : V \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man die **Koeffizientenfunktionen** (oder einfach die **Koeffizienten**) der riemannschen Metrik g_{ij} bezüglich der Karte $\varphi : U \rightarrow V$.

Beispiele 2.6.8. (1) Die erste Fundamentalform einer Untermannigfaltigkeit ist eine riemannsche Metrik.

(2) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$ und $g_p = \langle \bullet, \bullet \rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^m$. Wir identifizieren wieder $T_p M = \mathbb{R}^m$ wie in Bemerkung 2.32 (i) beschrieben. Dann ist $p \mapsto g_p$ eine riemannsche Metrik auf M .

(3) Sei N eine Mannigfaltigkeit. Versehe $M := \mathbb{R}^m$ mit dem Standardskalarprodukt, das wie in (2) beschrieben eine riemannsche Metrik g trägt. Für eine glatte Abbildung $\varphi : N \rightarrow M = \mathbb{R}^m$ setze

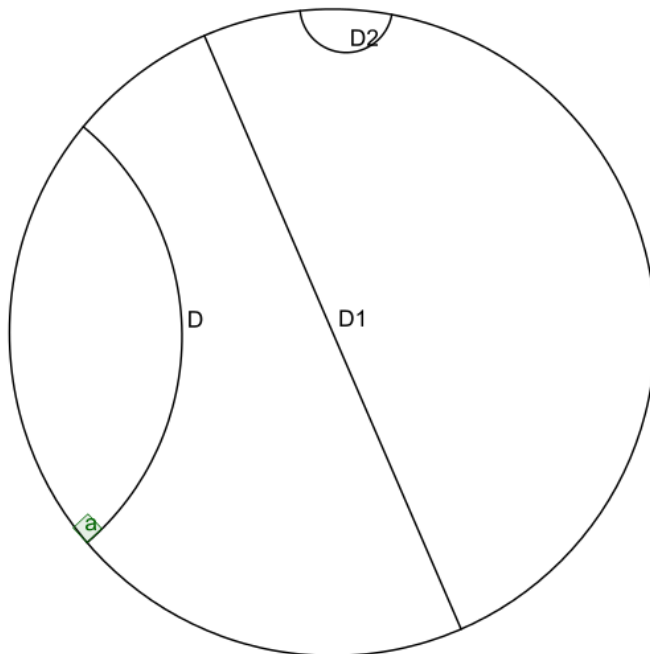
$$(\varphi^* g)_p(v, w) := g_{\varphi(p)}(d_p \varphi(v), d_p \varphi(w)) = \langle d_p \varphi(v), d_p \varphi(w) \rangle = \sum_{i=1}^m d_p \varphi^i \otimes d_p \varphi^i.$$

Dann ist $(\varphi^* g)_p$ symmetrisch und ein Element in $\Gamma(\mathcal{T}^{(0,2)} N)$, der sogenannte **Pullback** von g . Ist φ ein Diffeomorphismus (also eine Karte), so ist $\varphi^* g$ eine riemannsche Metrik.

(4) Ist $g \in \Gamma(\mathcal{T}^{(0,2)} M)$ eine riemannsche Metrik, $f \in C^\infty(M)$, $f > 0$, dann ist auch $fg \in \Gamma(\mathcal{T}^{(0,2)} M)$ eine riemannsche Metrik. Hierfür definieren wir für $p \in M$, $X, Y \in T_p M$:

$$fg(X, Y) := f(p) g(X, Y).$$

(5) Spezialfall: die hyperbolische Ebene $M = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, $g_p^{\text{hyp}}(X, Y) := \langle X, Y \rangle$, $f(p) := \frac{4}{(1 - \|p\|^2)^2}$



Das Poincarésche Kreisscheibenmodell der hyperbolischen Ebene ©

Wir werden nun einen Satz kennenlernen, für dessen Beweis wir eine Partition der Eins benöti-

gen. Dies ist eine typische Anwendung für Partitionen der Eins.

Satz 2.6.9. *Jede Mannigfaltigkeit besitzt eine riemannsche Metrik.*

Beweis: Sei $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha: U_\alpha \longrightarrow V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ein Atlas von M^m .

Bestimme eine Partition der Eins $(\eta_\alpha)_{\alpha \in A}$ mit $\text{supp}(\eta_\alpha) \subset U_\alpha$ und setze

$$G_\alpha(p) := \begin{cases} \eta_\alpha(p) \sum d_p \varphi_\alpha^i \otimes d_p \varphi_\alpha^i & p \in U_\alpha \\ 0 & p \notin U_\alpha. \end{cases}$$

Dann ist die Abbildung $p \mapsto G_\alpha(p)$ glatt auf U_α und $p \mapsto G_\alpha(p) = 0$ ist glatt auf $M \setminus \text{supp}(\eta_\alpha)$. Gesamt ist also $p \mapsto G_\alpha(p)$ glatt und $G_\alpha \in \Gamma(\mathcal{T}^{(0,2)}M)$. Außerdem ist $G_\alpha(p)$ symmetrisch für alle p .

Weiter ist $\sum_i d_p \varphi_\alpha^i \otimes d_p \varphi_\alpha^i$ positiv definit auf $T_p M$, denn sei $X = X^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \Big|_p \in T_p M$. Dann rechne

$$\begin{aligned} \sum_i d_p \varphi_\alpha^i \otimes d_p \varphi_\alpha^i (X, X) &= \sum_{i,j,k} d_p \varphi_\alpha^i \otimes d_p \varphi_\alpha^i \left(X^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \Big|_p, X^k \frac{\partial}{\partial \varphi^k} \Big|_p \right) \\ &= \sum_{i,j,k} X^j X^k \underbrace{d_p \varphi_\alpha^i \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \Big|_p \right)}_{=\delta_{ij}} \cdot \underbrace{d_p \varphi_\alpha^i \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^k} \Big|_p \right)}_{=\delta_{ik}} \\ &= \sum_i X^i X^i \end{aligned}$$

und es gilt $\sum_i X^i X^i > 0$ für $X \neq 0$.

Damit ist $G_\alpha(p)$ für $\eta_\alpha(p) > 0$ positiv definit und $G_\alpha(p)$ verschwindet für $\eta_\alpha(p) = 0$.

Setze nun $g_p := \sum_{\alpha \in A} G_\alpha(p)$, und wir sehen dann $(p \mapsto g_p) \in \Gamma(\mathcal{T}^{(0,2)}M)$. Nun ist g_p eine *endliche* (nicht-leere) Summe von positiv definiten symmetrischen Bilinearformen, also selbst positiv definit. ■

Korollar 2.6.10. *Sei M eine Mannigfaltigkeit. Dann gibt es einen Diffeomorphismus $\flat: TM \longrightarrow T^*M$ so dass*

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\quad \flat \quad} & T^*M \\ & \searrow \pi_{TM} \quad \circlearrowleft \quad \swarrow \pi_{T^*M} & \\ & M & \end{array}$$

kommutiert und so dass $\flat_p := \flat|_{T_p M}: T_p M \longrightarrow T_p^* M$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist. Er ist gegeben durch $T_p M \ni X \mapsto g_p(X, \bullet) \in T_p^* M$. Man nennt ihn den **musikalischen Isomorphismus**. Das Zeichen $\flat$ aus der Notation von Musiknoten ist bewusst gewählt. In Index-Schreibweise zieht $\flat$ einen Index nach unten, indem mit g_{ij} multipliziert und dann summiert wird; so wird aus einem Vektor, dessen Komponenten den Index oben haben, eine 1-Form, deren Komponenten den Index unten haben. Die Notation spielt nun auf an das Herunterziehen eines Tons durch $\flat$ in Musiknoten an.

Beweis: Wähle eine riemannsche Metrik g auf M . Dann ist $g_p \in \mathcal{T}_p^{(0,2)}M: T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinear.

Es gilt $\mathcal{T}_p^{(0,2)}M \cong \text{Hom}(T_p M, T_p^* M)$ vermöge $g_p \mapsto (X \mapsto g_p(X, \bullet))$ für $X \in T_p M$.

Die Abbildung $X \mapsto g_p(X, \bullet)$ ist injektiv von $T_p M \longrightarrow T_p^* M$, denn für $g_p(X, \bullet) = 0$ gilt dass

$g_p(X, Y) = 0$ für alle $Y \in T_p M$, also auch $0 = g_p(X, X)$, aber g_p ist positiv definit, also $X = 0$. Die Abbildung ist dann auch surjektiv, da $\dim T_p M = \dim T_p^* M$.

Somit ist $\flat_p$ ein Vektorraum-Isomorphismus und $p \mapsto \flat_p^{-1}$. Er hängt glatt von p ab, da er in einer Karte $\varphi : U \rightarrow V$ mit $g_{ij} \circ \varphi = g\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\right) \in \mathcal{C}^\infty(V)$ durch $\flat\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\right) = g_{ij} d\varphi^j$ charakterisiert ist¹⁵. Sei wieder wie in Kapitel 1 $(g^{ij}(x))_{ij}$ die zu $(g_{ij}(x))_{ij}$ invertierbare Matrix¹⁶. Sie hängt glatt von p ab, da die Abbildung $\text{Gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Gl}(n, \mathbb{R}), A \mapsto A^{-1}$ glatt ist¹⁷, ist auch $g^{ij}(x)$ glatt in x . Die Umkehrabbildung $\sharp := \flat^{-1} : T^*M \xrightarrow{\sim} TM$, der **inverse musikalischer Isomorphismus**, ist in obiger Karte mit (ESK) gegeben als

$$\sharp(d\varphi^j) = g^{ij} \frac{\partial}{\partial \varphi^i},$$

also ebenfalls glatt. Somit ist gezeigt, dass $\flat$ ein Diffeomorphismus ist. ■

Beispiel 2.6.11. Sei $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Dann ist $df \in \Omega^1(M)$. Sei $\sharp_p := \flat_p^{-1} : T_p^*M \xrightarrow{\sim} T_p M$ und betrachte die Abbildung

$$\text{grad}(f) : M \rightarrow T_p M, \quad p \mapsto \sharp_p(df) =: \text{grad}(f).$$

Dann heißt $\text{grad}(f) \in \mathfrak{X}(M)$ das **Gradientenvektorfeld** von f .

Nun hat $\text{grad}(f)$ die Eigenschaft: für alle $Y \in T_p M$ und alle $p \in M$ gilt

$$g_p(\text{grad}(f)|_p, Y) = g_p(\sharp_p(df), Y) = \underbrace{(\flat_p(\sharp_p(df)))}_{df}(Y) \quad (2.6.1)$$

$$= df(Y) = \partial_Y f. \quad (2.6.2)$$

Diese Eigenschaft charakterisiert $\text{grad } f$.

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 23.06.

2.7 Kovariante Ableitung und Krümmung

2.7.1 Kovariante Ableitung auf riemannschen Mannigfaltigkeiten

Wir verallgemeinern nun Definition 1.36 auf Mannigfaltigkeiten. Wir wollen hierbei für einige Details auf den Anhang verweisen. Unser Hauptziel ist, einen kleinen Ein- und Überblick zu geben.

Definition 2.7.1. Seien (M, g) und $(\widehat{M}, \widehat{g})$ riemannsche Mannigfaltigkeiten und $f : M \rightarrow \widehat{M}$ eine Abbildung. Dann heißt f **isometrisch**, wenn für alle $p \in M$ das Differential $d_p f : (T_p M, g_p) \rightarrow (T_{f(p)} \widehat{M}, \widehat{g}_{f(p)})$ isometrisch ist.

f heißt **lokale Isometrie**, wenn f isometrisch und ein lokaler Diffeomorphismus ist. f heißt **Isometrie**, falls $f : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus und isometrisch ist.

¹⁵(ESK) verwendet. Hilfreich ist hier auch der Gesichtspunkt, dass $\flat$ als Abbildung $M \rightarrow \mathcal{T}^{(0,2)}(M)$ mit g übereinstimmt, lediglich geändert ist die Interpretation von $g_p \in T_p^* M \otimes T_p^* M$ als $g_p \in \text{Hom}(T_p M, T_p^* M)$.

¹⁶Die inverse Matrix existiert auf Grund der positiven Definitheit.

¹⁷Jeder Koeffizient von A^{-1} ist ein Quotient eines Polynoms in den Koeffizienten von A durch $\det A$, was wiederum auch ein solches Polynom ist.

Wir haben in Unterabschnitt 1.7.4 die kovariante Ableitung auf Untermannigfaltigkeiten studiert. Wichtige Eigenschaften der kovarianten Ableitung haben wir in Eigenschaften 1.68 studiert. Die Tatsache, dass die kovariante Ableitung unter Isometrien invariant ist, lässt vermuten, dass man sie ohne Hinzunahme des umgebenden Raumes definieren kann. Dies ist tatsächlich möglich: man wandelt hierzu die Eigenschaften 1.68 in eine Definition um. Wir zeigen hierzu den folgenden Satz.

Notation.

Wir schreiben auch $\langle X, Y \rangle$ für $g_p(X, Y)$, falls $X, Y \in T_p M$ und falls aus dem Kontext heraus klar ist, welche riemannsche Metrik g verwendet werden soll.

Satz 2.7.2. *Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine eindeutige Abbildung $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ mit den folgenden Eigenschaften: Für $f \in C^\infty(M)$, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ sind erfüllt:*

- (i) $\nabla_f X = f \nabla_X X$ und $\nabla_{X+X_1} Y = \nabla_X Y + \nabla_{X_1} Y$. (**$C^\infty(M)$ -Linearität im 1. Argument**)
Das heißt $X \mapsto \nabla_X Y$ ist ein $C^\infty(M)$ -Modulhomomorphismus.
- (ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$. (**Additivität im 2. Argument**)
Zusammen mit $\nabla_X (\alpha Y) = \alpha \nabla_X Y$ ergibt sich die $\mathbb{R}$ -Linearität im 2. Argument, das heißt $Y \mapsto \nabla_X Y$ ist eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung.
- (iii) $\nabla_X (fY) = (\partial_X f)Y + f \nabla_X Y$. (**Produktregel I**)
- (iv) $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$ (**Torsionsfreiheit**)
- (v) $\partial_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$. (**Produktregel II**)

Die Bedingungen (i) bis (v) sind auffallend ähnlich zu den Eigenschaften 1.68. Sie sind identisch, allerdings mit Ausnahme von Eigenschaft (iv). Die ursprüngliche vierte Bedingung war:

$$(iv') \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \frac{\partial}{\partial \varphi^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^j}} \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \text{ für alle } i, j \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ und alle Karten } \varphi. \quad (\text{Torsionsfreiheit})$$

Diese ist aber in dieser Form nicht sinnvoll, da das Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial \varphi^j}$ nur auf der Kartenumgebung U und nicht auf der gesamten Mannigfaltigkeit M definiert ist. Deswegen ist der Ausdruck $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \frac{\partial}{\partial \varphi^j}$ in diesem Satz noch gar nicht definiert. Kann zeigen, dass – mit den richtig definierten Begriffen – (iv) und (iv') äquivalent sind. Dies ist nicht schwer, wird aber aus Zeitgründen nur im Anhang gemacht.

Definition 2.7.3. Ein **affiner Zusammenhang** ist eine Abbildung $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, die (i), (ii) und (iii) in Satz 2.7.2 erfüllt. Ein affiner Zusammenhang heißt **torsionsfrei**, wenn er (iv) erfüllt, und er heißt **metrisch**, wenn er (v) erfüllt. Den nach Satz 2.7.2 eindeutig existierenden metrischen und torsionsfreien affinen Zusammenhang nennt man den **Levi-Civita-Zusammenhang** oder die **kovariante Ableitung** von (M, g) .

Beweis der Eindeutigkeitsaussage in Satz 2.7.2: Sei ∇ ein torsionsfreier, metrischer affiner Zusammenhang. Auf Grund von (v) haben wir

$$\partial_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \quad (2.7.1)$$

$$\partial_Y \langle X, Z \rangle = \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle \quad (2.7.2)$$

$$\partial_Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \quad (2.7.3)$$

Um diese Gleichungen richtig zu verstehen, sollte man sich zunächst bewusst machen, dass auf beiden Seiten der Gleichungen Funktionen stehen, genauer glatte Funktionen auf M . Aus (iv) erhalten wir

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \quad (2.7.4)$$

$$[Y, Z] = \nabla_Y Z - \nabla_Z Y \quad (2.7.5)$$

$$[Z, X] = \nabla_Z X - \nabla_X Z \quad (2.7.6)$$

Beachten Sie hierbei, dass auf beiden Seiten der Gleichungen Vektorfelder stehen, genauer glatte Vektorfelder auf M .

(2.7.1) + (2.7.2) – (2.7.3) + $\langle (2.7.4), Z \rangle - \langle (2.7.5), X \rangle + \langle (2.7.6), Y \rangle$ ergibt (v)

$$\begin{aligned} & \partial_X \langle Y, Z \rangle + \partial_Y \langle X, Z \rangle - \partial_Z \langle X, Y \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle \\ &= 2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle. \end{aligned} \quad (2.7.7)$$

Diese Formel wird die **Koszul-Formel** genannt. Da sie für alle $Z \in \mathfrak{X}(M)$ gilt, ist hierdurch das Vektorfeld $\nabla_X Y$ bereits eindeutig bestimmt. Denn angenommen $\tilde{\nabla}$ ist ein weiterer torsionsfreier, metrischer affiner Zusammenhang, so gilt auch für diesen Formel (2.7.7) mit $\tilde{\nabla}$ statt ∇ . Es folgt dann

$$0 = \langle \nabla_X Y, Z \rangle - \langle \tilde{\nabla}_X Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X Y, Z \rangle$$

für alle $Z \in \mathfrak{X}(M)$, insbesondere also für $Z := \nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X Y$. Somit gilt

$$\|Z\|^2 := \langle Z, Z \rangle = 0$$

(Auf beiden Seiten der Gleichung stehen Funktionen auf M .) Also $0 = Z = \nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X Y$. Die Eindeutigkeit ist also gezeigt. ■

Um die Existenzaussage in Satz 2.7.2 zu beweisen, ist es nun naheliegend, Gleichung (2.7.7) zu nutzen, um eine Formel für $\nabla_X Y$ herzuleiten, die (i) bis (v) erfüllt. Die Formel vereinfacht sich im Fall von Koordinatenvektorfeldern wie im folgenden Lemma ersichtlich:

Lemma 2.7.4 (Lie-Klammer von Koordinatenvektorfeldern). *Sei $\varphi : U \rightarrow V$ die Karte einer Mannigfaltigkeit und sei $[\bullet, \bullet] : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)$ die Lie-Klammer für Vektorfelder auf U . Dann verschwindet die Lie-Klammer auf Koordinatenvektorfeldern*

$$\left[\frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right] = 0.$$

Beweis: Die Idee des Beweises ist wie folgt: Wir wissen ja bereits, dass in Koordinaten ausgedrückt die Richtungsableitung in Richtung des i -ten Koordinatenvektorfelds die partielle Ableitung nach x^i ist. Da partielle Ableitungen nach dem Satz von Schwarz kommutieren, verschwindet der

Kommutator, welcher – per definitionem – die Lie-Klammer ist.

Formal sauber ausgeführt erhalten wir: Für $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $p \in U$ und $x = \varphi(p) \in V$ rechnen wir:

$$\begin{aligned} \left(\partial \left[\frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right] f \right) \Big|_p &= \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \frac{\partial}{\partial \varphi^j} f - \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \frac{\partial}{\partial \varphi^i} f \right) \Big|_p \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x \left(\frac{\partial}{\partial x^j} (f \circ \varphi^{-1}) \right) - \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_x \left(\frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ \varphi^{-1}) \right) \stackrel{(*)}{=} 0, \end{aligned}$$

wobei wir beim letzten Gleichungszeichen – mit $(*)$ markiert – den Satz von Schwarz ([Analysis II](#), Kapitel 9, Satz 3.2) benutzt haben. Da dies für alle p und f gilt, erhalten wir die Aussage. ■

Beweis der Existenzaussage in Satz 2.7.2 in einem Spezialfall (Skizze): Wir skizzieren die Existenzaussage unter der zusätzlichen Annahme, dass es eine Karte φ gibt, die auf ganz M definiert ist, in anderen Worten:

Annahme: Es gebe eine Karte $\varphi : M \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$.

Wir erinnern, dass die Koeffizienten der riemannschen Metrik

$$g_{ij}(x) = g \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_{\varphi^{-1}(x)}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \Big|_{\varphi^{-1}(x)} \right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_{\varphi^{-1}(x)}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \Big|_{\varphi^{-1}(x)} \right\rangle$$

erfüllen, und dass $(g^{ij}(x))$ die zu $(g_{ij}(x))$ inverse Matrix bezeichnet. Ein halb mal die linke Seite von Gleichung (2.7.7) definiert die Abbildung $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$:

$$\begin{aligned} T(X, Y, Z) &:= \frac{1}{2} \left(\partial_X \langle Y, Z \rangle + \partial_Y \langle X, Z \rangle - \partial_Z \langle X, Y \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle \right) \end{aligned}$$

Die Idee des Beweises ist¹⁸, zu gegebenen X und Y ein $W_{X,Y} \in \mathfrak{X}(M)$ zu finden, so dass $T(X, Y, Z) = \langle W_{X,Y}, Z \rangle$ für alle $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Der nächste Schritt ist dann nachzurechnen, dass $\nabla_X Y := W_{X,Y}$ die geforderten Eigenschaften erfüllt.

Wir definieren hierzu für $p \in U$ und $x = \varphi(p) \in V$ die **Christoffel-Symbole mit gesenktem Index auf riemannschen Mannigfaltigkeiten** $\Gamma_{ijk} : V \longrightarrow \mathbb{R}$, indem wir das i -te, das j -te und das k -te Koordinatenvektorfeld in T einsetzen.¹⁹

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijk}(x) &:= T \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial \varphi^k} \Big|_p \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \Big|_x + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \Big|_x - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \Big|_x \right). \end{aligned} \tag{2.7.8}$$

In der letzten Umformung haben wir zum einen Lemma 2.7.4 benutzt, und zum anderen die Tatsache, dass Richtungsableitungen in Richtung von Koordinatenvektorfelder in Koordinatendarstellung in partielle Ableitungen übergehen. Wir haben eine Formel erhalten, die uns für Untermannigfaltigkeiten bereits aus Lemma 1.69 bereits bekannt ist. Wir schreiben wieder $\partial_i f$ für

¹⁸sie wird allerdings ein klein bisschen anders ausgeführt

¹⁹Die Idee hinter diesem Ansatz: wenn es ein ∇ gibt, dann muss diese folgende Formel für die im ersten Kapitel definierten Christoffelsymbole gelten.

$\frac{\partial}{\partial \varphi^i} f$. Nun definieren wir analog wie in Kapitel 1 mit (ESK) und schreiben hierzu die Vektorfelder X und Y in Koordinatendarstellung, vergleiche Formel (1.15)

$$\Gamma_{ij}^\ell(x) := g^{\ell k} \Gamma_{ijk}(x) \quad (2.7.9)$$

$$\nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) := \underbrace{X^i (\partial_i Y^\ell)}_{=\partial_X Y^\ell} \frac{\partial}{\partial \varphi^\ell} + X^i Y^j (\Gamma_{ij}^\ell \circ \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi^\ell}. \quad (2.7.10)$$

Man rechnet nun nach, dass – unter der Annahme, dass eine Karte $\varphi : M \rightarrow V$ existiert – diese Definition alle in Satz 2.7.2 geforderten Eigenschaften erfüllt. Details hierzu sind in Anhang A.1 zu finden. ■

Wir haben nicht nur die Existenzaussage im oben genannten Spezialfall gezeigt, sondern weitere Aussagen, die sich recht direkt aus dem obigen Beweis ergeben. Diese weiteren Aussagen fassen wir in den folgenden Zusätzen zusammen. Man beachte: der Zusammenhang hängt von M und g ab, was wir im folgenden teilweise dadurch andeuten, dass wir ∇^M statt ∇ schreiben.

Zusätze 2.7.5.

- (a) (Lokalität) Ist U eine offene Teilmenge von M ,²⁰ dann gilt für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$:

$$(\nabla_X^M Y)|_U = \nabla_{X|_U}^U (Y|_U).$$

- (b) Gegeben seien Vektorfelder $X, \tilde{X}, Y, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ und eine $\mathcal{C}^1$ -Kurve $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ mit $c(0) = p$. Angenommen es gilt $X|_p = \tilde{X}|_p = \dot{c}(0)$ und es gelte für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$: $Y|_{c(t)} = \tilde{Y}|_{c(t)}$. Dann folgt

$$(\nabla_X Y)|_p = (\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})|_p.$$

Beweis: Aus den Formel (2.7.8), (2.7.9) und (2.7.10) sieht man, dass in die Definition nur das Verhalten von g , X und Y auf einer Umgebung von p in die Formel für $(\nabla_X Y)|_p$ eingeht. Daraus folgt die Lokalität. Genauer sieht man, dass der Ausdruck nur von der Metrik g , dem Wert $X|_p$ und $Y|_p$ und $(\partial_X Y^j)|_p$ abhängt. Der Zusatz (b) folgt also, sobald wir $(\partial_X Y^j)|_p = (\partial_X \tilde{Y}^j)|_p$ überprüft haben. Die obigen Annahme implizieren $Y^j \circ c \equiv \tilde{Y}^j \circ c$. Wir rechnen

$$\begin{aligned} (\partial_X Y^j)|_p &= \partial_{\dot{c}(0)} Y^j = dY^j(\dot{c}(0)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (Y^j \circ c) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\tilde{Y}^j \circ c) = \dots \\ &= (\partial_X \tilde{Y}^j)|_p \end{aligned}$$

■

Beweis der Existenzaussage in Satz 2.7.2 im allgemeinen (Skizze): Wenn wir keine auf ganz M definierte Karte haben, dann können wir die Existenz von ∇ nun mit obigen Zusätzen

²⁰und somit ist dann $(U, g|_U)$ ebenfalls eine riemannsche Mannigfaltigkeit

zeigen. Sei $\mathcal{A} := \{U_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ein Atlas von M . Für jedes $\alpha \in A$ haben wir eine kovariante Ableitung

$$\nabla^{U_\alpha} : \mathfrak{X}(U_\alpha) \times \mathfrak{X}(U_\alpha) \longrightarrow \mathfrak{X}(U_\alpha).$$

Mit den Zusätzen können wir nun $\nabla_X^M Y$ durch „Zusammenkleben“ erhalten. Für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ definieren wir $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ durch die Aussage

$$(\nabla_X^M Y)|_{U_\alpha} := \nabla_{X|_{U_\alpha}}^{U_\alpha} (Y|_{U_\alpha}) \quad \forall \alpha \in A.$$

Auf Grund der Zusätze sehen wir, dass diese Definition auf dem Schnitt zweier Kartengebiete, d. h. auf Mengen der Form $U_\alpha \cap U_\beta$, $\alpha, \beta \in A$, wohldefiniert ist. Man kann nun wieder nachrechnen, dass diese Definition alle in Satz 2.7.2 geforderten Eigenschaften erfüllt. Details hierzu sind in Anhang A.1 zu finden. ■

2.7.2 Kovariante Ableitung des Tangentialvektors einer Kurve

Der obige Zusatz erlaubt uns, die kovariante Ableitung auch auf Ausdrücke wie folgt auszudehnen.

Sei $c : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$ -Kurve. In einer Karte $\varphi : U \longrightarrow V$ verwenden wir die Notation $\varphi \circ c(t) = \gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^m(t))$. Dann wird die Ableitung der Kurve wie folgt beschrieben, vergleiche Beispiel 1.34,

$$\dot{c}(t) = \sum_{j=1}^m \dot{\gamma}^j(t) \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \Big|_{c(t)}.$$

Wir würden nun gerne auch die zweite Ableitung der Kurve beschreiben. Man beachte: ist M eine Untermannigfaltigkeit, so ist $\ddot{c}(t)$ im Allgemeinen nicht mehr tangential, siehe den Satz von Meusnier in Beispiel 1.89. Die Normalkomponente von $\ddot{c}(t)$ ist keine Größe der inneren Geometrie. Wir haben also wenig Hoffnung $\ddot{c}(t)$ auf riemannsche Mannigfaltigkeiten zu verallgemeinern. Was wir deswegen hier machen, ist den Ausdruck $\pi^T(\ddot{c}(t))$ zu verallgemeinern.

Physikalische Interpretation.

Die physikalische Interpretation hiervon ist die Beschleunigung innerhalb von M eines Beobachters, der sich längs c bewegt. Angenommen ich fahre mit einem Fahrzeug (reibungsfrei und gleitfrei, Drehimpuls vernachlässigt) auf einer Fläche herum. Die Schwerkraft hält mich auf der Fläche und diese Einschränkung auf die Fläche führt zu Zentrifugalkräften²¹ $m\pi^N(\ddot{c}(t))$, wobei m die Masse ist. Die Zentrifugalkräfte sind immer senkrecht zur Fläche. Ich muss weder meinen Motor noch mein Steuerrad nutzen, um diese Kräfte zu bekommen, sie sind da auf Grund meiner Geschwindigkeit und der Form der Fläche im Raum $\mathbb{R}^3$. Ich kann sie auch nur dann wahrnehmen, wenn ich erkenne, dass es die Richtung der Normalenvektoren überhaupt gibt. Natürlich erkenne ich diese Richtungen im Beispiel eines Fahrzeugs auf einer Fläche, denn wenn ich zu starke Zentrifugalkräfte habe, habe zum Beispiel ich fast kein Blut mehr im Kopf und mir wird schwindlig. Wenn ich nun aber mit einem Raumschiff in der gekrümmten 4-dimensionalen Raumzeit herumfliege, und man sich diese 4-dimensionale Raumzeit als Untermannigfaltigkeit eines $\mathbb{R}^\ell$ vorstellt, so ist dies anders: die Normalkomponente der Beschleunigung $\ddot{c}(t)$ hat keine physikalische Relevanz, da

²¹Genauer gesagt sind hiermit die weniger allgemein-bekannten „Zentripetalkräfte“ gemeint, die Gegenkräfte zu den „Zentrifugalkräften“, die das umgekehrte Vorzeichen haben.

sie keine Größe der inneren Geometrie ist. Der Astronaut nimmt nur die Tangentialkomponente $\pi^T(\ddot{c}(t))$ wahr. Sie allein ist in der inneren Geometrie bzw. der riemannschen Geometrie bzw. der semi-riemannschen Geometrie²² das, was uns interessiert.

Wir definieren

$$\nabla_{\dot{c}(t)}\dot{c}(t) := \ddot{\gamma}^\ell(t) \frac{\partial}{\partial \varphi^\ell} \Big|_{c(t)} + \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) \Gamma_{ij}^\ell(\varphi(t)) \frac{\partial}{\partial \varphi^\ell} \Big|_{c(t)}.$$

Dies verallgemeinert die obige kovariante Ableitung im folgenden Sinn: Ist $X \in \mathfrak{X}(M)$ so, dass $X|_{c(t)} = \dot{c}(t)$, dann gilt

$$\nabla_{\dot{c}(t)}\dot{c}(t) = (\nabla_X X)|_{c(t)}.$$

Ist M eine Untermannigfaltigkeit (und g die erste Fundamentalform), dann zeigt eine leichte Rechnung

$$\nabla_{\dot{c}(t)}\dot{c}(t) = \pi^T(\ddot{c}(t)).$$

Im folgenden wird es auch sinnvoll sein, entlang von Kurven definierte Funktionen in Richtung des Tangentialvektors der Kurve zu differenzieren. Ist $f : c((a, b)) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so definieren wir²³

$$\partial_{\dot{c}(t)}f = \frac{d}{dt}(f \circ c).$$

Dies ist konsistent im folgenden Sinn. Gibt es ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit $X|_{c(t)} = \dot{c}(t) \forall t$ und haben wir $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, so ist $\partial_{\dot{c}(t)}f$ im neuen Sinn gleich $(\partial_X f)|_t$ im bereits definierten Sinn.

2.8 Überblick: Geodätische und Riemannsche Geometrie

2.8.1 Länge von Kurven, Abstand und Geodätische

In diesem Abschnitt werden wir nicht mehr alles sauber beweisen, sondern mehr Gewicht darauf legen, einen kleinen Ein- und Überblick zu erlangen.

Sei (M, g) eine (glatte) riemannsche Mannigfaltigkeit. Analog zur Definition auf Untermannigfaltigkeit definieren wir:

Definition 2.8.1. Eine $\mathcal{C}^2$ -Kurve $c : (a, b) \rightarrow M$ ist eine **Geodätische**, wenn $\nabla_{\dot{c}(t)}\dot{c}(t) = 0$ für alle $t \in (a, b)$. Die **Länge** einer $\mathcal{C}^1$ -Kurve $c : [a, b] \rightarrow M$ ist definiert – vergleiche Beispiel 1.34 – als

$$\mathcal{L}(c) = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle} dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^m g_{ij}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t)} dt,$$

wobei der Ausdruck ganz rechts nur sinnvoll ist, wenn c im Definition einer Karte $\varphi : U \rightarrow V$

verläuft mit der Notation $\varphi \circ c(t) =: \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma^1(t) \\ \vdots \\ \gamma^m(t) \end{pmatrix}$.

²²Die semi-riemannsche Geometrie ist eine leichte Modifikation der riemannschen. An Stelle der positiven Definitheit von g_p fordert man nur die Indefinitheit. Die Raumzeit trägt eigentlich eine semi-riemannsche Metrik, keine riemannsche. Wir wollen diesen Unterschied hier mal ignorieren – so wie auch in vielen Bereichen der theoretischen Physik üblich.

²³Hiermit ist sowohl die Existenz der Ableitung gemeint, als auch – wenn die Ableitung existiert – auch der Wert der Ableitung.

Für $p, q \in M$ definieren wir den **Abstand**

$$d(p, q) := \inf \left\{ \mathcal{L}(c) \mid c : [a, b] \longrightarrow M \text{ ist eine } \mathcal{C}^1\text{-Kurve von } p \text{ nach } q \right\}.$$

Ist M zusammenhängend, so ist (M, d) ein metrischer Raum²⁴ und die von der Metrik d induzierte Topologie stimmt mit der bereits gegebenen Topologie auf M überein.

Wir schreiben $\|X\| := \sqrt{g_p(X, X)}$ für $X \in T_p M$. Sind $X, Y \in T_p M \setminus \{0\}$, so ist der Winkel $\angle(X, Y) \in [0, \pi]$ definiert durch

$$\cos \angle(X, Y) = \frac{g_p(X, Y)}{\|X\| \|Y\|}.$$

Für eine Geodätische $c : (a, b) \longrightarrow M$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle &= \partial_{\dot{c}} \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle \\ \underbrace{\langle \nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle}_{=0} + \langle \dot{c}(t), \underbrace{\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t)}_{=0} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Also ist $t \longmapsto \|\dot{c}(t)\|$ konstant, wir sagen **c ist proportional zur Bogenlänge parametrisiert**.

Beispiel 2.8.2. Ist M ein endlich-dimensionaler Vektorraum und g durch ein Skalarprodukt gegeben, so sind die Geodätischen proportional zur Bogenlänge parametrisierte Teile einer affinen Gerade. Geodätische sind also Verallgemeinerungen von Strecken und Geraden. Die Kurvenlänge $\mathcal{L}(c)$ ist die übliche und der Abstand d ist die durch das Skalarprodukt definierte Metrik.

Beispiel 2.8.3. Ist $f : (M, g) \longrightarrow (\widehat{M}, \hat{g})$ eine Isometrie und c eine Kurve wie oben, so gilt $\mathcal{L}(c) = \mathcal{L}(f \circ c)$. Außerdem ist f **konform**²⁵, d. h.

$$\angle(d_p f(X), d_p f(Y)) = \angle(X, Y) \quad \forall p \in M \forall X, Y \in T_p M.$$

Man kann die Variationsformel (Satz 1.103 aus Abschnitt 1.10) auch auf Kurven in M oder sogar noch allgemeiner auf Untermannigfaltigkeiten²⁶ von M verallgemeinern. Eine weitere Variationsformel betrachtet die Variationsterme zweiter Ordnung. Man erhält insbesondere, vergleiche Bemerkung 1.91 für Untermannigfaltigkeiten:

- Seien $p, q \in M$. Minimiert eine $\mathcal{C}^1$ -Kurve $c : [a, b] \longrightarrow M$ mit $\|\dot{c}(t)\| \equiv \text{const}$ den Abstand von p nach q , das heißt gilt $c(a) = p$, $c(b) = q$ und $\mathcal{L}(c) = d(p, q)$, dann ist c glatt und eine Geodätische.
- Ist $c : (a, b) \longrightarrow M$ eine Geodätische, so gibt es zu jedem $t_0 \in (a, b)$ ein $\varepsilon > 0$ mit $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset (a, b)$, so dass $c|_{[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}$ den Abstand von $c(t_0 - \varepsilon)$ zu $c(t_0 + \varepsilon)$ minimiert.

Man kann auch zeigen²⁷: Ist (M, d) ein vollständiger metrischer Raum, so gibt es zu je zwei Punkten $p, q \in M$ mindestens eine Kurve, die den Abstand von p nach q minimiert.

Sei von nun an sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, so dass (M, d) vollständig ist. Nimmt man nun drei Punkte $p, q, r \in M$, so kann man diese paarweise durch abstand-minimierende

²⁴Hierfür sind einige Dinge zu zeigen!

²⁵der Begriff „konform“ ist hierzu äquivalent

²⁶Dieser Begriff ist noch nicht definiert worden: $N \subset M$ ist eine Untermannigfaltigkeit von M , wenn für alle Karten $\varphi : U \longrightarrow V$ von M die Menge $\varphi(U \cap N)$ eine Untermannigfaltigkeit von V ist.

²⁷Etwas mehr Aufwand, Bestandteil des Satzes von Hopf und Rinow

Kurven verbinden, dies ist ein **geodätisches Dreieck**. Die Skalarprodukte g_p, g_q und g_r auf T_pM, T_qM und T_rM erlauben uns zugehörige Innenwinkel $\in [0, \pi]$ zu definieren: α_p, α_q und α_r .

Die Winkelsumme $\alpha_p + \alpha_q + \alpha_r$ ist jedoch oft nicht π .

Beispiel 2.8.4 (Winkelsumme in Kugeldreiecken). Wir betrachten das geodätische Dreieck auf $\mathbb{S}^2$, dessen Ecken $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ sind. Die Seiten sind je ein Viertel eines Großkreises. Die Innenwinkel sind jeweils rechte Winkel, also $\pi/2$. Die Winkelsumme ist also $\pi/2 + \pi/2 + \pi/2 = (3/2)\pi > \pi$. Ist D ein beliebiges geodätisches Dreieck in $\mathbb{S}^2$, formalisiert als die Vereinigung der Seiten, und sei $\mathbb{S}^2 \setminus D = S_1 \dot{\cup} S_2$ die Zerlegung in Zusammenhangskomponenten. Dann gilt (ohne Beweis, Bestandteil des Satzes von Gauß–Bonnet für Flächen mit Rand und Ecken)

$$\alpha_p + \alpha_q + \alpha_r - \pi = \min\{\text{area}(S_1), \text{area}(S_2)\}.$$

Für beliebige 2-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeiten und ausreichend kleine Dreiecke gilt

$$\alpha_p + \alpha_q + \alpha_r - \pi = \int_U K,$$

wobei U die eingeschlossene Dreiecksfläche ist und K die Gauß-Krümmung. Wir werden die Gauß-Krümmung auf höher-dimensionale Räume verallgemeinern – zur sogenannten Schnittkrümmung –, muss dann aber darauf achten in welche Richtung „die von dem Dreieck aufgespannte Ebene“ weist, beschrieben durch einen 2-dimensionalen Unterraum von T_pM . Diese Krümmung ist eine reelle Zahl, kann also auch positiv oder negativ sein.

Grob gesagt gilt: positive Schnittkrümmung impliziert $\alpha_p + \alpha_q + \alpha_r > \pi$ in kleinen Dreiecken, und negative Schnittkrümmung impliziert $\alpha_p + \alpha_q + \alpha_r < \pi$. Wir werden noch beschreiben, was die Schnittkrümmung ist, aber keine Zeit mehr haben, um die Zusammenhänge mit den Winkelsummen genauer zu studieren.

2.8.2 Riemannscher Krümmungstensor und Schnittkrümmung

Wir können nun wie in Abschnitt 1.9 den riemannschen Krümmungstensor definieren. Die Definition und der Beweis des folgenden Satzes sind letztendlich gleich wie in diesem Abschnitt.

Satz 2.8.5 (analog zu Definition 1.92 zu Korollar 1.93). *Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇ . Es gibt einen Tensor $R \in \Gamma(\mathcal{T}^{(1,3)}M)$, genannt der **riemannsche Krümmungstensor**, so dass*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z + \nabla_{\nabla_Y X} Z.$$

Insbesondere hängt $(R(X, Y)Z)|_p$ nur von $X|_p, Y|_p$ und $Z|_p$ ab.

Definition 2.8.6. *Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und Q ein 2-dimensionaler Untervektorraum von T_pM . Dann ist die **Schnittkrümmung** $K(Q)$ von (M, g) in Q wie folgt definiert. Wähle eine Orthonormalbasis (E_1, E_2) von Q bezüglich g_p . Dann definiere*

$$K(Q) := g_p(R(E_1, E_2)E_2, E_1).$$

*Im Spezialfall $\dim M = 2$ ist $Q = T_pM$. Man nennt $K(T_pM)$ die **Gaußkrümmung** von (M, g)*

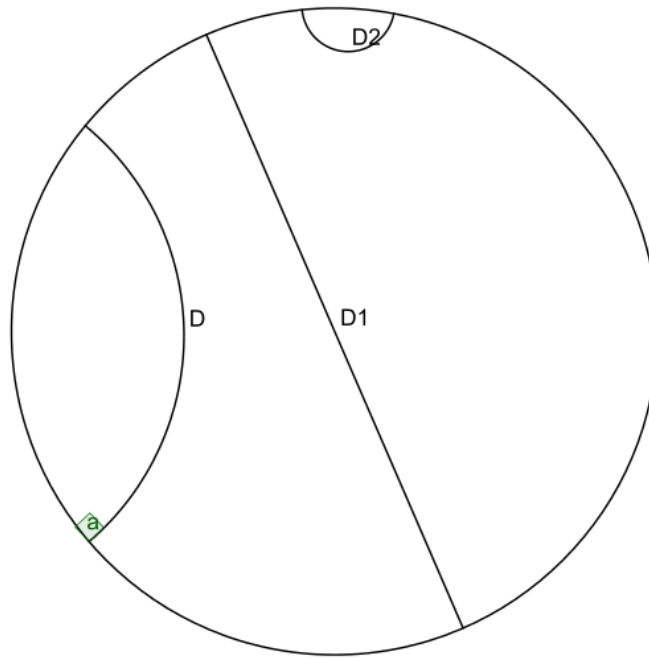


Abbildung 2.8.1: Das Poincarésche Kreisscheibenmodell der hyperbolischen Ebene[©]

in p .

Das Theorema egregium 1.98 besagt, dass diese Definition unsere bisherige Definition von Gaußkrümmung verallgemeinert.

Der Riemannsche Krümmungstensor enthält die gesamte (intrinsische) Krümmungsinformation einer riemannschen Mannigfaltigkeit. In der Allgemeinen Relativitätstheorie ist ein gutes Verständnis dieses Tensor und von davon abgeleiteten Größen (Ricci Krümmung, Einsteinkrümmung, Skalarkrümmung) essenziell, um zu Verstehen, wie man ein schwarzes Loch beschreibt, wie man den Urknall beschreibt, eine Gravitationswelle definiert und vieles mehr. Die berühmten Einsteinschen Feldgleichungen geben an, wie die Krümmung und damit die semi-riemannsche Metrik unserer Raumzeit mit der Materie interagiert.

2.8.3 Nochmals zur hyperbolischen Ebene

Zum Abschluss des Kapitels vertiefen wir nochmals das Beispiel des Poincaréschen Kreisscheibenmodells für die hyperbolische Ebene. Wir fassen Ergebnisse zusammen, ohne sie alle zu beweisen.

Sei $D := B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ als 2-dimensionale Mannigfaltigkeit. $T_p D = \mathbb{R}^2$ trägt das Skalarprodukt

$$g_p^{\text{hyp}}(X, Y) := \frac{4}{(1 - \|p\|^2)^2} \langle X, Y \rangle \quad X, Y \in T_p D$$

wobei $\langle \bullet, \bullet \rangle$ das euklidische Skalarprodukt bezeichne und $\|\bullet\|$ die zugehörige Norm. Man nennt (D, g^{hyp}) die **hyperbolische Ebene** oder genauer **das Poincarésche Kreisscheibenmodell der hyperbolischen Ebene**.

- Die Winkel sind gleich wie bezüglich der euklidischen Metrik.
- Das Skalarprodukt wird aber für $\|p\| \nearrow 1$ so schnell größer, dass jede Kurve $c : [0, b) \rightarrow D$ mit $\lim_{t \nearrow b} \|c(t)\| = 1$ unendliche Länge besitzt.
- Sei d^{hyp} die von g_p^{hyp} induzierte Metrik, dann ist (D, d^{hyp}) ein vollständiger metrischer Raum.
- Jede Geodätische in (D, g^{hyp}) kann zu einer Geodätischen $c : \mathbb{R} \rightarrow D$ fortgesetzt werden. Die Bilder dieser Geodätischen sind von der Form $D \cap K$, wobei K entweder eine Gerade (durch 0) in $\mathbb{R}^2$ ist oder ein Kreis mit Mittelpunkt $\neq 0$ in $\mathbb{R}^2$, der den Rand S^1 von D senkrecht schneidet, siehe Abbildung 2.8.1. Somit liegen zwei verschiedene Punkte auf einer Geodätischen, die bis auf Reparametrisierung eindeutig ist.
- Die hyperbolische Ebene besitzt eine große Symmetriegruppe. Präziser: gegeben seien $p, q \in D$, $v \in T_p D$, $w \in T_q D$ mit $g_p^{\text{hyp}}(v, v) = g_q^{\text{hyp}}(w, w) = 1$. Dann gibt es eine Isometrie $f : (D, g^{\text{hyp}}) \rightarrow (D, g^{\text{hyp}})$ mit $f(p) = q$ und $d_p f(v) = w$. Aus dieser großen Symmetriegruppe folgt bereits, dass die Gauß-Krümmung konstant ist. Eine Rechnung (Übungsblatt 11, Aufgabe 2) liefert $K \equiv -1$.

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 26.06.

Jedes geodätische Dreieck in (D, g) mit Innenwinkel α_1, α_2 und α_3 , das eine Fläche U einschließt, erfüllt

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi = -\text{area}(U) < 0,$$

wobei $\text{area}(U) := \int_U \sqrt{\det(g_{ij})} \, d\lambda_2 = \int_U \frac{4}{(1-\|\bullet\|^2)^2} \, d\lambda_2$.

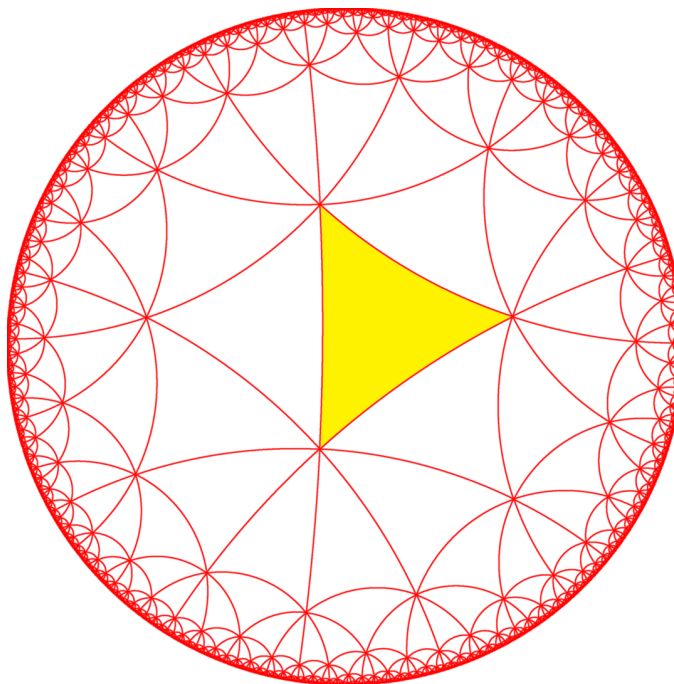


Abbildung 2.8.2: Pflasterung der hyperbolischen Ebene im Kreisscheibenmodell durch 3-Ecke, wobei in jeder Ecke sich acht 3-Ecke treffen, eine 8-3-Pflasterung[©]

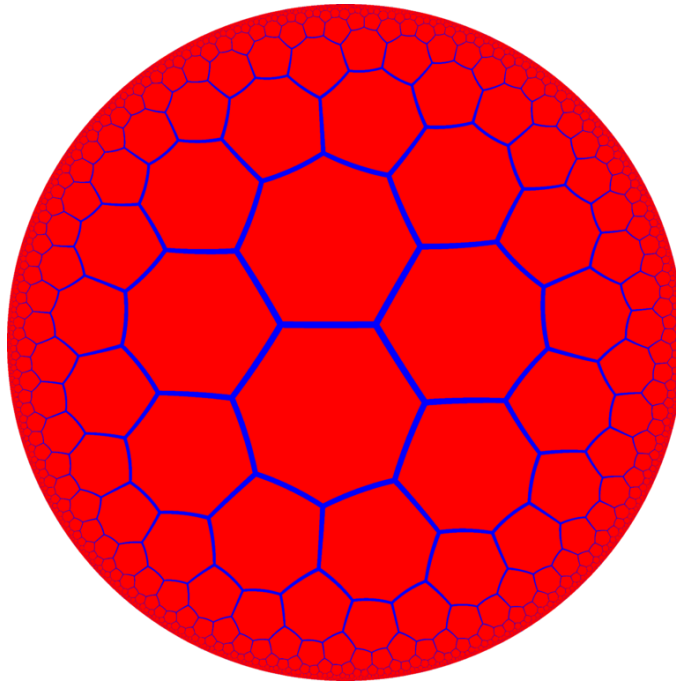


Abbildung 2.8.4: Pflasterung der hyperbolischen Ebene im Kreisscheibenmodell durch regelmäßige 7-Ecke, wobei in jeder Ecke sich drei 7-Ecke treffen, eine 3-7-Pflasterung[©]

Ein Bild eines regelmäßigen 8-Ecks mit rechten Innenwinkeln findet man hier.

Aus kopierrechtlichen Gründen kann ich das Bild leider nicht direkt einfügen.

Abbildung 2.8.6: Regelmäßige 8-Ecke mit rechten Innenwinkeln im Poincaréschen Kreisscheibenmodell. Diese 8-Ecke sind isometrisch und pflastern (D, g) , wobei sich in jeder Ecke vier 8-Ecke treffen, eine 4-8-Pflasterung.

Ein Bild von M. C. Escher zum hyperbolischen Raum findet man hier.

Abbildung 2.8.3: Aus kopierrechtlichen Gründen kann ich es leider nicht direkt einfügen

Zu jeder Zahl $k \in \mathbb{N}_{>4}$ gibt es ein regelmäßiges k -Eck in (D, g) , so dass alle Innenwinkel rechte Winkel sind.

Ein Bild eines regelmäßigen 5-Ecks mit rechten Innenwinkeln findet man hier.

Das Bild ist Teil einer schönen Webseite:

<https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/poincare/poincare.html>

Aus kopierrechtlichen Gründen kann ich das Bild leider nicht direkt einfügen.

Abbildung 2.8.5: Regelmäßige 5-Ecke mit rechten Innenwinkeln im Poincaréschen Kreisscheibenmodell. Diese 5-Ecke sind isometrisch und pflastern (D, g) , wobei sich in jeder Ecke vier 5-Ecke treffen, eine 4-5-Pflasterung.

Man kann nun die Seiten eines regelmäßigen oder unregelmäßigen 4γ -Ecks mit geeigneten²⁸ Innenwinkeln, $\gamma > 1$ so paarweise „zusammenkleben“, dass man eine kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit M ohne Rand erhält; siehe Abbildung 2.8.7 für eine Skizze des geodätischen Polygons vor dem Kleben und Abbildung 2.8.8 für eine Skizze der so erhaltenen Fläche M . Diese Mannigfaltigkeit M ist diffeomorph zu einer zusammenhängende kompakte Fläche in $\mathbb{R}^3$ von Geschlecht γ , vergleiche Unterabschnitt 1.11.4. Man erhält daraus:

Satz 2.8.7 (Teil des Uniformisierungssatzes). *Jede kompakte zusammenhängende orientierbare²⁹ 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten mit Geschlecht > 1 besitzt eine riemannsche Metrik mit Gaußkrümmung konstant -1 .*

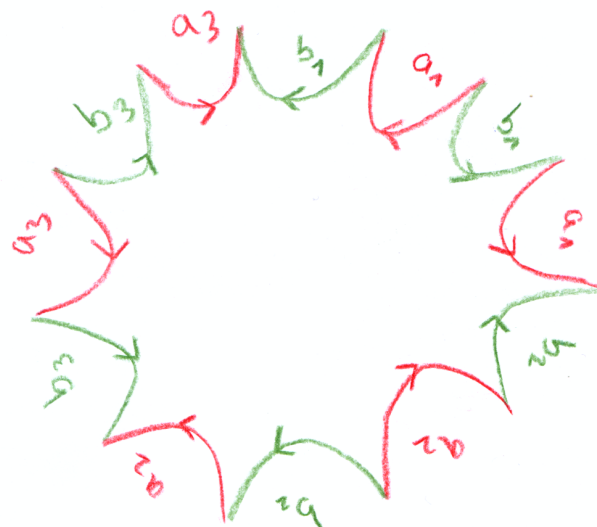


Abbildung 2.8.7: Beispiel $\gamma = 3$. Man nehme zunächst ein geodätisches 12-Eck mit Innenwinkelsumme 2π .

Satz (Uniformisierungssatz). *Sei M eine kompakte zusammenhängende orientierbare³⁰ 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten mit Geschlecht $\gamma \in \mathbb{N}_0$ und g eine riemannsche Metrik auf M . Dann gibt es eine positive glatte Funktion, so dass $\tilde{g} := fg$ eine riemannsche Metrik mit Gaußkrümmung K konstant ist. Man kann f so wählen, dass die Konstante den folgenden Wert annimmt:*

$$\begin{aligned} K &\equiv 1 \quad \text{falls} \quad \gamma = 0, \\ K &\equiv 0 \quad \text{falls} \quad \gamma = 1, \\ K &\equiv -1 \quad \text{falls} \quad \gamma \geq 2. \end{aligned}$$

²⁸Hier stand bis zum 23.3. noch etwas falsches. Richtig ist: man muss das Polygon so wählen, dass die Summe der Innenwinkel 2π ist. Dies kann man zum Beispiel dadurch erreichen, dass man ein regelmäßiges geodätisches 4γ -Eck nimmt, das man gerade so groß wählt, dass jeder Innenwinkel $\pi/(2\gamma)$ ist. Dies ist aber nur eine von vielen möglichen Wahlen.

²⁹Da wir orientierbar noch nicht definiert haben: man kann äquivalent dazu sagen: „Jede kompakte zusammenhängende Fläche in $\mathbb{R}^3$...“

³⁰Da wir orientierbar noch nicht definiert haben: man kann äquivalent dazu sagen: „Jede kompakte zusammenhängende Fläche in $\mathbb{R}^3$...“

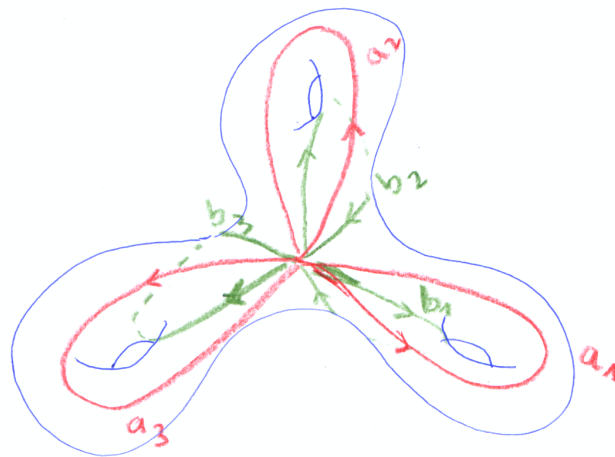


Abbildung 2.8.8: Nun klebe man von dem hyperbolischen 4γ -Eck aus Abbildung 2.8.7 je zwei Seiten zusammen, wie durch die roten und grünen Pfeile angedeutet. Die Ecken werden also auch zu einem einzigen Punkt zusammengeklebt. Man erhält somit eine kompakte zusammenhängende 2-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer riemannschen Metrik mit Gauß-Krümmung $K \equiv -1$. Das Geschlecht der Fläche ist γ , im Bild $\gamma = 3$.

Diese riemannsche Metrik erhält man **nicht** als erste Fundamentalform einer Fläche in $\mathbb{R}^3$, denn sonst müsste die Gaußkrümmung irgendwo positiv sein, siehe [Übungsblatt 8, Aufgabe 4](#).

Zurück zur hyperbolischen Ebene.

Zwei Geodätische $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow D$ nennt man **parallel**, wenn sie $\gamma_1(\mathbb{R}) \cap \gamma_2(\mathbb{R}) = \emptyset$ oder $\gamma_1(\mathbb{R}) = \gamma_2(\mathbb{R})$.

In D gibt es zu gegebener Geodätischen γ und $p \in D \setminus \gamma(\mathbb{R})$ sehr viele Geodätische durch p , die parallel zu γ sind.

Hyperbolische Ebene und das Parallelen-Axiom.

Euklid von Alexandria war ein griechischer Mathematiker im 3. Jahrhundert v. Chr. in Alexandria. In seinen Büchern „Elemente“ wollte er die Geometrie systematisieren und logisch aufbauen. In diesem Buch verfolgte er das damals sehr fortschrittliche Ziel, die Geometrie der Ebene aus wenigen Definitionen, Postulaten und Axiomen aufzubauen. Hierbei war es aber noch nicht möglich, Axiome mit der heute üblichen Präzision zu beschreiben, ich verweise auf Kapitel 1 von [4] für eine Beschreibung der Axiome und Postulate in heute angemessener Sprache. Jedenfalls wollte Euklid alle anderen Eigenschaften aus diesen grundlegenden Definitionen herleiten. Es ergab sich hierbei eine über viele Jahrhunderte sich hinwegziehende Diskussion, ob das sogenannte Parallelenaxiom nötig ist oder aus den anderen Axiomen hergeleitet werden kann. Wir nennen zwei Geodätische bzw. Geraden parallel, wenn sie keinen gemeinsamen Punkt besitzen. Das Parallelenaxiom besagt: Liegt p nicht auf der Gerade G , so gibt es genau eine zu G parallele Gerade durch p . Dieses Axiom ist auf der hyperbolischen Ebene nicht erfüllt, obwohl alle anderen Postulate und Axiome erfüllt

sind. Das Parallelenaxiom kann deswegen nicht aus den anderen hergeleitet werden.

3 Differentialformen und der Satz von Stokes

Motivation

- *Elektrodynamik:* Wir werden sehen, dass man mit Differentialformen sehr effizient die Elektrodynamik beschreiben kann.¹ All die komplizierten Gesetze wie „Transformation elektromagnetischer Felder im Übergang zum bewegten System“, „das von einer bewegten Ladung induzierte Magnetfeld“, „das von einem zeitabhängigen magnetischen Feld induzierte elektrische Feld“ verschmelzen zu einem einfachen Objekt. Wir fassen Raum und Zeit zu einer 4-dimensionalen Raumzeit M zusammen, und dies ist in der klassischen Feldtheorie (d. h. keine Quanten- oder ART-Effekte) $M = \mathbb{R}^4$. Das elektrische Feld E und das magnetische Feld B werden zu einem Tensor(feld) $F \in \Gamma(\mathcal{T}^{(0,2)}(M))$ auf M zusammengefasst und die Maxwell'schen Gleichungen sind dann einfach $dF = 0$ und $*dF = J$ – wir werden dies noch teilweise im Detail verstehen. Das Poincaré-Lemma, das wir bald kennen lernen werden, gibt uns dann „elektrische Potential“ und die „magnetische Vektorpotential“ – eigentlich muss diese beiden Potentiale zusammenfassen zu einer einzigen 1-Form auf M . Die Sichtweise durch Differentialformen erlaubt auch eine effektive Erweiterung, zum Beispiel zur Beschreibung magnetischer Monopole, für Eichfeldtheorien und für das Standardmodell.
- *Sind M^m und N^n Mannigfaltigkeiten. Gibt es einen Homöomorphismus $f: M \rightarrow N$?*
Wir werden kompakten Mannigfaltigkeiten M , und $0 \leq k \leq \dim M$ reelle Zahlen zuordnen, die k -te Betti-Zahl $b_k(M)$ genannt werden. Gibt es einen Homöomorphismus f wie oben so gilt $b_k(M) = b_k(N)$. Umgekehrt: wenn $b_k(M) \neq b_k(N)$, dann gibt es kein passendes f .
- *Existenz von Nullstellen von Vektorfeldern auf Flächen.*
Ist M eine kompakte Mannigfaltigkeit mit $b_0 - b_1 + b_2 + \dots + (-1)^m b_m \neq 0$, $m = \dim M$, dann besitzt jedes Vektorfeld auf M eine Nullstelle.
- *Klassische Sätze von Stokes und Gauß*
Anwendung in Physik und Chemie, angewandte Mathematik, Differentialgeometrie,...

3.1 Alternierende Tensoren auf Vektoren

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Schreibe $V^{\otimes k} := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{k\text{-mal}}$ und $V^{\otimes 0} := \mathbb{R}$.

Definition 3.1.1. Der **Alternierungsoperator** ist die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Alt}^k: V^{\otimes k} &\longrightarrow V^{\otimes k} \\ v_1 \otimes \dots \otimes v_k &\longmapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)}. \end{aligned}$$

Es gelten

$$\text{Alt}^0 = \text{id}_{\mathbb{R}}, \quad \left(\frac{1}{k!} \text{Alt}^k \right) \circ \left(\frac{1}{k!} \text{Alt}^k \right) = \frac{1}{k!} \text{Alt}^k.$$

¹Die folgenden Kommentare sind so zu verstehen: wenn Ihnen diese Begriffe in der Physik begegnet sind, dann sollten Sie darauf hoffen, diese bald gründlich zu verstehen. Wenn Sie nicht wissen, was damit gemeint ist, dann ignorieren Sie es am besten. Nach unserer Vorlesung können Sie das alles dann besser verstehen.

Setze $\bigwedge^k V := \text{im}(\text{Alt}^k)$. Die Elemente aus $\bigwedge^k V$ heißen **alternierende Tensoren**.
Ist $f \in \text{Hom}(V, W)$, dann ist

$$f^{\otimes k}: V^{\otimes k} \longrightarrow W^{\otimes k}$$

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_k \longmapsto f(v_1) \otimes \dots \otimes f(v_k)$$

eine lineare Abbildung.

Es gibt eine lineare Abbildung $\bigwedge^k f$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V^{\otimes k} & \xrightarrow{f^{\otimes k}} & W^{\otimes k} \\ \text{Alt}^k \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \text{Alt}^k \\ \bigwedge^k V & \xrightarrow{\bigwedge^k f} & \bigwedge^k W \end{array}$$

Beispiel 3.1.2.

- (i) Ist $V = W^*$, dann ist $V^{\otimes k}$ die Menge der k -fach linearen Abbildungen $W \times \dots \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\bigwedge^k V$ ist der Vektorraum der k -fach linearen alternierenden Abbildungen $W \times \dots \times W \longrightarrow \mathbb{R}$.

Dabei heißt $\alpha: W \times \dots \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ **alternierend** wenn

$$\alpha(w_1, \dots, w_k) = 0, \quad \text{falls } w_i = w_j \text{ für } i \neq j.$$

Dies ist äquivalent² dazu, dass

$$\alpha(w_1, \dots, w_i, \dots, w_j, \dots, w_k) = -\alpha(w_1, \dots, w_j, \dots, w_i, \dots, w_k)$$

für alle $i \neq j$ gilt.

- (ii) Es gelten $\bigwedge^0 V = \mathbb{R}$ und $\bigwedge^1 V = V$.

- (iii) Sei W ein Vektorraum mit Basis $e_1, \dots, e_n$ und $V = W^*$ mit dualer Basis $(e_i^*)_i$.

- (a) $V^{\otimes 2}$ ist der Vektorraum der bilinearen Abbildungen $W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$. Hierbei wird $v_1 \otimes v_2 \in V^{\otimes 2}$ als Abbildung $W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$, $(w_1, w_2) \longmapsto v_1(w_1) \cdot v_2(w_2)$ interpretiert. Wenn wir nun den Raum der bilinearen Abbildungen in der Basis $(e_1, \dots, e_n)$ von W darstellen, so erhalten wir Matrizen in $\mathbb{R}^{n \times n}$: $e_i^* \otimes e_j^*$ entspricht der Matrix $(a_{k\ell})_{k\ell}$ mit $a_{k\ell} = 1$ für $k = i$ und $\ell = j$ und mit $a_{k\ell} = 0$ sonst. Es gilt $\text{Alt}^2(e_i^* \otimes e_j^*) = e_i^* \otimes e_j^* - e_j^* \otimes e_i^*$. Dies entspricht der Abbildung $A \longmapsto A - A^T$, also entspricht $\bigwedge^2 V$ der Menge der schiefsymmetrischen Matrizen in $\mathbb{R}^{n \times n}$.

- (b) Setze $\omega := \text{Alt}^n(e_1^* \otimes \dots \otimes e_n^*) = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) e_{\sigma(1)}^* \otimes \dots \otimes e_{\sigma(n)}^*$.

Interpretiere ω als Abbildung $\omega: W \times \dots \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\omega(w_1, \dots, w_n) = \sum_{\sigma} e_{\sigma(1)}^*(w_1) \cdots e_{\sigma(n)}^*(w_n) = \det(w_1, \dots, w_n)$.

Definition. Definiere die **Tensoralgebra** $\bigotimes^* V := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} V^{\otimes k}$ und die **äußere Algebra** $\bigwedge^* V := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} \bigwedge^k V$. Der hier übliche Stern, der Graduierungstern $\star$, ist von dem Dualitätstern im dualen Vektorraum W^* oder T^*M oder in der dualen Abbildung bzw. im Pullback f^* oder in

²Dies ist nicht mehr äquivalent, wenn wir $\mathbb{R}$ durch einen Körper der Charakteristik 2 ersetzen.

der dualen Basis e_j^* zu unterscheiden. Da er aber in der Darstellung sonst leicht zu verwechseln ist, schreiben wir $\star$ an Stelle des in der Literatur üblichen $*$.³

Sei nun diejenige lineare Abbildung

$$\text{Alt}^\star: \bigotimes^\star V \longrightarrow \bigotimes^\star V$$

diejenige lineare Abbildung, die auf dem k -ten Summand durch Alt^k operiert. Zum Beispiel gilt dann

$$v_1 + v_2 \otimes v_3 \mapsto \text{Alt}^1(v_1) + \text{Alt}^2(v_2 \otimes v_3) = v_1 + v_2 \otimes v_3 - v_3 \otimes v_2.$$

Definition und Lemma 3.1.3. Es gibt eine bilineare Abbildung

$$\wedge: \bigwedge^\star V \times \bigwedge^\star V \longrightarrow \bigwedge^\star V$$

so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes^\star V \times \bigotimes^\star V & \xrightarrow{\otimes} & \bigotimes^\star V \\ \text{Alt}^\star \times \text{Alt}^\star \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \text{Alt}^\star \\ \bigwedge^\star V \times \bigwedge^\star V & \xrightarrow{\wedge} & \bigwedge^\star V \end{array}$$

kommutiert oder so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V^{\otimes k} \times V^{\otimes \ell} & \xrightarrow{\otimes} & V^{\otimes(k+\ell)} \\ \text{Alt}^k \times \text{Alt}^\ell \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \text{Alt}^{k+\ell} \\ \bigwedge^k V \times \bigwedge^\ell V & \xrightarrow{\wedge} & \bigwedge^{k+\ell} V \end{array}$$

kommutiert. Also gilt

$$\text{Alt}^k(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) \wedge \text{Alt}^\ell(v_{k+1} \otimes \dots \otimes v_{k+\ell}) = \text{Alt}^{k+\ell}(v_1 \otimes \dots \otimes v_{k+\ell}).$$

Es ist $\wedge$ assoziativ und bilinear, denn $\otimes$ erfüllt diese Eigenschaften.

Weiter gilt $v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \text{Alt}^k(v_1 \otimes \dots \otimes v_k)$ für alle $v_i \in V$.

Ist $(b_i)_i$ eine Basis von V , dann ist die Menge

$$\left\{ b_{i_1} \wedge b_{i_2} \wedge \dots \wedge b_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \right\}$$

eine Basis von $\bigwedge^k V$.

Das heißt es gilt

$$\dim \left(\bigwedge^k V \right) = \begin{cases} \binom{n}{k} & , k \leq n \\ 0 & , k > n. \end{cases}$$

und $\dim \left(\bigwedge^\star V \right) = 2^n$.

Der Aussagenteil (= der Lemmateil) hiervon ist eine Aussage der Linearen Algebra.⁴

³Auf Übungsblättern oder in Prüfungen müssen Sie diesen Unterschied natürlich nicht optisch darstellen.

⁴Es ist geplant, dies in einem Anhang an die Vorlesung von Cisinski direkt anzubinden, siehe Anhang ??

Bemerkung. Ist $\alpha \in \bigwedge^k V$ und $\beta \in \bigwedge^\ell V$, so gilt $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k \cdot \ell} \beta \wedge \alpha$.

3.2 Differentialformen

Sei M^m eine Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A}$ ein Atlas.

Notation 3.2.1. Ab sofort wählen wir für Karten zumeist eine Notation wie zum Beispiel $x: U \rightarrow V$ statt $\varphi: U \rightarrow V$. Dementsprechend schreiben wir dann $\frac{\partial}{\partial x^i}$ statt $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ und $d\varphi^i$ statt dx^i . Diese neue Notation ist in der Literatur weit verbreitet. Wir haben sie bisher vermieden, da es zunächst wichtig war, dass wir im logischen Aufbau der Vorlesung zunächst zwischen Koordinatenvektorfeldern und partiellen Ableitungen formal sauber unterschieden haben. Da wir aber inzwischen bewiesen haben, dass dies mit den üblichen Identifikation „dasselbe“ ist, ist es besser, dass auch die Notation hier nicht mehr differenziert. Dass die Lie-Klammer von Koordinatenvektorfeldern verschwindet, ist dann also nicht mehr *eine Konsequenz aus* dem Satz von Schwarz sondern es *ist eine nahezu triviale Umformulierung* des Satzes von Schwarz (für glatte Funktionen). Wir haben bisher auch den Buchstaben x recht konsequent für Elemente von V benutzt und werden dies auch weiterhin tun, gleichzeitig ist x auch eine Funktion nach V . Das führt selten zu Problemen, man interpretiert, dass x ein Element von V ist, das von $p \in U$ abhängt, also $x = x(p)$.⁵ Gleichzeitig gehen wir nun bezüglich des Definitionsbereichs von Koeffizienten eines Tensors bezüglich einer Karte $\varphi: U \rightarrow V$ zu folgender Konvention über: wir definieren die Koeffizienten als Funktionen $U \rightarrow \mathbb{R}$ statt bisher als Funktionen $V \rightarrow \mathbb{R}$, sobald wir aber mit konkreten Rechnungen beginnen, identifizieren wir U mit V vermöge φ – wie bereits früher angedeutet – und rechnen also dann wiederum mit Funktionen $V \rightarrow \mathbb{R}$.

Bemerkung. Sei $\bigwedge^k T^*M := \bigcup_{p \in M} \bigwedge^k T_p^*M$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \star\}$. Dies ist selber wieder eine Mannigfaltigkeit (sieht man ähnlich wie in [Übungsblatt 10, Aufgabe 4](#) oder wie in [Abschnitt 2.6](#) für Tensoren).

Ist $x: U \rightarrow V$ eine Karte von M und $k \in \mathbb{N}_0$, dann ist

$$\left\{ d_p x^{i_1} \wedge \dots \wedge d_p x^{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m \right\}$$

eine Basis von $\bigwedge^k T_p^*M$. Im Fall $k = 0$ ist hierbei $d_p x^{i_1} \wedge \dots \wedge d_p x^{i_k}$ als die Zahl $1 \in \mathbb{R} = \bigwedge^0 T_p^*M$ zu lesen.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \bigwedge^k T^*U &\longrightarrow V \times \mathbb{R}^{\binom{m}{k}} \\ \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} d_p x^{i_1} \wedge \dots \wedge d_p x^{i_k} &\longleftarrow \left(\tilde{x}, (\omega_{i_1 \dots i_k})_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m} \right) \end{aligned}$$

⁵Hinter dieser Interpretation steckt letztendlich ein anderes formales Verständnis darüber, was eine Funktion überhaupt ist: an Stelle unserer Definition zu Beginn der Analysis I verwendet man hier die im 19. Jahrhundert übliche Definition, dass hier eine Größe (hier $x \in V$) von einer anderen (hier $p \in U$) abhängt. Diese erscheint aus heutiger Sicht etwas zu vage, ist aber oft effektiv und wird in Anwendungen wie der Physik und Chemie oft benutzt, z. B. ist $V(T, p)$ das Volumen in Abhängigkeit von Temperatur und Druck, $T(V, p)$ die Temperatur in Abhängigkeit von Volumen und Druck, $S(E, V)$ die Entropie in Abhängigkeit von Energie und Volumen oder – damit im Sinne unseres bisherigen Funktionsbegriffs inkompatibel – $S(T, V)$ die Entropie, die von anderen Größen abhängt, nämlich von $T = T(E, V)$ und V . Übrigens ist dann $\frac{\partial S}{\partial V}(E, V)$ im allgemeinen verschieden von $\frac{\partial S}{\partial V}(T, V)$, denn im ersten Fall wird bei konstantem E nach V abgeleitet, im zweiten Fall bei konstantem T ; es ist also in diesen Anwendungen große Vorsicht geboten. Auch in der Mathematik findet man oft Formulierungen wie „Es gibt eine Konstante $C = C(n, K) > 0$, so dass“. Diese „Konstante C “ darf dann eben noch von den (festen) Parameter n und K , aber nichts anderem mehr abhängen.

(wobei $\tilde{x} = x(p)$) ist eine Karte von $\bigwedge^k T^*M$.
 Der Fall $\bigwedge^* T^*M$ ist analog.

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 30.06.

30.6.

Definition 3.2.2. Eine **Differentialform** ist eine Abbildung $\omega: M \rightarrow \bigwedge^* T^*M$, so dass $\omega(p) \in \bigwedge^* T_p^*M$ für alle $p \in M$ gilt.

Wir sagen ω ist vom Grade $\deg(\omega) = k \in \mathbb{N}_0$, falls $\omega(p) \in \bigwedge^k T_p^*M$ für alle $p \in M$.

Setze $\Omega^k(M) := \Gamma(\bigwedge^k T^*M) = \{k\text{-Formen}\}$.

Für Differentialformen ω sagen wir: ω ist glatt, wenn ω als Abbildung $M \rightarrow \bigwedge^* T^*M$ glatt ist.

Im Falle $\deg(\omega) = k$ ist dies äquivalent dazu, dass ω eine glatte Abbildung $M \rightarrow \mathcal{T}^{(0,k)}M = \bigcup_p (T_p^*M)^{\otimes k}$ ist. Und dies wiederum ist äquivalent dazu, dass für alle Karten $(x: U \rightarrow V) \in \mathcal{A}$ und für alle $i_1 < \dots < i_k$ gilt, dass

$$\omega_{i_1 \dots i_k} = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \right) : U \rightarrow \mathbb{R}$$

glatt ist. Man beachte, dass diese Charakterisierung also nicht vom Atlas abhängt!

Ist ω eine Differentialform auf M , so können wir immer eine auf eindeutige Form schreiben $\omega = \sum_{k=0}^m \omega_k$ mit $\deg(\omega_k) = k$. Dann ist ω genau dann glatt, wenn alle ω_k glatt sind.

Eine **k-Form** ist eine glatte Differentialform vom Grade k .

Bemerkung 3.2.3. Ist ω eine k -Form und sind die Funktionen $\omega_{i_1 \dots i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$ wie in Definition 3.2.2 definiert, so gilt

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

In anderen Worten: in allen $p \in U$ gilt

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} w_{i_1 \dots i_k}(p) \cdot d_p x^{i_1} \wedge \dots \wedge d_p x^{i_k}.$$

Definition 3.2.4. Wir definieren eine Abbildung, genannt **Dach-Produkt** oder **Wedge-Produkt**

$$\begin{aligned} \Omega^k(M) \times \Omega^\ell(M) &\rightarrow \Omega^{k+\ell}(M) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

wobei $(\alpha \wedge \beta)(p) = \alpha(p) \wedge \beta(p)$.

3.3 Das äußere Differential

Sei M^m eine glatte Mannigfaltigkeit.

Wiederholung von (2.5.1).

Wir haben $\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$.

Für $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ erhalte eine Abbildung

$$dh: M \rightarrow T^*M = \bigwedge^1 T^*M, \quad p \mapsto d_p h$$

also gilt $dh \in \Omega^1(M)$.

$$\text{Schreibe } \Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^k(M) = \bigoplus_{k=0}^m \Gamma\left(\bigwedge^k T^*M\right).$$

Satz 3.3.1. *Es gibt genau eine lineare Abbildung $d: \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$ genannt das **äußere Differential** (bzw. das **Cartan-Differential**) mit den Eigenschaften:*

- (i) *Für alle $f \in C^\infty(M)$ ist df so wie in (2.5.1).*
- (ii) *Es gilt $\text{im}\left(d|_{\Omega^k(M)}\right) \subset \Omega^{k+1}(M)$.*
- (iii) *Es gilt $d \circ d = 0$.*
- (iv) *Es gilt $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$ für alle $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^\ell(M)$.*

Die Beweisstruktur des Satzes ist ähnlich wie im Fall der kovarianten Ableitung.⁶ Man zeigt zunächst Existenz- und Eindeutigkeit für den Fall, dass die Mannigfaltigkeit von einer einzigen Karte erfasst wird. Daraus erhält man später die Definition der äußeren Ableitung für beliebige Mannigfaltigkeiten durch Zusammenkleben der lokalen Definitionen zu einer globalen.

Bemerkung. In Theorem 3.3.1 bedeuten die Bedingungen (ii) und (iii), dass die Folge von linearen Abbildungen

$$\Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^2(M) \rightarrow \dots$$

ein **Kokettenkomplex**⁷ ist.

Gilt Bedingung (iv), so heißt d eine **Antiderivation**.

Proposition 3.3.2. *Sei $x: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte. Dann ist d als Abbildung $\Omega^*(U) \rightarrow \Omega^*(U)$ eindeutig.*

Beweis: Schreibe $\omega \in \Omega^k(U)$ als

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

mit $\omega_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(U)$.

Rechne zunächst

$$\begin{aligned} d(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) &= \underbrace{(ddx^{i_1})}_{=0} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} - dx^{i_1} \wedge d(dx^{i_2} \wedge \dots) \\ &= 0 - dx^{i_1} \wedge \underbrace{(ddx^{i_2})}_{=0} \wedge dx^{i_3} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &\quad + dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \underbrace{ddx^{i_3}}_{=0} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \dots \\ &= 0. \end{aligned}$$

⁶Ich habe in der Vorlesung gesagt: die Struktur ist genauso wie im Fall der kovarianten Ableitung. Dies ist aber nicht ganz richtig. Denn in Proposition 3.3.2 zeigt man die Eindeutigkeit nur im Fall, dass M von einer einzigen Karte erfasst wird und nicht im allgemeinen. Dies macht dann später weitere Argumente notwendig (unter anderem Proposition 3.3.7).

⁷Definition siehe kommutative Algebra oder [hier auf Wikipedia](#). Wenn Sie den Begriff nicht kennen, dann ignorieren Sie bitte einfach diesen Satz.

Das heißt, es gilt

$$\begin{aligned}
d\omega &= d \left(\sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right) \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left((d\omega_{i_1 \dots i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \underbrace{(-1)^0}_{=1} \omega_{i_1 \dots i_k} \underbrace{d(dx^{i_1} \wedge \dots)}_{=0} \right) \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_k} d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \tag{3.3.1}
\end{aligned}$$

$$\stackrel{(+)}{=} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j=1}^m \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^j} \underbrace{dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}}_{= (*)} \tag{3.3.2}$$

wobei: $(*) = \begin{cases} 0 & , j \in \{i_1, \dots, i_k\}, \\ \neq 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$

An der Stelle (+) haben wir benutzt, dass für $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ gilt $df = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j$.⁸ ■

Beispiel 3.3.3.

(i) Sei $(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 = M$ und $x = \text{id}$ oder $x^i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Dann sei $\omega = x^1 dx^2 - x^2 dx^1 = x^1 \wedge dx^2 - x^2 \wedge dx^1$ und damit

$$d\omega = dx^1 \wedge dx^2 + x^1 \underbrace{ddx^2}_{=0} - dx^2 \wedge dx^1 - x^2 \underbrace{ddx^1}_{=0} = 2dx^1 \wedge dx^2.$$

(ii) Sei $M = \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. Sei $\omega = e^{x^1} dx^2$. Dann ist

$$d\omega = e^{x^1} dx^1 \wedge dx^2 + e^{x^1} ddx^2 = e^{x^1} dx^1 \wedge dx^2.$$

Proposition 3.3.4. Sei $x: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte. Dann existiert eine Abbildung

$$d: \Omega^\star(U) \rightarrow \Omega^\star(U)$$

wie in Theorem 3.3.1.

Beweis: Sei $d: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$ nun durch die Gleichung (3.3.2) definiert (oder äquivalent dazu: durch die Gleichung (3.3.1)). Das heißt für $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \in \Omega^k(U)$ definieren wir

$$d\omega := \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j=1}^m \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \tag{3.3.3}$$

offensichtlich ist $d: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$ linear für alle k .

„Eigenschaft (i)“: Sei $f \in \mathcal{C}^\infty(U) = \Omega^0(U)$. Dann erfüllt sowohl das in (2.5.1) definierte df , als auch das in (3.3.3) definiert df

$$df = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j.$$

⁸Begündung: $df \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial f}{\partial x^j}$ und nutze die Tatsache, dass $(dx^i)_i$ und $\left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_j$ duale Basen sind.

Das heißt auf Null-Formen (= Funktionen) $\mathcal{C}^\infty(U)$ auf U stimmen beide Definitionen überein.

„Eigenschaft (ii)“: Klar.

„Eigenschaft (iv)“: Wegen der Linearität von d und der Bilinearität von $\wedge$ reicht es (iv) für $\alpha = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ und für $\beta = h dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_\ell}$ zu zeigen.

Rechne dafür

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &\stackrel{(3.3.1)}{=} \overbrace{d(fh)}^{(df)h + f dh} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_\ell} \\ &\stackrel{(2.5.2)}{=} h df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + f dh \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_\ell} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d\alpha &\stackrel{(3.3.1)}{=} df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ d\beta &\stackrel{(3.3.1)}{=} dh \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_\ell}. \end{aligned}$$

und

$$(d\alpha) \wedge \beta = h df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_\ell}.$$

Und

$$\begin{aligned} \alpha \wedge d\beta &= f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dh \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_\ell} \\ &= (-1)^k f dh \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_\ell}. \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass d eine Anti-Derivation ist.

„Eigenschaft (iii), Teil (a)“: Sei $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Zeige $ddf = 0$. Zunächst wissen wir bereits $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j$. Auf Grund der definierenden Gleichung (3.3.3) gilt dann

$$d^2 f \stackrel{(3.3.3)}{=} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}}_{\text{symm.}} \underbrace{dx^i \wedge dx^j}_{\text{antisymm.}} = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i = -d^2 f.$$

Also ist $d^2 f = 0$.

„Teil (b)“: Für $\omega = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ rechne $d\omega = df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, also

$$\begin{aligned} d^2 \omega &= \underbrace{d^2 f}_{=0} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} - df \wedge d(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\ &= 0 - df \wedge \underbrace{d(1 dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})}_{=0} \stackrel{(3.3.3)}{=} 0. \end{aligned}$$

■

Lemma 3.3.5. Sei $d: \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$ linear, so dass (i) bis (iv) aus Theorem 3.3.1 erfüllt sind. Dann ist d lokal. Das heißt für alle $p \in M$, alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$ sowie für alle offenen Umgebungen U von p folgt aus $\alpha|_U = \beta|_U$, dass $d\alpha|_p = d\beta|_p$. Da dies für alle $p \in U$ gilt, folgt $d\alpha|_U = d\beta|_U$.

Beweis: Bestimme eine glatte Funktion $\eta: M \rightarrow [0, 1]$ mit $\eta \equiv 1$ in einer Umgebung W von p und $\text{supp}(\eta) \subset U$. Es gilt $\eta(\alpha - \beta) = 0$, da η auf $M \setminus U$ verschwindet und $\alpha - \beta$ auf U verschwindet.

Dann gilt wegen $d0 = 0$ und der Antiderivativität

$$0 = \underbrace{d(\eta(\alpha - \beta))}_{\equiv 0} = d\eta \wedge (\alpha - \beta) + \eta d(\alpha - \beta)$$

auf M . Auf W haben wir $\eta \equiv 1$ und $d\eta = 0$ und somit

$$0 = (0 \wedge (\alpha - \beta) + 1 d(\alpha - \beta)) \Big|_W \implies d(\alpha - \beta) \Big|_W = 0. \quad \blacksquare$$

Proposition 3.3.6. *Für jede Mannigfaltigkeit M existiert ein d wie in Theorem 3.3.1.*

Beweis: Zu jeder Karte $x: U \rightarrow V$ liefert Proposition 3.3.4 ein äußeres Differential

$$d^x: \Omega^*(U) \rightarrow \Omega^*(U).$$

Definiere zu $\omega \in \Omega^k(M)$ ein $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$ durch $(d\omega)|_p := (d^x\omega)|_p$ für eine Karte $x: U \rightarrow V$ mit $p \in U$.

Behauptung:

- (i) Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von x .
- (ii) Die Abbildung $p \mapsto d_p\omega$ ist glatt.

„(i)“: Sei $\tilde{x}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ eine weitere Karte und $p \in U \cap \tilde{U}$. Schränke die Karten x und $\tilde{x}$ auf die Schnittmenge $U \cap \tilde{U}$ ein. Aus der Formel (3.3.1) bzw. (3.3.3) sieht man, dass $(d^x\omega)|_p$ sich unter Einschränkung nicht verändert, genauer gesagt $(d^x|_{U \cap \tilde{U}}\omega)|_p = (d^x\omega)|_p$. Die analoge Aussage $(d^{\tilde{x}}|_{U \cap \tilde{U}}\omega)|_p = (d^{\tilde{x}}\omega)|_p$ zeigt man genauso. Aus der Eindeutigkeitsaussage auf $U \cap \tilde{U}$ (siehe Proposition 3.3.2) haben wir $d^x|_{U \cap \tilde{U}}\omega = d^{\tilde{x}}|_{U \cap \tilde{U}}\omega$, folgt $d_p^x\omega = d_p^{\tilde{x}}\omega$. Insgesamt ergibt sich also $(d^x\omega)|_p = (d^{\tilde{x}}\omega)|_p$.

„(ii)“: Zu jedem $p \in M$ wähle eine Karte $x: U \rightarrow V$ mit $p \in U$. Dann ist $d^x(\omega|_U) = (d\omega)|_U$ und damit ist $d\omega|_U$ glatt auf U , denn $d^x(\omega|_U)$ ist glatt, da $\omega|_U$ glatt ist.

Damit ist $d: \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$ wohldefiniert und linear und erfüllt die Eigenschaften (i)–(iv), da diese Eigenschaften auf jeder Karte richtig sind und da d lokal ist. ■

Proposition 3.3.7. *Die Abbildung d aus Proposition 3.3.6 ist die eindeutige lineare Abbildung $\Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$, die (i)–(iv) in Satz 3.3.1 erfüllt.⁹*

Beweis: Sei $\tilde{d}: \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$ linear, so dass $\tilde{d}$ die Eigenschaften (i)–(iv) erfüllt.

Zeige $d = \tilde{d}$. Im Detail: Für alle Karten $x: U \rightarrow V$ und alle $\alpha \in \Omega^k(M)$ zeige

$$(\tilde{d}\alpha)|_U = (d\alpha)|_U. \quad (3.3.4)$$

Da d und $\tilde{d}$ linear sind, kann man annehmen, dass $\alpha|_U = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ für $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

⁹Diese Proposition ist nötig, damit wir irgendwo sauber begründen, wieso die Lokalität im Sinne von Proposition 3.3.7 impliziert, dass d sich aus den in Karten definierten d^x wie oben beschrieben aufbauen muss.

¹⁰ Zeige (3.3.4) in fixiertem $p \in U$.

Sei $\eta: M \rightarrow [0, 1]$ wie oben mit $\eta \equiv 1$ auf $W \ni p$.

Dann kann man ηf und ηx^i durch Fortsetzung mit Null zu glatten Funktionen $M \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen, vgl. „Schritt 4“ im Beweis von Satz 2.35; wir notieren hierfür $\eta f, \eta x^i \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Auf solchen Funktionen ist $\tilde{d}$ definiert und stimmt hieraus wegen (i) mit d überein. Zusammen mit der Lokalität (vgl. Lemma 3.3.5) folgt, denn es stimmt jeweils der Ausdruck hinter d bzw. $\tilde{d}$ auf W überein:

$$(\tilde{d}(\eta\alpha))|_W = (\tilde{d}\alpha)|_W, \quad (\tilde{d}(\eta f))|_W = (d(\eta f))|_W = (df)|_W \quad (3.3.5)$$

$$(\tilde{d}(\eta\alpha))|_W = (\tilde{d}(\eta f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}))|_W, \quad (\tilde{d}(\eta x^i))|_W = (d(\eta x^i))|_W = (dx^i)|_W. \quad (3.3.6)$$

Somit gilt auch

$$\tilde{d}(\eta f \tilde{d}(\eta x^{i_1}) \wedge \dots \wedge \tilde{d}(\eta x^{i_k}))|_W = \tilde{d}(\eta f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})|_W, \quad (3.3.7)$$

und dieselben Aussagen sind auch für d an Stelle von $\tilde{d}$ erfüllt, schreibe hier beispielsweise (3.3.5)' statt (3.3.5).

Es gilt somit in p

$$\begin{aligned} (\tilde{d}\alpha)|_p &\stackrel{(3.3.5)}{=} (\tilde{d}(\eta\alpha))|_p \stackrel{(3.3.6)}{=} \tilde{d}(\eta f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})|_p \\ &\stackrel{(3.3.7)}{=} \tilde{d}(\eta f \tilde{d}(\eta x^{i_1}) \wedge \dots \wedge \tilde{d}(\eta x^{i_k}))|_p \\ &\stackrel{(iv)}{=} \tilde{d}(\eta f) \wedge \tilde{d}(\eta x^{i_1}) \wedge \dots \wedge \tilde{d}(\eta x^{i_k})|_p \\ &\quad + \eta f \underbrace{\tilde{d}\tilde{d}(\eta x^{i_1})}_{=0 \text{ (iii)}} \wedge \dots \wedge \tilde{d}(\eta x^{i_k})|_p - \eta f \tilde{d}(\eta x^{i_1}) \wedge \underbrace{\tilde{d}\tilde{d}(\eta x^{i_2})}_{=0 \text{ (iii)}} \wedge \dots \wedge \tilde{d}(\eta x^{i_k})|_p \\ &\quad + \dots + (-1)^{k-1} \eta f \tilde{d}(\eta x^{i_1}) \wedge \tilde{d}(\eta x^{i_2}) \wedge \dots \wedge \underbrace{\tilde{d}\tilde{d}(\eta x^{i_k})}_{=0 \text{ (iii)}}|_p \\ &\stackrel{(*)}{=} d(\eta f) \wedge d(\eta x^{i_1}) \wedge \dots \wedge d(\eta x^{i_k})|_p, \end{aligned}$$

wobei wir an der Stelle (*) wieder benutzt haben, dass $\tilde{d}$ und d auf $\mathcal{C}^\infty(M)$ übereinstimmen. Wir rechnen nun mit d an Stelle von $\tilde{d}$ zurück, unter Verwendung von (3.3.5)', (3.3.6)', (3.3.5)' und (iv) (für d) und erhalten hieraus:

$$(d\alpha)|_p = d(\eta f) \wedge d(\eta x^{i_1}) \wedge \dots \wedge d(\eta x^{i_k})|_p = (\tilde{d}\alpha)|_p. \quad \blacksquare$$

Beweis von Theorem 3.3.1: Folgt direkt aus Proposition 3.3.6 und Proposition 3.3.7. ■

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 03.07.

Definition 3.3.8. Ist $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Dann definiere den **Pullback** (oder

¹⁰Die naheliegende Idee für einen Beweis wäre: auf Grund von (i) wissen wir, dass d und $\tilde{d}$ auf Funktionen in $\mathcal{C}^\infty$ übereinstimmen. Wir würden dies gerne auf die Funktionen x^i anwenden und dann mit der Antiderivations-eigenschaft weiter argumentieren. Dies geht aber nicht so, da x^i sich im allgemeinen nicht zu einer glatten Funktion $M \rightarrow \mathbb{R}$ ausdehnt. Deswegen müssen wir mit der im folgenden Funktion η arbeiten, die durch Multiplikation die Formen so der Nähe von ∂U glatt auf Null verändert. Man nennt so etwas eine **Abschneidefunktion**. Nach Abschneiden kann man die Funktion durch Null glatt auf M fortsetzen.

Rückzug)

$$f^*: \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^k(M), \quad \omega \longmapsto f^*\omega.$$

wobei für alle $p \in M$ und $X_1, \dots, X_k \in T_p M$ gelte, dass

$$f^*\omega_p(X_1, \dots, X_k) = \omega_{f(p)}(d_p f(X_1), \dots, d_p f(X_k)) \in \mathbb{R}.$$

Lemma. Es ist f^* linear über $\mathbb{R}$ und $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta$.

Beweis: Nachrechnen. ■

Spezialfall $k = 0$. Dann ist $f^*\omega_p = \omega_{f(p)} \in \mathbb{R}$, also $f^*\omega = \omega \circ f$.

Lemma 3.3.9. Sei $f: M \longrightarrow N$ glatt und $\omega \in \Omega^k(N)$. Dann gilt $f^*d\omega = df^*\omega$.

Beweis: Wähle Karten $M \ni U \xrightarrow{x} V \subseteq \mathbb{R}^m$ von M und $N \ni W \xrightarrow{y} Z \subseteq \mathbb{R}^n$ von N und zeige

$$(f^*d\omega)|_{Q:=U \cap f^{-1}(W)} = (df^*\omega)|_{Q=U \cap f^{-1}(W)}.$$

Dies zeigt dann die Behauptung, da M von Karten überdeckt wird und da das äußere Differential d lokal ist.

Wegen der Linearität kann man o. B. d. A. annehmen, dass $\omega|_W = h dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}$ für $h \in \mathcal{C}^\infty(W)$ und $dy^i \in \Omega^1(W)$. Es gilt für $X \in T_p M$:

$$(f^*dy^i)_p(X) \stackrel{\text{Def. 3.3.8}}{=} d_{f(p)}y^i(d_p f(X)) \stackrel{\text{Kettenr.}}{=} d_p(y^i \circ f)(X).$$

Es ergibt sich $f^*\omega = \underbrace{f^*h}_{=h \circ f} \cdot f^*dy^{i_1} \wedge \dots \wedge f^*dy^{i_k} = (h \circ f) d(y^{i_1} \circ f) \wedge \dots \wedge d(y^{i_k} \circ f)$.

Also¹¹

$$\begin{aligned} d(f^*\omega) &= d(h \circ f) \wedge d(y^{i_1} \circ f) \wedge \dots \wedge d(y^{i_k} \circ f) \\ &\quad + (h \circ f) \underbrace{dd(y^{i_1} \circ f)}_{=0} \wedge d(y^{i_2} \circ f) \wedge \dots \wedge d(y^{i_k} \circ f) \\ &\quad - (h \circ f) d(y^{i_1} \circ f) \wedge \underbrace{dd(y^{i_2} \circ f)}_{=0} \wedge \dots \wedge d(y^{i_k} \circ f) + \dots \\ &= d(h \circ f) \wedge d(y^{i_1} \circ f) \wedge \dots \wedge d(y^{i_k} \circ f) \end{aligned}$$

Außerdem gilt $d(h \circ f) = dh \circ df = f^*dh$.

Das heißt

$$d(f^*\omega) = f^*dh \wedge f^*dy^{i_1} \wedge \dots \wedge f^*dy^{i_k} = f^*(dh \wedge dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}) = f^*(d\omega).$$
■

¹¹In der Vorlesung kam ich ins Zweifeln, ob wir in der vorangehenden Umformung den Übergang von f^*dy^i zu $d(y^i \circ f)$ überhaupt benötigen, zumal wir diesen ja dann weiter unten wieder zurücknehmen. Aber wir brauchen ihn in der nächsten Umformung, da wir sonst nicht wissen, dass $df^*dy^i = 0$. Es ist hingegen klar, dass $dd(y^i \circ f) = 0$. Der Beweis lässt sich also nicht vereinfachen.

3.4 De-Rham-Kohomologie

In diesem und den folgenden Abschnitt(en) halten wir uns eng an [3, 3.5ff].

Definition 3.4.1. Sei M^m eine glatte Mannigfaltigkeit und $\Omega^k(M)$ die Menge der k -Formen auf M . Eine Form $\omega \in \Omega^k(M)$ heißt **geschlossen** (oder ein **Kozykel**), falls $d\omega = 0$.

Die Menge aller Kozykel wird bezeichnet¹² mit

$$Z^k(M) := \left\{ \omega \in \Omega^k(M) \mid d\omega = 0 \right\} = \ker \left(d|_{\Omega^k(M)} \right).$$

Eine Form $\omega \in \Omega^k(M)$ heißt **exakt** (oder ein **Korand**), falls ein $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ mit $d\alpha = \omega$ existiert.

Die Menge aller Koränder wird bezeichnet mit

$$B^k(M) := \left\{ d\alpha \mid \alpha \in \Omega^{k-1}(M) \right\} = \operatorname{im} \left(d|_{\Omega^{k-1}(M)} \right).$$

Wegen $d \circ d = 0$ folgt $B^k(M) \subset Z^k(M)$, und der Quotientenraum $H^k(M) := Z^k(M)/B^k(M)$ heißt die k -te **de-Rham-Kohomologie** von M .

Die Zahl $b_k(M) := \dim(H^k(M)) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ heißt die k -te **Betti-Zahl** von M .

Beispiele 3.4.2.

- (i) Es gilt $H^1(\mathbb{R}^m) = 0$ (das heißt jede geschlossene Form ist exakt).
- (ii) Auf einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit ist jede m -Form geschlossen.

Beweis: „(i)“: Sei $\alpha = \sum_{i=1}^m f_i dx^i$ eine 1-Form mit $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Rechne

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sum_{i=1}^m df_i \wedge dx^i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \overbrace{dx^j \wedge dx^i}^{=0 \text{ für } i=j} \\ &= \sum_{i < j} \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \overbrace{dx^j \wedge dx^i}^{=-dx^i \wedge dx^j} + \sum_{j < i} \frac{\partial f_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i \\ &= \sum_{i < j} \left(-\frac{\partial f_i}{\partial x^j} dx^i \wedge dx^j + \frac{\partial f_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j \right) \\ &= \sum_{i < j} \left(-\frac{\partial f_i}{\partial x^j} + \frac{\partial f_j}{\partial x^i} \right) \underbrace{dx^i \wedge dx^j}_{\text{Basis}}. \end{aligned}$$

Das heißt, es gilt $0 = d\alpha$ genau dann, wenn $\frac{\partial f_i}{\partial x^j} = \frac{\partial f_j}{\partial x^i}$ für alle i, j . Das ist nach [Analysis III](#), Kapitel I, Satz 1.18 äquivalent dazu, dass das Vektorfeld $(f_1, \dots, f_m)^T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Stammfunktion $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ besitzt.

Es gilt $\frac{\partial h}{\partial x^i} = f_i$, also $dh = \sum_{j=1}^m \frac{\partial h}{\partial x^j} dx^j = \sum_{j=1}^m f_j dx^j = \alpha$. Das heißt, α ist exakt.

„(ii)“: $\bigwedge^{m+1} T_p^* M = \{0\}$, also auch $\Omega^{m+1}(M) = 0$ und damit $d|_{\Omega^m(M)} \equiv 0$. ■

Beispiel 3.4.3. Schreibe $(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in Polarkoordinaten, also $x^1 = r \cos(\varphi)$ und $x^2 = r \sin(\varphi)$, wobei $r \in \mathbb{R}^+$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ (eindeutig bis auf $2\pi\mathbb{Z}$).

¹²Wir wählen hier den Buchstaben Z für **Z**ykel und B für **B**oundary.

Wähle φ als stetige (und damit glatte) Funktion auf $U_1 := \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\leq 0} \times \{0\})$.
Also $\varphi(1, 0) = 0$ und $d\varphi \in \Omega^1(U_1)$ und

$$\begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dr \cos(\varphi) + r(-\sin(\varphi)) d\varphi \\ dr \sin(\varphi) + r \cos(\varphi) d\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt durch Invertieren:

$$\begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) & r \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{pmatrix}$$

Das heißt man erhält

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{1}{r} (-\sin(\varphi) dx^1 + \cos(\varphi) dx^2) \\ &= \frac{1}{r^2} (-x^2 dx^1 + x^1 dx^2) \\ &= \frac{-x^2 dx^1 + x^1 dx^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2} =: \alpha \end{aligned}$$

Da $d^2\varphi = 0$ folgt, dass α geschlossen ist (auf U_1).

Eine analoge Rechnung mit $U_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ liefert:

$\tilde{\varphi}(-1, 0) = \pi$, also $\tilde{\varphi} = \varphi$ für $x^2 > 0$ und $\tilde{\varphi} = \varphi + 2\pi$ für $x^2 < 0$.

Da $d\tilde{\varphi} = \alpha$ gilt (rechne!), folgt insgesamt, dass $d\alpha = 0$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Aber: α ist nicht exakt, denn angenommen $\alpha = df$ für ein $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. Dann gilt $0 = \alpha - \alpha = d(f - \varphi)$ auf U_1 , also ist $a := f - \varphi$ konstant auf U_1 und wegen $0 = d(f - \tilde{\varphi})$ auf U_2 ist $b := f - \tilde{\varphi}$ konstant auf U_2 .

Damit ist $\tilde{\varphi} = \varphi$ äquivalent zu $a = b$ und $\tilde{\varphi} = \varphi + 2\pi$ ist äquivalent zu $b = a + 2\pi$.

Zusammen folgt ein Widerspruch. Es gilt also $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \neq 0$.

Notation 3.4.4. Ein Element in $H^k(M)$ schreibt man $[\omega]$ wobei $\omega \in Z^k(M)$.

Lemma 3.4.5. Es gilt:

- (i) Für $\alpha \in Z^k(M)$ und $\beta \in Z^\ell(M)$ folgt $\alpha \wedge \beta \in Z^{k+\ell}(M)$.
- (ii) Für $\alpha \in Z^k(M)$ und $\beta \in B^\ell(M)$ folgt $\alpha \wedge \beta \in B^{k+\ell}(M)$.
- (iii) Für $\alpha \in B^k(M)$ und $\beta \in Z^\ell(M)$ folgt $\alpha \wedge \beta \in B^{k+\ell}(M)$.

Beweis: „(i)“: Es gilt $d(\alpha \wedge \beta) = \underbrace{d\alpha}_{=0} \wedge \beta \pm \alpha \wedge \underbrace{d\beta}_{=0} = 0$.

„(ii)“: Sei $\beta = d\gamma$ für $\gamma \in \Omega^{\ell-1}(M)$. Dann gilt $d(\alpha \wedge \gamma) = \underbrace{d\alpha}_{=0} \wedge \gamma \pm \alpha \wedge \underbrace{d\gamma}_{=\beta} = \pm \alpha \wedge \beta$, also ist

$\alpha \wedge \beta \in B^{k+\ell}(M)$.

„(iii)“: Analog. ■

Korollar 3.4.6. Es gibt eine eindeutige bilineare Abbildung

$$H^k(M) \times H^\ell(M) \xrightarrow{\wedge} H^{k+\ell}(M),$$

sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z^k(M) \times Z^\ell(M) & \xrightarrow{\wedge} & Z^{k+\ell}(M) \\ \downarrow [\bullet] \times [\bullet] & \circlearrowleft & \downarrow [\bullet] \\ H^k(M) \times H^\ell(M) & \xrightarrow{\wedge} & H^{k+\ell}(M) \end{array}$$

kommutiert, also so, dass $[\alpha] \wedge [\beta] := [\alpha \wedge \beta]$ wohldefiniert ist.

Beweis: Sei $[\alpha] = [\tilde{\alpha}]$ und $[\beta] = [\tilde{\beta}]$. Das heißt $\alpha - \tilde{\alpha} \in B^k(M)$ und $\beta - \tilde{\beta} \in B^\ell(M)$. Dann folgt aus Lemma 3.4.5, dass

$$[\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}] \stackrel{(iii)}{=} [\alpha \wedge \tilde{\beta}] \stackrel{(ii)}{=} [\alpha \wedge \beta].$$

■

Korollar 3.4.7. Damit ist $H^*(M) := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} H^k(M)$ zusammen mit $\wedge$ eine $\mathbb{R}$ -Algebra mit $[\alpha] \wedge [\beta] = (-1)^{k\ell} [\beta] \wedge [\alpha]$. Das heißt, die Algebra $H^*(M)$ ist **graduieret kommutativ**.

Korollar 3.4.8. Sei $f: M \rightarrow N$ glatt. Dann ist der Pullback eine Abbildung $f^*: \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$.

Aus $d\alpha = 0$ für $\alpha \in Z^k(M)$ folgt dann $d(f^*\alpha) = f^*(d\alpha) = 0$. Das heißt $f^*(Z^k(N)) \subset Z^k(M)$.

Wenn $\alpha \in B^k(M)$, dann finden wir ein $\gamma \in \Omega^{k-1}(M)$ mit $\alpha = d\gamma$. Wir erhalten $f^*\alpha = f^*(d\gamma) = d(f^*\gamma)$. Also gilt $f^*(B^k(N)) \subset B^k(M)$.

Erhalte daraus eine wohldefinierte lineare Abbildung

$$f^*: H^k(N) \rightarrow H^k(M), \quad [\alpha] \mapsto [f^*\alpha].$$

Übersicht:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k(N) & \xrightarrow{f^*} & \Omega^k(M) \\ \cup & & \cup \\ Z^k(N) & \xrightarrow{f^*} & Z^k(M) \\ \cup & & \cup \\ B^k(N) & \xrightarrow{f^*} & B^k(M) \end{array}$$

Korollar 3.4.9. Seien $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ Abbildungen und $\omega \in \Omega^k(P)$. Dann gelten:

$$\begin{aligned} (g \circ f)^*\omega &= f^*(g^*\omega) \\ (g \circ f)^*[\omega] &= f^*(g^*[\omega]). \end{aligned}$$

Für $M = N$ und $f = \text{id}_M$ gilt somit $(\text{id}_M)^* = f^*\omega = \omega$, das heißt $(\text{id}_M)^*$ ist die Identität auf $H^k(M)$.

Lemma 3.4.10. Ist $f: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus. Dann ist $f^*: H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ ein Vektorraum-Isomorphismus. Insbesondere gilt $b_k(M) = b_k(N)$.

Beweis: Schreibe $g = f^{-1}: N \rightarrow M$. Dann gilt $g^* \circ f^* = (f \circ g)^* = (\text{id}_N)^*$ sowie $f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = (\text{id}_M)^*$ also $g^* = (f^*)^{-1}$. ■

Beispiel 3.4.11. $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sind *nicht* diffeomorph, da $b_1(\mathbb{R}^2) = 0$ und $b_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \geq 1$.

3.5 Zwei Einschübe: Produkte und Formen auf Mannigfaltigkeiten mit Rand

3.5.1 Produkte von Mannigfaltigkeiten

Wir wiederholen und vertiefen die Bildung von Produktmannigfaltigkeiten, siehe Beispiel 2.9 (ii); siehe auch Beispiele 2.14 (iii) für den Fall mit Rand.

Seien M^m und N^n glatte Mannigfaltigkeiten. Dann ist $M \times N$ eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $m + n$.

Seien $\mathcal{A}^M, \mathcal{A}^N$ Atlanten von M bzw. N . Dann ist

$$\mathcal{A}^{M \times N} := \left\{ x \times \tilde{x}: U \times \tilde{U} \longrightarrow V \times \tilde{V} \mid \left(U \xrightarrow{x} V \right) \in \mathcal{A}^M, \left(\tilde{U} \xrightarrow{\tilde{x}} \tilde{V} \right) \in \mathcal{A}^N \right\}$$

ein Atlas auf $M \times N$. Hierbei ist $x \times \tilde{x}: U \times \tilde{U} \longrightarrow V \times \tilde{V}$ durch die Vorschrift definiert, dass das Paar (μ, ν) auf das Paar $(x(\mu), \tilde{x}(\nu))$ abgebildet wird.

Man nennt $\mathcal{A}^{M \times N}$ den **Produktatlas**. Man sieht leicht, dass $M \times N$ mit diesem Atlas eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m + n$ ist, die **Produktmannigfaltigkeit** von M und N .

Das Ziel des Abschnitts ist zu zeigen¹³, dass $T_{(p,q)}(M \times N) = T_p M \oplus T_q N$.

Seien π_M, π_N die Projektionen von $M \times N$ auf M bzw. N . Dann erhält man Differentiale

$$\begin{aligned} d_{(p,q)}\pi_M &: T_{(p,q)}(M \times N) \longrightarrow T_p M \\ d_{(p,q)}\pi_N &: T_{(p,q)}(M \times N) \longrightarrow T_q N \end{aligned}$$

Für $p_0 \in M$ erhalte die Injektion $\iota_{p_0}: N \longrightarrow M \times N$ via $q \mapsto (p_0, q)$. Dies liefert das Differential $d_q \iota_{p_0}: T_q N \longrightarrow T_{(p,q)}(M \times N)$.

Analog für die andere Komponente.

Lemma 3.5.1. *Es gilt $T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_p M \oplus T_q N$.*

Ein Isomorphismus ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} X &\longmapsto \left(d_{(p,q)}\pi_M(X), d_{(p,q)}\pi_N(X) \right) \\ \left(d_p \iota_q(X_M), d_q \iota_p(X_N) \right) &\longleftarrow (X_M, X_N) \end{aligned}$$

Eine alternative Schreibweise wäre der Isomorphismus

$$[c] \longmapsto \left([\pi_M \circ c], [\pi_N \circ c] \right).$$

Beweis: In Karten wie oben gilt

$$T_{(p,q)}(M \times N) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_{(p,q)}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \Big|_{(p,q)}, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1} \Big|_{(p,q)}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^n} \Big|_{(p,q)} \right\rangle$$

¹³Hier ist genau genommen ein kanonischer Isomorphismus anzugeben.

Die Abbildungen in der Behauptung bilden offensichtlich diese Basis auf Basen von $T_p M$ bzw. $T_p N$ ab.

Damit folgt die Behauptung. ■

3.5.2 Formen auf Mannigfaltigkeiten mit Rand

In diesem Unterabschnitt nutzen wir – ohne Beweis die folgende Tatsache aus dem Bereich der Analysis II – die wir auch nicht in der Analysis II nicht bewiesen haben. Wir werden auch an anderen Stellen in diesem Unterabschnitt nicht alles detailliert beweisen, da dies für das Verständnis nicht so zentral ist.

Tatsache 3.5.2. Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$. Dann kann jede glatte Funktion $f: U \cap ([0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}) \rightarrow \mathbb{R}$ zu einer glatten Funktion $U \rightarrow \mathbb{R}$ fortgesetzt werden.

Wie man diese Tatsache beweist hängt u.a. davon ab, wie man die Glattheit von f definiert, siehe vorangehende und ähnliche Diskussionen in der Zentralübung in der Analysis III.

Definition 3.5.3. Sei M^m eine Mannigfaltigkeit mit Rand mit dem Atlas $(\varphi_i: U_i \rightarrow V_i)_i$. Dann heißt $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt, wenn für alle i die Abbildung $f \circ \varphi_i^{-1}$ glatt ist.

Dann ist der Tangentialraum von M in p definiert durch

$$T_p M := \mathcal{D}_p := \left\{ X: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} \mid X \text{ ist Derivation} \right\}.$$

Es besteht eine Abbildung

$$\pi_{TM}: TM = \dot{\bigcup}_{p \in M} T_p M \rightarrow M, \quad T_p M \ni X \mapsto p.$$

Es ist TM eine Mannigfaltigkeit mit Rand und es gilt

$$\partial(TM) = \dot{\bigcup}_{p \in \partial M} T_p M \quad \Gamma(TM) = \left\{ X: M \rightarrow TM \text{ glatt} \mid \pi_{TM} \circ X = \text{id} \right\}.$$

Analog definiert man $T_p^* M$, $T^* M$, $\bigwedge^k T_p^* M$ und $\bigwedge^k T^* M$. Dann gilt $\partial(\bigwedge^k T^* M) = \dot{\bigcup}_{p \in \partial M} \bigwedge^k T_p^* M$. Setze nun noch $\Omega^k(M) := \left\{ \omega: M \rightarrow \bigwedge^k T^* M \mid \omega(p) \in \bigwedge^k T_p^* M \right\}$.

Beispiel 3.5.4. (i) Sei N eine Mannigfaltigkeit. Dann betrachte $N \times [0, 1]$. Es gilt $\partial N = N \times \{0\} \dot{\cup} N \times \{1\}$.

Setze $M := N \times [0, 1] \subset N \times \mathbb{R}$ und sei $p = (q, t) \in N \times [0, 1]$.

Dann gilt $T_p(N \times [0, 1]) = T_p(N \times \mathbb{R}) = T_q N \times \underbrace{T_t \mathbb{R}}_{=\mathbb{R}}$

Weiter gilt $\bigwedge^k T^* M = \dot{\bigcup}_{p \in M} \bigwedge^k T_p^*(N \times \mathbb{R}) \subset \bigwedge^k T^*(N \times \mathbb{R})$.

Es gilt $\omega \in \Omega^k(M)$ genau dann, wenn eine offene Menge $\widetilde{M} \subset N \times \mathbb{R}$ mit $M \subset \widetilde{M}$ und ein $\tilde{\omega} \in \Omega^k(\widetilde{M})$ existiert so dass $\tilde{\omega}|_M \equiv \omega$.

(ii) Zu jeder Mannigfaltigkeit mit Rand M gibt es eine Mannigfaltigkeit (ohne Rand) $\widetilde{M}$ mit

$M \subset \widetilde{M}$ so dass $\widetilde{M}$ einen Atlas $\mathcal{A}^{\widetilde{M}}$ besitzt, so dass

$$\mathcal{A}^M := \left\{ \varphi|_{U \cap M} : U \cap M \longrightarrow V \cap ([0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}) \mid (\varphi : U \longrightarrow V) \in \mathcal{A}^{\widetilde{M}} \right\}$$

ein Atlas von M ist. Insbesondere gilt für $p \in M$: $T_p M = T_p \widetilde{M}$.

Die Abbildung $M \longrightarrow \widetilde{M}$, $x \longmapsto x$ ist ein Diffeomorphismus auf $M \setminus \partial M$.

Als „Idee“ setze $\widetilde{M} := M \dot{\cup} (\partial M \times (0, \varepsilon))$

Es gilt $\omega \in \Omega^k(M)$ genau dann, wenn ein $\widetilde{M}$ wie oben existiert, sowie $\tilde{\omega} \in \Omega^k(\widetilde{M})$ so dass $\tilde{\omega}|_M \equiv \omega$.

Für ein fixiertes $\widetilde{M} \supset M$ gilt auch

$$\omega \in \Omega^k(M) \iff \exists \tilde{\omega} \in \Omega^k(\widetilde{M}) : \tilde{\omega}|_M \equiv \omega.$$

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 07.07.

3.6 Poincaré-Lemma

7.7.

In diesem Abschnitt sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m = \dim M$.

Bemerkung. Betrachte zudem die Mannigfaltigkeit mit Rand $M \times [0, 1]$. Es gilt dann $T_{(p,t)}(M \times [0, 1]) = T_p M \times T_t \mathbb{R} = T_p M \times \mathbb{R}$. Dann haben wir eine injektive Abbildung

$$\iota_t : M \longrightarrow M \times [0, 1], \quad p \longmapsto (p, t).$$

Für eine Karte $x : U \longrightarrow V$ von M sind

$$\begin{aligned} x \times t &:= x \times \text{id} : U \times [0, 1] \longrightarrow V \times [0, 1], & (p, t) &\longmapsto (x(p), t) \\ x \times (1 - t) &: U \times (0, 1] \longrightarrow V \times [0, 1], & (p, t) &\longmapsto (x(p), 1 - t). \end{aligned}$$

Karten von $M \times [0, 1]$, im Sinne von Karten auf einer Mannigfaltigkeit mit Rand.

Sei $\frac{\partial}{\partial t}$ das zur t -Komponente gehörende Koordinatenfeld

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(p, t_0)} = [c_{p, t_0}] \quad \text{mit } c_{p, t_0}(t) = (p, t_0 + t)$$

Die zugehörige 1-Form dt definieren wir als Ableitung der Abbildung $M \times [0, 1] \xrightarrow{t} [0, 1]$.

Es gilt dann $dt \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = 1$ und $dt|_{T_p M \times \{0\}} = 0$, sowie $t \circ \iota_{t_0} = t_0 = \text{const}$ und $dt \circ d\iota_{t_0} = 0$ und $\text{im}(d\iota_{t_0}) = T_p M \times \{0\}$.

Wir werden nun mit Differentialformen auf $M \times [0, 1]$ arbeiten. Ist $x : U \longrightarrow V$ eine Karte von M , so ist auf $U \times [0, 1]$ jede Differentialform von Grad k eine Linearkombination von Differentialformen der Form $h \, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ und von Differentialformen der Form $h \, dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}}$. Grob gesagt: der erstgenannte Typ hat kein dt , der zweitgenannte hat ein dt ; dies führt zu einer Aufspaltung beliebiger Differentialformen in Teile mit dt und welche ohne. Diese Idee soll im folgenden Lemma präzisiert werden.

Lemma 3.6.1. Sei $\omega \in \Omega^k(M \times [0, 1])$ für $k \geq 1$. Dann existieren eindeutige $\alpha \in \Omega^{k-1}(M \times [0, 1])$

und $\beta \in \Omega^k(M \times [0, 1])$ mit

- (i) $\omega = dt \wedge \alpha + \beta$.
- (ii) $\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}, X_1, \dots, X_{k-1}\right) = 0$ für alle $(p, t) \in M \times [0, 1]$ und alle $X_i \in T_{(p,t)}(M \times [0, 1])$.
- (iii) Falls $k \geq 2$ ist, gilt $\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t}, X_2, \dots, X_{k-1}\right) = 0$ für alle $(p, t) \in M \times [0, 1]$ und alle $X_2, \dots, X_{k-1} \in T_{(p,t)}(M \times [0, 1])$.

Beweis: „Eindeutigkeit“: Seien α, β wie oben. Dann rechne

$$\begin{aligned} (dt \wedge \alpha)\left(\frac{\partial}{\partial t}, X_1, \dots, X_{k-1}\right) &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{(k-1)!} \text{Alt}^k(dt \otimes \alpha)\left(\frac{\partial}{\partial t}, \dots, X_1, \dots, X_{k-1}\right) \\ &\stackrel{(iii)}{=} \frac{1}{(k-1)!} dt \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}_{=1} \text{Alt}^{k-1}(\alpha)(X_1, \dots, X_{k-1}) \\ &= \alpha(X_1, \dots, X_{k-1}). \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

Zu (*): Denn $dt = \text{Alt}^1(dt)$ und $\alpha = \frac{1}{(k-1)!} \text{Alt}^{k-1}(\alpha)$. Wir nutzen nun die Kommutativität des unteren Diagramms von Definition und Lemma 3.1.3, und dies liefert für dt und α wie oben

$$\begin{aligned} (k-1)! dt \wedge \alpha &= \text{Alt}^1 dt \wedge \text{Alt}^{k-1}(\alpha) \\ &= \text{Alt}^k(dt \otimes \alpha) \end{aligned}$$

Nun folgt aus (3.6.1) zusammen mit (ii):

$$\alpha(X_1, \dots, X_{k-1}) = \omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, X_1, \dots, X_{k-1}\right) \quad (3.6.2)$$

Wegen (i) gilt $\beta = \omega - dt \wedge \alpha$ und damit folgt die Eindeutigkeit.

„Existenz“: Definiere α wie in (3.6.2). Dann ist $\alpha \in \Omega^{k-1}(M \times [0, 1])$.¹⁴ Setze weiter $\beta := \omega - dt \wedge \alpha$. Damit folgt (i).

Rechne nun

$$\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t}, X_2, \dots, X_{k-1}\right) = \omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}, X_2, \dots, X_{k-1}\right) = 0$$

also folgt (iii).

Und schließlich

$$\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}, X_1, \dots, X_{k-1}\right) = \omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, X_1, \dots, X_{k-1}\right) - \underbrace{(dt \wedge \alpha)\left(\frac{\partial}{\partial t}, X_1, \dots, X_{k-1}\right)}_{=\alpha(X_1, \dots, X_{k-1})} \stackrel{(3.6.2)}{=} 0.$$

Und damit folgt auch (ii). ■

¹⁴Man könnte hier die obige Definition so verstehen, dass hierdurch eine Form in $\Omega^{k-1}(M)$ definiert wird. Das ist für ein fixes $t \in [0, 1]$ auch richtig, aber nur beschränkt hilfreich, denn wir *wollen* die t -Abhängigkeit und eine Form auf $M \times [0, 1]$. Die entsprechende Form auf M ist gleich $\iota_t^* \alpha$ und spielt in folgender Definition eine Rolle. Ist der Ausdruck unabhängig von t so erhalten wir die Form auf $M \times [0, 1]$ durch Pullback der Form auf M .

Definition 3.6.2. Sei $\omega = dt \wedge \alpha + \beta$ wie oben. Dann ist $\mathcal{I}\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ definiert durch

$$(\mathcal{I}\omega)_p(X_1, \dots, X_{k-1}) := \int_0^1 ((\iota_t^* \alpha)_p(X_1, \dots, X_{k-1})) dt = \int_0^1 \alpha_{(p,t)}(d\iota_t(X_1), \dots, d\iota_t(X_{k-1})) dt$$

für alle $p \in M$ und alle $X_i \in T_p M$. Wir nennen

$$\mathcal{I} : \Omega^k(M \times [0, 1]) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M), \quad \omega \longmapsto \mathcal{I}\omega$$

das **Faser-Integral** für $M \times [0, 1] \longrightarrow M$.

Spezialfall: $k = 1$, $M = \{p\}$ und $\omega|_t = f(t) dt$. Dann ist $\mathbb{R} = \Omega^0(\{p\}) \ni \mathcal{I}\omega = \int_0^1 f(t) dt$. Um den allgemeinen Fall zu verstehen, interpretieren wir nun $f(t) dt$ als $(dt) f(t)$, und lassen für $f(t)$ nicht nur reelle Zahl, sondern Elemente von $\Omega^{k-1}(M)$, die glatt von t abhängen. Dann steht oben letztendlich wieder $\mathcal{I}\omega = \int_0^1 f(t) dt$. Vorstellung: Man integriert über t und dies „kostet“ das infinitesimale Element dt .

Satz 3.6.3. Für alle $\omega \in \Omega^k(M \times [0, 1])$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$d(\mathcal{I}\omega) + \mathcal{I}(d\omega) = \iota_1^* \omega - \iota_0^* \omega.$$

Beweis: Sei $x: U \longrightarrow V$ eine Karte von M . Offenbar gilt

$$\mathcal{I}(\omega|_{U \times [0,1]}) = \mathcal{I}(\omega)|_U \quad \forall \omega \in \Omega^k(M \times [0, 1]).$$

Analoge Lokalisierungsaussagen gelten für d, ι_0^* und ι_1^* :

$$d^U(\omega|_U) = (d^M \omega)|_U, \quad \iota_0^*(\omega|_U) = (\iota_0^* \omega)|_U, \quad \iota_1^*(\omega|_U) = (\iota_1^* \omega)|_U.$$

Also kann $M = U$ angenommen werden.

Wegen der Linearität von $\mathcal{I}, d, \iota_0^*$ und ι_1^* genügt es, die folgenden Fälle zu betrachten:

- (i) $\omega = f dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$,
- (ii) $\omega = f dt \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$,

wobei $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

„(i)“: Zerlege $\omega = dt \wedge \alpha + \beta$. Also $\alpha = 0$ und somit $\mathcal{I}(\omega) = 0$. Weiter gilt dann

$$d\omega = \sum_{r=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^r} dx^r \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} + \frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}.$$

Das heißt

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(d\omega)_p(X_1, \dots, X_k) &= \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{(p,t)} \cdot (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k})(X_1, \dots, X_k) \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{(p,t)} dt \cdot (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k})(X_1, \dots, X_k) \\ &= (f(p, 1) - f(p, 0)) (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k})(X_1, \dots, X_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{f(p, 1) (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k})}_{\iota_1^*(f dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k})} (X_1, \dots, X_k) \\
&\quad - \underbrace{f(p, 0) (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k})}_{\iota_0^*(f dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k})} (X_1, \dots, X_k) \\
&= (\iota_1^* \omega)_p(X_1, \dots, X_k) - (\iota_0^* \omega)_p(X_1, \dots, X_k).
\end{aligned}$$

„(ii)“: Aus der Zerlegung $\omega = dt \wedge \alpha + \beta$ folgt $\beta = 0$. Dann¹⁵

$$\begin{aligned}
(\mathcal{I}\omega)_p(X_1, \dots, X_{k-1}) &\stackrel{(+)}{=} \int_0^1 f(p, t) (dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}) (X_1, \dots, X_{k-1}) dt \\
&= \left(\int_0^1 f(p, t) dt \right) (dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}) (X_1, \dots, X_{k-1}).
\end{aligned}$$

Kurz also:

$$\mathcal{I}\omega = \left(\int_0^1 f(\bullet, t) dt \right) dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}.$$

und damit

$$\begin{aligned}
d\mathcal{I}\omega &\stackrel{(*)}{=} \sum_{r=1}^m \left(d \int_0^1 f(\bullet, t) dt \right) dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \\
&= \sum_{r=1}^m \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^r} dt \right) dx^r \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}.
\end{aligned}$$

Zu „(*)“: Man beachte, dass man hier dt besser nicht als Differentialform betrachten sollte, sondern nur als Teil des Integralbegriffs. Als Konsequenz davon ist hier kein $\wedge$ -Produkt zwischen dt und dx^{j_2} zu nehmen. Aus demselben Grund, ist auch kein Vorzeichenwechsel vorzunehmen, wenn wir in der Zeile danach dx^r mit dt vertauschen. Man nutzt hier letztendlich, dass die Ableitung nach x^r und die Integration nach t vertauschen.

Weiter

$$\begin{aligned}
d\omega &= \left(\sum_{r=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^r} dx^r \wedge dt \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \underbrace{dt \wedge dt}_{=0} \wedge \dots \\
&= - \sum_{r=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^r} dt \wedge dx^r \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}.
\end{aligned}$$

Und daraus folgt

$$(\mathcal{I}d\omega)|_p = - \sum_{r=1}^m \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^r}(p, t) dt \right) dx^r \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} = -(\mathcal{I}\omega)_p.$$

Rechne nun

$$\iota_{t_0}^*(dt)(X) = dt(d\iota_{t_0}(X)) = d(\underbrace{\iota_{t_0} \circ \iota_{t_0}}_{=0})(X) \stackrel{\equiv \text{const}}{=} 0.$$

¹⁵Wenn man an der Stelle (+) die Definition der Faser-Integration $\mathcal{I}$ nutzt, verwendet man $\textcolor{red}{dx}^j(d\iota_t(X)) = \textcolor{blue}{dx}^j(X)$, oder äquivalent dazu $\iota_t^* \textcolor{red}{dx}^j = \textcolor{blue}{dx}^j$, wobei $\textcolor{red}{dx}^j$ das Koordinatenkovektorfeld auf $M \times [0, 1]$ bezeichnet, während $\textcolor{blue}{dx}^j$ für das – normalerweise gleich bezeichnete – Koordinatenkovektorfeld auf M steht. Durch die t -abhängige Identifikation $T_p M$ mit $\iota_t(T_p M) \subset T_{(p,t)} M \times [0, 1]$ verschwindet der Unterschied. Deswegen ist es sinnvoll, in der Notation keinen Unterschied zu machen.

Also

$$\iota_{t_0}^*(f \, dt \wedge dx^{j_2} \wedge \dots) = \underbrace{\iota_{t_0}^*(dt)}_{=0} \wedge \iota_{t_0}^*(f \, dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}) = 0. \quad \blacksquare$$

Beispiel 3.6.4. Sei $k = 0$ und sei $M = \{p\}$ eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit mit nur einem Punkt p , sowie $f = \omega \in \Omega^0(M \times [0, 1]) = \mathcal{C}^\infty([0, 1])$. Dann gilt $\mathcal{I}\omega = 0 \in \Omega^{-1}(M) = \{0\}$. Dann ist $d\omega = df = f'(t) \, dt$. Somit $\mathcal{I}d\omega = \int_0^1 f'(t) \, dt$ und $\iota_t^*\omega = f \circ \iota_t = f(t)$. Also ergibt sich

$$\int_0^1 f'(t) \, dt = f(1) - f(0)$$

Die Aussage des Satzes ist also eine Umformulierung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung für glatte Funktionen. Insofern ist der vorangehende Satz eine Verallgemeinerung dieses Hauptsatzes.

Korollar 3.6.5. Für $\omega \in Z^k(M \times [0, 1])$ gilt $\iota_1^*\omega - \iota_0^*\omega = d(\mathcal{I}\omega)$.

Definition 3.6.6. Seien X und Y topologische Räume. Zwei stetige Abbildungen $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ heißen **homotop**, falls es eine stetige Abbildung $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ existiert, so dass $F \circ \iota_0 = f_0$ und $F \circ \iota_1 = f_1$. Die Abbildung F heißt dann **Homotopie** von f_0 nach f_1 .

Sind M und N Mannigfaltigkeiten und $f_0, f_1: M \rightarrow N$ glatt, so heißen f_0, f_1 **glatt homotop**, falls eine glatte Homotopie existiert.

Bemerkung 3.6.7. Sind $f_0, f_1: M \rightarrow N$ glatte Abbildungen. Dann sind f_0, f_1 genau dann glatt homotop, wenn sie homotop sind.

Beweis: Ohne Beweis. ■

Definition 3.6.8. Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ topologischer Räume oder von Mannigfaltigkeiten heißt eine (glatte) **Homotopieäquivalenz**, falls es eine stetige (glatte) Abbildung $g: Y \rightarrow X$ gibt, so dass $g \circ f$ (glatt) homotop zu id_X ist und $f \circ g$ (glatt) homotop zu id_Y ist. In diesem Fall heißen X und Y **homotopieäquivalent**.

Bemerkung 3.6.9. Homotopie, glatte Homotopie und glatte Homotopieäquivalenzen sind Äquivalenzrelationen.

Beispiel 3.6.10. Es ist $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ homotopieäquivalent zu $\mathbb{S}^{n-1}$ vermöge der Abbildungen

$$x \mapsto \frac{x}{\|x\|}, \quad x \longleftarrow x.$$

Korollar 3.6.11. Sind $f_0, f_1: M \rightarrow N$ homotope glatte Abbildungen und $\omega \in Z^k(N)$. Dann ist $f_0^*\omega - f_1^*\omega$ exakt. Insbesondere ist

$$f_0^* = f_1^*: H^k(N) \rightarrow H^k(M), \quad [\omega] \mapsto [f_0^*\omega] = [f_1^*\omega].$$

Beweis: Sei F eine glatte Homotopie. Das heißt $F \circ \iota_0 = f_0$ und $F \circ \iota_1 = f_1$. Beachte

$$d(F^*\omega) = F^*(\underbrace{d\omega}_{=0}) = 0.$$

Wir rechnen

$$f_1^* \omega - f_0^* \omega = (F \circ \iota_1)^* \omega - (F \circ \iota_0)^* \omega = \iota_1^* F^* \omega - \iota_0^* F^* \omega,$$

und mit Korollar 3.6.5 sehen wir, dass diese k -Form auf M gleich $d\mathcal{I}(F^* \omega)$ und somit exakt ist. Also gilt $f_1^* \omega - f_0^* \omega \in B^k(M)$, und damit haben wir $[f_1^* \omega] = [f_0^* \omega] \in H^k(M)$. ■

Korollar 3.6.12. *Ist $f: M \rightarrow N$ eine Homotopieäquivalenz. Dann ist $f^*: H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ ein Isomorphismus. Weiter ist $f^*: H^*(N) \rightarrow H^*(M)$ ein Isomorphismus $\mathbb{Z}$ -graduierter reeller Algebren¹⁶.*

Beweis: Sei $g: N \rightarrow M$ so dass $g \circ f$ homotop zu id_M und $f \circ g$ homotop zu id_N ist. Mit Hilfe von Korollar 3.6.11 sieht man, dass $(f \circ g)^* = (\text{id}_N)^* = \text{id}_{H^k(N)}: H^k(N) \rightarrow H^k(N)$ und $(g \circ f)^* = (\text{id}_M)^* = \text{id}_{H^k(M)}: H^k(M) \rightarrow H^k(M)$. Dann gilt $g^* \circ f^* = (f \circ g)^* = (\text{id}_N)^* = \text{id}_{H^k(N)}$. Ebenso $f^* \circ g^* = \text{id}_{H^k(M)}$. ■

Definition 3.6.13. *Ein topologischer Raum heißt **zusammenziehbar**, falls er homotopieäquivalent zu $\{p\}$ ist.*

10.7.

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 10.07.

Lemma 3.6.14. *Sei X ein topologischer Raum. Dann ist X genau dann zusammenziehbar, wenn für ein $p \in X$ eine stetige Homotopie $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ existiert mit*

$$H(x, 1) = x, \quad H(x, 0) = p$$

für alle $x \in X$.

Beweis: Siehe Übungsblatt 13, Aufgabe 2. ■

Beispiel 3.6.15. Ist $M \subseteq \mathbb{R}^m$ sternförmig mit Zentrum p , dann ist

$$H(x, t) := (1 - t)p + tx$$

eine glatte Homotopie von id_M auf const , also ist M zusammenziehbar.

Korollar 3.6.16. *Ist M zusammenziehbar, so gilt*

$$H^k(M) \cong H^k(\{p\}) = \begin{cases} \mathbb{R} & , k = 0 \\ 0 & , k \neq 0. \end{cases}$$

¹⁶Hierbei bedeutet „ $\mathbb{Z}$ -graduieret“ zunächst einmal, dass $H^*(M)$ und $H^*(N)$ $\mathbb{Z}$ -graduierte Vektorräume sind, d. h. wir haben Zerlegungen $H^*(M) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^k(M)$ und $H^*(N) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^k(N)$ haben. Wir definieren hierbei $H^k(M) = H^k(N) := \{0\}$ für $k < 0$. Aus $\bigwedge^k T_p M = \{0\}$ für $k > 0$ folgt dann auch $H^k(M) = \{0\}$ für $k > \dim M$ und $H^k(N) = \{0\}$ für $k > \dim N$. Wenn wir sagen, dass eine Abbildung ein Homomorphismus (Isomorphismen entsprechend!) $\mathbb{Z}$ graduierter Algebren ist, so fordert man zusätzlich, dass diese Graduierung erhalten bleibt, d. h. $f^*(H^k(N)) \subset H^k(M)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis: „ $k > 0$ “: In diesem Fall gilt $\Omega^k(\{p\}) = 0$, also $Z^k(\{p\}) = 0$ und somit $H^k(M) \cong H^k(\{p\}) = \{0\}$.

„ $k = 0$ “: Betrachte

$$0 \stackrel{(\text{def})}{=} \Omega^{-1}(\{p\}) \longrightarrow \Omega^0(\{p\}) \cong \mathbb{R} \longrightarrow \Omega^1(\{p\}) = 0. \quad \blacksquare$$

Korollar 3.6.17 (Poincaré-Lemma). *Ist M eine sternförmige offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$, dann ist jede geschlossene k -Form (für $k \geq 1$) bereits exakt.*

Aus [Übungsblatt 12, Aufgabe 4](#) erhalten wir dann mit den dort verwendeten Notation.

Korollar 3.6.18. *Sei $M = \mathbb{R}^3$.*

Fall $k = 1$: Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit $\text{rot}(X) = 0$. Dann existiert ein $f \in C^\infty(M)$ mit $X = \text{grad}(f)$.

Fall $k = 2$: Für $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit $\text{div}(X) = 0$, dann existiert ein $Y \in \mathfrak{X}(M)$ mit $\text{rot}(Y) = X$.

Fall $k = 3$: Für alle $f \in C^\infty(M)$ existiert ein $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit $\text{div}(X) = f$.

3.7 Orientierung und Integration von Formen

3.7.1 Orientierung

Sei V ein Vektorraum und $m := \dim(V) \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\dim(\bigwedge^m V) = 1$. Insbesondere ist $\bigwedge^m V$ homöomorph zu $\mathbb{R}$. Nun hat $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ die beiden Zusammenhangskomponenten $(-\infty, 0)$ (=die negative Komponente) und $(0, \infty)$ (=die positive Komponente) hat. Also hat $\bigwedge^m V \setminus \{0\} := (\bigwedge^m V) \setminus \{0\}$ zwei Zusammenhangskomponenten.¹⁷

Definition 3.7.1. Eine **Orientierung** $\mathcal{O}_V$ auf V ist eine (der beiden) Zusammenhangskomponente von $\bigwedge^m V \setminus \{0\}$.

Ein **orientierter Vektorraum** ist ein Paar $(V, \mathcal{O}_V)$, wobei $\mathcal{O}_V$ eine Orientierung auf V ist. Schreibe oft V für $(V, \mathcal{O}_V)$.

Eine Basis $(e_1, \dots, e_m)$ von V ist **positiv orientiert** (bzw. **negativ orientiert**), falls $e_1 \wedge \dots \wedge e_m \in \mathcal{O}_V$ (bzw. $e_1 \wedge \dots \wedge e_m \notin \mathcal{O}_V$).

Bemerkung 3.7.2 (Äquivalente Beschreibung). Sei $m \geq 1$. Man führt auf dem Raum aller Basen eine Äquivalenzrelation ein: Seien dazu $b_1, \dots, b_m$ und $c_1, \dots, c_m$ Basen auf V . Schreibe dann $(b_1, \dots, b_m) = (c_1, \dots, c_m) \cdot A$ für $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, d. h. A ist die Basiswechselmatrix. Dann hat (b_i) dieselbe Orientierung wie (c_i) genau dann, wenn $\det(A) > 0$.¹⁸

¹⁷Man beachte: wir wissen zunächst nur die Existenz eines Isomorphismus $I : \bigwedge^m V \longrightarrow \mathbb{R}$, dieser ist aber nicht eindeutig. Zum Beispiel ist $-I$ oder $-5I$ auch ein Isomorphismus. Es ergibt deswegen zunächst keinen Sinn, von der „positiven“ Komponente von $\bigwedge^m V \setminus \{0\}$ zu sprechen. Wir wählen eine der Komponenten aus, und diese Auswahl definiert diese Komponente als „die positive“.

¹⁸Dies kann man als (wahre) Aussage betrachten. Oder man kann dies als alternative Definition der Orientierung hernehmen: wir zeigen zunächst, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation auf dem Raum der Basen ist; eine Orientierung wird dann definiert als eine Äquivalenzklasse. Im Fall $m \geq 1$ stimmt diese alternative und etwas anschaulichere Definition im wesentlichen mit unserer überein. Der Fall $m = 0$ ist dann aber speziell. Das Problem ist: 0-dimensionale Vektorräume haben nur eine Basis, nämlich die leere Menge. Also haben sie auch nur eine Äquivalenzklasse von Basen. Damit alle unsere Aussagen in allen Dimensionen gleich formuliert werden können, ist es aber wichtig, dass alle endlich-dimensionalen reellen Vektorräume genau zwei Orientierungen haben. Dies ist mit unserer Definition 3.7.1 gegeben: ist V 0-dimensional, so gilt $\bigwedge^0 V = \mathbb{R}$; und dann hat $\bigwedge^0 V \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zwei Zusammenhangskomponenten.

Bemerkung 3.7.3. Ist $e_1, \dots, e_m$ eine positiv orientierte Basis von V und $(e_i^*)_i$ die duale Basis in V^* . Dann ist $\mathcal{O}_{V^*} = \{te_1^* \wedge \dots \wedge e_m^* \mid t \in \mathbb{R}_{>0}\}$ eine Zusammenhangskomponente von $\bigwedge^m V^*$. Das heißt Orientierungen von V stehen in bejektiver Korrespondenz zu Orientierungen von V^* .

Man kann eine Orientierung eines m -dimensionalen Vektorraums V also insbesondere durch eine der folgende Angaben spezifizieren:

- ein Element von $\bigwedge^m V \setminus \{0\}$, die dann die positive Zusammenhangskomponente auszeichnet,
- eine Basis von V , die damit zur positiv orientierten Basis wird und wodurch jede andere Basis entweder positiv oder negativ orientiert wird,
- eine Basis von V^* , die damit zur positiv orientierten Basis wird,
- ein Element von $\bigwedge^m V^* \setminus \{0\}$,

Definition 3.7.4. Sei M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine **Orientierung** von M ist eine Familie $(\mathcal{O}_{T_p M})_{p \in M}$, wobei $\mathcal{O}_{T_p M}$ eine Orientierung auf $T_p M$ ist, die stetig in p ist im Sinne von:

Es gibt eine stetige Abbildung $\omega: M \rightarrow \bigwedge^m T^* M$ so, dass $\omega(p) \neq 0$ für alle $p \in M$ und $\omega(p)$ definiert die Orientierung $\mathcal{O}_{T_p M}$ auf $T_p M$.

Das heißt eine Basis $(b_1, \dots, b_m)$ von $T_p M$ ist genau dann positiv orientiert, wenn $\omega(p)(b_1, \dots, b_m)$ positiv ist. Eine Mannigfaltigkeit nennt man **orientierbar**, wenn es auf ihr eine Orientierung gibt.

Definition 3.7.5. Eine **orientierte Mannigfaltigkeit** ist ein Paar $(M, \mathcal{O}_M)$ (oft kurz nur M), wobei $\mathcal{O}_M$ eine Orientierung von M ist.

Beispiel 3.7.6. (i) $\mathbb{R}^m$ trägt als Vektorraum die Orientierung $\{te_1 \wedge \dots \wedge e_m \mid t \in \mathbb{R}_{>0}\}$. Das heißt die Standard-Basis ist positiv orientiert, also ist eine beliebige Basis $(v_i)_{i=1, \dots, m}$ genau dann positiv orientiert, wenn $\det(v_1, \dots, v_m) > 0$.

Für $\mathbb{R}^m$ als Mannigfaltigkeit gilt $T_p \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m$ für alle p . Ist $x = \text{id}_{\mathbb{R}^m}$ die Identität, betrachtet als Karte, dann wird die obige Orientierung durch $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m|_p$ induziert. Diese Orientierung ist stetig in p , denn $\omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ ist stetig (sogar glatt).

(ii) Ist $x: U \rightarrow V$ eine Karte von M , so legt $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ eine Orientierung auf $U \subseteq M$ fest.

(iii) Auf einer Mannigfaltigkeit sei ein Atlas gegeben. Durch Einschränken der Karten auf Zusammenhangskomponenten erhält man einen Atlas $\{x_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha \mid \alpha \in A\}$, so dass alle U_α zusammenhängend sind.

Wähle eine Partition der Eins $(\eta_\alpha)_\alpha$. Ist nun $\mathcal{O}_M$ eine Orientierung auf M , dann gibt es $(\epsilon_\alpha)_\alpha \in \{\pm 1\}$ mit $\epsilon_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^m|_p \in \mathcal{O}_{T_p M}$.

Dieses ϵ_α ist lokal konstant und hängt deswegen nur von α ab.

Für $\omega := \sum_\alpha \epsilon_\alpha \eta_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^m \in \Omega^m(M)$ gilt somit $\omega(p) \neq 0$. Denn für festes $p \in M$ gilt: für alle $\alpha \in A$ mit $p \in U_\alpha$ liegt $\epsilon_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^m|_p$ in der positiven Zusammenhangskomponente von $\bigwedge^m T_p M$, und mindest für ein solches α gilt $\eta_\alpha(p) > 0$. Also kann das ω in Definition 3.7.4 glatt gewählt werden.

(iv) Ist $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ eine Hyperfläche und $\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ ein Einheitsnormalenfeld. Dann definieren wir durch $\omega_p(X_1, \dots, X_m) := \det(\nu, X_1, \dots, X_m)$ für $X_i \in T_p M$ eine m -Form auf M . Da ν keine Linear-Kombination von Vektoren aus $T_p M$ ist, erhalten wir $\omega_p \neq 0$. Da es glatt von p abhängt, definiert ω eine Orientierung auf M .



Abbildung 3.7.1: Zwei Möbius-Bänder aus Papier, Modelle der Fakultät für Mathematik, Regensburg[©]

- (v) Ist umgekehrt $\mathcal{O}_M$ eine Orientierung von $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ und $b_1, \dots, b_m$ eine positiv orientierte Basis von $T_p M$, dann definiere $\nu(p)$ als den Vektor in $\mathbb{R}^{m+1}$ so dass $\|\nu(p)\| = 1$, $\nu(p) \perp T_p M$ und $\{\nu(p), b_1, \dots, b_m\}$ ist positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^{m+1}$.
Man kann zeigen, dass $\nu(p)$ unabhängig von den b_i und glatt ist.
- (vi) Das Möbiusband, siehe [Übungsblatt 11, Aufgabe 1 b\)](#) und Bemerkung 1.78, ist nicht orientierbar, siehe Abbildung 3.7.1.
- (vii) Ist U offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit M , dann kann jede Orientierung auf M zu einer Orientierung auf U eingeschränkt werden. Daraus folgt: ist U nicht orientierbar, dann auch nicht M . Dies kann man insbesondere auf die Kleinsche Flasche anwenden. Sie erhält eine offene Teilmenge U , die diffeomorph zu einem Möbiusband ist, siehe [Übungsblatt 11, Aufgabe 1 b\)](#). Da das Möbiusband nicht orientierbar ist, ist auch die Kleinsche Flasche, siehe Abbildung 3.7.2 nicht orientierbar.

Definition 3.7.7. Sei $f: M^m \rightarrow N^n$ ein lokaler Diffeomorphismus orientierter Mannigfaltigkeiten. Dann heißt f **orientierungserhaltend** (bzw. **orientierungsumkehrend**), falls für alle $p \in M$ die Abbildung $d_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ positiv orientierte Basen auf positiv orientierte (bzw. negativ orientierte) Basen abbildet.

Bemerkung. Die Begriffe „orientierungserhaltend“ und „orientierungsumkehrend“ sind nur dann Gegenteile, wenn die Mannigfaltigkeit zusammenhängend und nicht-leer ist.

Bemerkung. Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Orientierung $\mathcal{O}_M$ und $x: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Karte von M . Dann ist x genau dann orientierungserhaltend, wenn $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ gemäß Beispiel 3.7.6 (iii) auf U die Orientierung $(\mathcal{O}_M)|_U$ induziert.

Lemma 3.7.8. Eine orientierte Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand) besitzt immer einen Atlas, der nur aus orientierungserhaltenden Karten besteht (ohne Rand: falls $\dim M \geq 1$, mit Rand: falls



Abbildung 3.7.2: Die Kleinsche Flasche, Modell der Fakultät für Mathematik, Regensburg[©]

$\dim M \geq 2$).

Beweis: „1. Schritt“: Schränke alle Karten auf Zusammenhangskomponenten ein.

Erhalte einen Atlas $\{x_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ so dass alle U_α zusammenhängend sind.

„2. Schritt“: Ersetze alle orientierungsumkehrenden x_α durch $s \circ x_\alpha$ und V_α durch $s(V_\alpha)$ mit

$$s = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, -1) \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

■

Bemerkung 3.7.9 (Volumenform auf Rand). Sei M^m eine Mannigfaltigkeit mit Rand, $m \geq 1$. Wir wissen, dass dann ∂M eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m - 1$ ist. Für alle $p \in \partial M$ ist das Differential der Inklusion $\iota: \partial M \rightarrow M$, $x \mapsto x$ eine lineare Abbildung $d_p \iota: T_p \partial M := T_p(\partial M) \rightarrow T_p M$. Werden Tangentialvektoren in $T_p M$ durch Derivationen in p beschrieben (wie in Abschnitt 3.5.2), so gilt $d_p(\iota(X))(f) = X(f \circ \iota)$ oder in anderen Worten $\partial_{d_p \iota(X)} f = \partial_X(f|_{\partial M})$ für alle $X \in T_p(\partial M)$, $f \in C^\infty(M)$, siehe Bemerkung 2.5.9. Werden hingegen Tangentialvektoren als Äquivalenzklassen von Kurven beschreiben (was am Rand nicht im Detail formal ausgeführt wurde) dann gilt $d_p \iota([c]) = [c]$, wobei $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \partial M$ eine glatte Kurve ist mit $c(0) = p$. Mit Hilfe der Abbildung $d_p \iota$ identifizieren wir $T_p \partial M$ mit $d_p \iota(T_p \partial M)$.

Ein Vektor $v \in T_p M \setminus T_p \partial M$ heißt **nach außen gerichtet**, falls $v = [c]$ für $c: (-\epsilon, 0] \rightarrow M$ glatt mit $c(0) = p$, oder äquivalent: falls $\partial_v f \leq 0$ für alle glatten $f: M \rightarrow [0, \infty)$ mit $f|_{\partial M} = 0$.

Angenommen M sei orientiert. Sei $\omega \in \Omega^m(M)$ gegeben, sodass ω die Orientierung auf M definiert und sei $v: \partial M \rightarrow \bigcup_{p \in \partial M} T_p M$ überall nach außen gerichtet. Dann versehen wir ∂M mit der durch $\omega(v, \bullet, \dots, \bullet) \in \Omega^{m-1}(\partial M)$ definierten Orientierung, die wir die **auf ∂M induzierte Orientierung** nennen. Mit dieser Definition sieht man, dass eine Basis $b_1, \dots, b_{m-1}$ von $T_p \partial M$ positiv orientiert ist, genau dann, wenn $v, b_1, \dots, b_{m-1}$ eine positiv orientierte Basis von $T_p M$ ist.¹⁹

Sind v_1 und v_2 beide in $T_p M \setminus T_p \partial M$ nach außen gerichtet, dann existiert ein $r > 0$ mit $rv_1 - v_2 \in$

¹⁹Hier wurden einige Konventionen gewählt, bei denen Sie nicht sehen können, wieso wir die so und nicht anders gewählt haben. Wieso nach außen gerichtete Vektoren und nicht nach innen gerichtete? Wieso setzen wir v an die erste Stelle? Der Grund ist, dass wir somit in späteren Teilen lästige Vorzeichen vermeiden, die teilweise noch von $(-1)^m$ abhängen könnten. Aber wie so oft bei solchen Wahlen ist Vorsicht geboten: es kann gut sein, dass andere Literaturquellen hier andere Konventionen nutzen.

$T_p \partial M$. Das heißt die Definition der Orientierung von ∂M ist unabhängig von der Wahl von v und ω und von der Wahl der Basis (b_i) .²⁰

3.7.2 Volumenform

Definition und Lemma 3.7.10. Sei V ein m -dimensionaler Vektorraum mit Orientierung $\mathcal{O}_V \in \bigwedge^m V \setminus \{0\}$ und Skalarprodukt $g(\bullet, \bullet)$. Sei $E_1, \dots, E_m$ eine positiv orientierte Basis von V mit dazu dualer Basis $E_1^*, \dots, E_m^*$. Wir definieren $g_{ij} := g(E_i, E_j)$. Dann ist

$$\text{dvol}_V := \sqrt{\det(g_{ij})} E_1^* \wedge \dots \wedge E_m^* \in \bigwedge^m V^*$$

unabhängig von der Wahl der Basis $E_1, \dots, E_m$. Wir nennen dvol_V die **Volumenform** von V , oder genauer: von $(V, \mathcal{O}_V, g)$.

Beweis: Sei $(F_1, \dots, F_m)$ eine andere positive orientierte Basis, so gibt es eine Basiswechselmatrix $A = (a_{ij})$, so dass $(F_1, \dots, F_m) = (E_1, \dots, E_m) \cdot A$ oder äquivalent dazu mit ESK $F_j = E_i a_{ij}$. Wir rechnen nach

$$\begin{aligned} & E_1^* \wedge \dots \wedge E_m^*(F_1, \dots, F_m) \\ &= E_1^* \wedge \dots \wedge E_m^*(E_{i_1} a_{i_1 1}, \dots, E_{i_m} a_{i_m m}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_m} \underbrace{E_1^* \wedge \dots \wedge E_m^*(E_{\sigma(1)}, \dots, E_{\sigma(m)})}_{\text{sgn}(\sigma)} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(m)m} \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

und dies impliziert $E_1^* \wedge \dots \wedge E_m^* = \det(A) F_1^* \wedge \dots \wedge F_m^*$. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} g_{ij}^F &:= g(F_i, F_j) = g(E_k a_{ki}, E_\ell a_{\ell j}) \\ &= a_{ki} \underbrace{g(E_k, E_\ell)}_{=: g_{k\ell}^E} a_{\ell j} \end{aligned}$$

und somit

$$\det(g_{ij}^F) = \det(a_{ki}) \det(g_{k\ell}^E) \det(a_{\ell j}) = (\det(A))^2 \det(g_{k\ell}^E).$$

Wir erhalten insgesamt

$$\begin{aligned} \sqrt{\det(g_{ij}^F)} F_1^* \wedge \dots \wedge F_m^* &= |\det(A)| \sqrt{\det(g_{k\ell}^E)} F_1^* \wedge \dots \wedge F_m^* \\ &= \text{sgn}(\det(A)) \sqrt{\det(g_{k\ell}^E)} E_1^* \wedge \dots \wedge E_m^* \end{aligned}$$

Da beide Basen positiv orientiert sind, folgt $\det(A) > 0$ und somit die Behauptung. ■

Beispiel 3.7.11. Ist $E_1, \dots, E_m$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis, so erhalten wir

$$\text{dvol}_V := E_1^* \wedge \dots \wedge E_m^* \in \bigwedge^m V^*.$$

²⁰Aber es hängt natürlich von der Orientierung von M ab!

Wir machen nun hieraus eine Definition für Mannigfaltigkeiten.

Sei M^m eine orientierte Mannigfaltigkeit, Orientierung gegeben durch $\omega \in \Omega^m(M)$ und g eine riemannsche Metrik.

Dann ist also $(T_p M, g_p)$ ein durch $\omega|_p$ orientierter euklidischer Vektorraum. Wir definieren dvol_p^g dazu wie oben.

Ist dann $E_1(p), \dots, E_m(p)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $(T_p M, g_p)$ und $E_i^*(p)$ die dazu duale Basis, so haben wir

$$\text{dvol}_p^g := E_1^* \wedge \dots \wedge E_m^* \in \bigwedge^m T_p^* M.$$

Durch Nachrechnen ergibt sich in einer Karte $x: U \rightarrow V$ von M mit $g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right): U \rightarrow \mathbb{R}$: Ist x orientierungserhaltend (vgl. Definition 3.7.7), so gilt

$$\text{dvol}^g = \sqrt{\det(g_{ij})} \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (3.7.1)$$

Ist x orientierungsumkehrend, so gilt

$$\text{dvol}^g = -\sqrt{\det(g_{ij})} \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (3.7.2)$$

3.7.3 Integration von Formen

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, m -Formen (mit kompaktem Träger) auf einer m -dimensionalen orientierten Mannigfaltigkeit zu integrieren. Hierzu sollte zunächst bemerkt werden: man kann die Integration von Funktion des ersten Kapitels auf nahezu offensichtliche Art und Weise von Untermannigfaltigkeiten auf riemannsche Mannigfaltigkeiten ausdehnen. Der in diesem Abschnitt definierte Integrationsbegriff ist etwas anders, denn wir benötigen keine riemannsche Metrik um zu integrieren, wir benötigen aber eine Orientierung²¹. Dies vereinfacht nicht nur unsere Beweise etwas, sondern entlastet auch die Aussagen von dem – in diesem Kontext oft unnötigen – „Ballast“ der riemannschen Metrik: in der richtigen Sprache brauchen wir sie nicht, um zu integrieren. Es folgt sofort, dass alle Aussagen unter geeignet verwendeten orientierungserhaltenden Diffeomorphismen invariant sind. Die Quintessenz ist: sobald wir eine Orientierung haben, ist es viel schöner, m -Formen zu integrieren als Funktionen. Die Integration von m -Formen ist dann einfacher.

Definition 3.7.12. Sei M^m eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand und $x: U \rightarrow V$ eine orientierungserhaltende oder –umkehrende Karte. Sei weiter $\beta \in \Omega^m(M)$ so dass $\text{supp}(\beta) \subset U$ kompakt.

Schreibe $\beta = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ mit $f \in C^\infty(U)$ und $\text{supp}(f) = \text{supp}(\beta) \subset U$. Dann definiere

$$\int_U^{[x]} \beta := \int_V (f \circ x^{-1}) \, d\lambda^m,$$

falls x orientierungserhaltend ist. Hierbei ist $d\lambda^m$ das in Analysis III definierte Lebesgue-Maß auf offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^m$ und das Integral ist das in Analysis III definierte Lebesgue-Integral.

²¹Und mit etwas mehr Aufwand und einer Modifikation des Differentialformen-Begriffs zu Volumenformen könnte man auch die Orientierung wegbekommen

Ist x orientierungsumkehrend, so definiere

$$\int_U^{[x]} \beta := - \int_V (f \circ x^{-1}) \, d\lambda^m.$$

Lemma 3.7.13. Die Definition 3.7.12 ist unabhängig von der Wahl der Karte x : Ist $y: W \rightarrow Z$ eine weitere Karte (orientierungserhaltend oder $-$ umkehrend) gilt zusätzlich $\text{supp}(\beta) \subset W$. Dann gilt

$$\int_U^{[x]} \beta = \int_W^{[y]} \beta.$$

Beweis: „ x und y orientierungserhaltend“:

Ohne Einschränkung gilt $U = W$ (sonst ersetze beide durch $U \cap W$). Schreibe

$$\omega = f \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m = \tilde{f} \, dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m$$

für geeignete $f, \tilde{f} \in C^\infty(U)$. Sei $\varphi := y \circ x^{-1}$. Mit der Transformationsformel (Analysis III, Kapitel II, Satz 7.1) folgt:

$$\begin{aligned} \int_U^{[x]} \beta &\stackrel{(\text{def})}{=} \int_V (f \circ x^{-1}) \, d\lambda^m \\ &= \int_V (f \circ y^{-1}) \circ \varphi \, d\lambda^m \\ &\stackrel{\text{Trafo}}{=} \int_Z (f \circ y^{-1}) \cdot |\det(\varphi'(\varphi^{-1}(\bullet)))|^{-1} \, d\lambda^m = (*). \end{aligned}$$

Für $x_0 := x(p_0)$ und $y_0 := y(p_0)$ schreibe die Jacobi-Matrix $\varphi'(x_0) = (a_i^j(x_0))_{ij}$. Dann gilt $\varphi^j = y^j \circ x^{-1}$ und $d_{p_0} y^j = a_i^j(x_0) d_{p_0} x^i$, also

$$dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m = \det(a_i^j) \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$$

und somit $f = \tilde{f} \det(a_i^j)$.

Erhalte: $(*) = \int_Z (\tilde{f} \circ y^{-1}) \, d\lambda^m$. Dies ergibt insgesamt $\int_W^x \beta = \int_W^y \beta$.

„Orientierungsumkehrend“: Die Argumente sind identisch im Fall, dass x und y orientierungsumkehrend sind. Im Fall, dass x und y orientierungserhaltend sind, ist $\det(a_i^j) = \det(\varphi') > 0$. Ist eine der Karten orientierungserhaltend und die andere orientierungsumkehrend, so ist $\det(\varphi') < 0$. Das dadurch entstehende Vorzeichen verschwindet im Ergebnis auf Grund der Vorzeichenwahl in Definition 3.7.12. ■

14.7.

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 14.07.

Definition 3.7.14. Sei M eine m -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit (mit Rand), $\beta \in \Omega^m(M)$ mit $\text{supp}(\beta)$ kompakt.²²

Sei $\mathcal{A} = \{x_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ein Atlas von M . Bestimme eine Partition der Eins $(\eta_\alpha)_\alpha$ mit $\text{supp}(\eta_\alpha) \subset U_\alpha$.

²²Analog zur Analysis III und zum ersten Teil dieser Vorlesung könnte man auch geeignete Funktionen ohne kompakten Träger zu lassen. Um das aktuelle Kapitel aber einfach zu halten, betrachten wir nur den Spezialfall von Funktionen mit kompaktem Träger.

Setze $\hat{A} := \{\alpha \in A \mid \text{supp}(\eta_\alpha) \cap \text{supp}(\beta) \neq \emptyset\}$. Nach dem folgenden Lemma ist diese Menge endlich.

Definiere nun

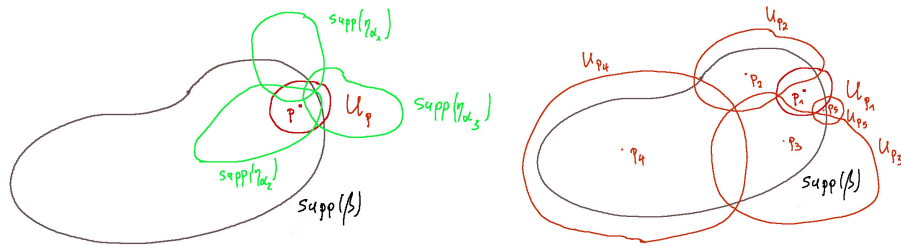
$$\int_M \beta := \sum_{\alpha \in \hat{A}} \int_{U_\alpha}^{[x_\alpha]} (\eta_\alpha \beta) \in \mathbb{R}$$

Beachte: $\text{supp}(\eta_\alpha \beta) \subset \text{supp}(\eta_\alpha) \cap \text{supp}(\beta) \subset U_\alpha$.

Bemerkung 3.7.15. Aus Lemma 3.7.13 folgt, dass die Definition von $\int_M \beta$ unabhängig von der Wahl des Atlanten und der Partition der Eins ist.

Lemma 3.7.16. Sei M eine Mannigfaltigkeit und $\beta \in \Omega^m(M)$ mit $\text{supp} \beta$ kompakt. Sei weiter $(\eta_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Partition der Eins. Dann ist die Menge $\{\alpha \in A \mid \text{supp}(\eta_\alpha) \cap \text{supp}(\beta) \neq \emptyset\}$ endlich.

Beweis: Dies folgt aus der Kompaktheit von $\text{supp}(\beta)$ und der lokalen Endlichkeit der Partition der Eins, denn zu $p \in \text{supp}(\beta)$ wähle eine offene Umgebung U_p , die nur von endlich vielen $\text{supp}(\eta_\alpha)$ getroffen wird (lokale Endlichkeit). Dann gilt $\text{supp}(\beta) \subset \bigcup_{p \in \text{supp}(\beta)} U_p$. Nutze die Kompaktheit um eine endliche Teilüberdeckung zu wählen und die Behauptung folgt. ■



Bemerkungen 3.7.17. (i) Ist g eine riemannsche Metrik auf M^m (kurz: (M, g) ist eine **riemannsche Mannigfaltigkeit**), dann kann man wie in Kapitel 1 definieren, wann eine Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ messbar bzw. integrierbar sind. Mit dem Integral von Kapitel 1 kann Funktionen integrieren. Ist zum Beispiel der Träger von f in einer Karte $x : U \rightarrow V$, so bekommen wir in Verallgemeinerung von der definierenden Gleichung (1.6)

$$\int_M f \, d\mu^M := \int_V (f \circ x^{-1}) \sqrt{\det(g_{ij})} \, d\lambda^m.$$

Das Integral hängt von der riemannschen Metrik ab, benötigt aber keine Orientierung (und ist deswegen auch für nicht-orientierbare Mannigfaltigkeiten definierbar) und hängt — falls M orientierbar ist — auch nicht von der Orientierung ab. Der Beweis ergibt sich durch Nachrechnen in Karten mit denselben Rechnungen wie in Kapitel 1.

(ii) Insbesondere: Sei $M^m \subset \mathbb{R}^n$ eine orientierte Untermannigfaltigkeit mit 1. Fundamentalform g . Diese ist eine riemannsche Metrik (vgl. Beispiel 2.6.8).

Sei $\text{dvol}^g \in \Omega^m(M)$ wie in Beispiel 3.7.6. Dann schreibe $\beta \in \Omega^m(M)$ als $\beta = f \, \text{dvol}^g$. Wir erhalten

$$\int_M f \, \text{dvol}^g = \int_M \beta = \int_M f \, d\mu^M.$$

Der Beweis ergibt sich wiederum durch Nachrechnen in Karten unter Verwendung von (3.7.1) bzw. (3.7.2).

(iii) Ist M eine m -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit. Dann liefert Definition 3.7.14 ein Integral von m -Formen, das von der Orientierung aber nicht von der Wahl der riemannschen Metrik abhängt.

Ist M orientiert und g eine riemannsche Metrik, dann gilt $\int_M f \, \text{dvol}^g = \int_M f \, \text{d}\mu^g$. Je nach Anwendung ist der eine oder andere Integral-Begriff praktischer.

(iv) Ist $f: M^m \rightarrow N^m$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus und $\beta \in \Omega^m(N)$, dann gilt $\int_M f^* \beta = \int_N \beta$.

3.8 Satz von Stokes

3.8.1 Satz von Stokes für Differentialformen

In diesem Abschnitt wollen wir den Satz von Stokes für Differentialformen kennenlernen. Aus dieser Version folgen dann alle weiteren Formulierungen und Anwendungen, insbesondere die klassischen Integralsätze wie der Divergenzsatz und der klassische Satz von Stokes.

Notation 3.8.1. Im folgenden Abschnitt sei M eine m -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M . Sei $\iota: \partial M \rightarrow M$ die Inklusion. Für eine Form $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$ mit $\text{supp}(\omega) \cap \partial M$ kompakt²³ schreiben wir $\int_{\partial M} \omega := \int_{\partial M} \iota^* \omega$.

Satz 3.8.2 (Stokes). *Sei M^m eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand und $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$ mit kompaktem Träger. Dann gilt*

$$\int_M \text{d}\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Beweis: „1. Fall“: Sei $x: U \rightarrow V$ eine orientierungserhaltende Karte von M und sei $\text{supp}(\omega) \subset U$. Da $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\Big|_p\right)$ eine positiv orientierte Basis von $T_p M$ ist, ist

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, +\frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_p, +\dots, +\frac{\partial}{\partial x^m}\Big|_p\right)$$

eine negativ orientierte Basis. Da zudem $-\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p$ auf ∂M nach außen gerichtet ist, ist $\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\Big|_p\right)$ also eine negativ orientierte Basis von $T_p(\partial M)$.

Die zugehörige Karte des Randes $(x^2, \dots, x^m): U \cap \partial M \rightarrow V \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \subset \mathbb{R}^{m-1}$ ist also orientierungsumkehrend.

Schreibe in der Kartenumgebung U

$$\omega = \sum_{k=1}^m f_k \, \text{d}x^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\text{d}x^k} \wedge \dots \wedge \text{d}x^m.$$

Dabei bedeutet $\widehat{\text{d}x^k}$, dass $\text{d}x^k$ weggelassen wird.

²³Es gilt $\text{supp}(\omega) \cap \partial M = \text{supp}(\iota^* \omega)$ und die Kompaktheit dieser Menge nutzen wir, damit das Integral existiert.

Rechne nun

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial x^j} \overbrace{dx^j \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \dots \wedge dx^m}^{=0 \text{ für } j \neq k} \\ &= \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \frac{\partial f_k}{\partial x^k} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m. \end{aligned}$$

Es gilt $\text{supp}(\omega) = \bigcup_{k=1}^m \text{supp}(f_k)$. Definiere nun:

$$\tilde{f}_k(\tilde{x}) := \begin{cases} f_k \circ x^{-1}(\tilde{x}) & , \tilde{x} \in V \\ 0 & , \tilde{x} \in ([0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}) \setminus V. \end{cases}$$

Die Funktion $\tilde{f}_k : [0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$ hat kompakten Träger. Die Funktion $\tilde{f}_k$ ist also eine Koordinatendarstellung von f_k in der Karte x , die wir dann geeignet durch 0 fortsetzen.

Wir rechnen nun für die linke Seite der Aussage des Satzes von Stokes:²⁴

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &\stackrel{(\text{def})}{=} \int_{[0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial x^k} d\lambda^m \\ &= \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \int_{[0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}} \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial x^k} d\lambda^m \\ &\stackrel{(?)}{=} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \int_{[0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}} \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial x^k} dx^1 \dots dx^m =: (*) \end{aligned}$$

An der Stelle (?) ist fraglich, was hier eigentlich umgeformt wird: wir ersetzen nur die Notation $d\lambda^m$ für die Integration bezüglich des Lebesgue-Maßes durch die inhaltlich äquivalent Notation $dx^1 \dots dx^m$. Dieser Ausdruck ist eigentlich als $dx^1 dx^2 \dots dx^m$ zu verstehen, was oft für das m -dimensionale Lebesgue-Maß benutzt wird, um schon in der Notation anzudeuten, dass man derartige Integrale oft durch den Satz von Fubini berechnet.²⁵

Für die rechte Seite der Aussage des Satzes von Stokes rechnen wir

$$\iota^* \omega = \sum_{k=1}^m f_k \Big|_{\partial M} \iota^* dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\iota^* dx^k} \wedge \dots \wedge \iota^* dx^m.$$

²⁴ Alle Integrale existieren (z. B. im riemannschen Sinn), da wir stetige Funktionen über kompakte Intervalle integrieren. Man benötigt nicht einmal uneigentliche Riemann-Integrale, es reicht über ein ausreichend großes kompaktes Intervall im eigentlichen riemannschen Sinn zu integrieren.

²⁵ Unsere kurze Notation riskiert, dass man $dx^1 \dots dx^m$ als $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ missversteht. Dieses Missverständnis ist aber kein Problem. Mit der Standard-Orientierung von $[0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}$ folgt nämlich aus Definitionen 3.7.12 und 3.7.14 für $h \in \mathcal{C}^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1})$ mit kompaktem Träger

$$\int_{[0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}} h dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m = \int_{[0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}} h dx^1 dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m,$$

das heißt die Notation unterscheidet hier nicht zwischen Integralen, die zwar verschieden definiert sind, aber letztendlich den gleichen Wert ergeben.

Wegen²⁶

$$\iota^* \textcolor{red}{dx}^\ell = d \underbrace{\left(\textcolor{red}{x}^\ell \right)_{\substack{\partial M \\ x^\ell :=}}} = \begin{cases} 0 & , \ell = 1 \\ \textcolor{blue}{dx}^\ell & , \ell \neq 1 \end{cases}$$

gilt also

$$\iota^* \omega = f_1|_{\partial M} \textcolor{blue}{dx}^2 \wedge \dots \wedge \textcolor{blue}{dx}^m.$$

Da die Karte $\tilde{x} := (x^2, \dots, x^m): U \cap \partial M \longrightarrow V \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1})$ orientierungsumkehrend ist, folgt

$$\int_{\partial M} \iota^* \omega = - \int_{V \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1})} (f_1 \circ \tilde{x}^{-1}) d\lambda^{m-1} = - \int_{\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}} \tilde{f}_1 dx^2 \dots dx^m =: (\dagger)$$

Es ist nun zu zeigen, dass $(*) = (\dagger)$.

Für den Term mit $k = 1$ von $(*)$ gilt

$$\begin{aligned} & (-1)^{k-1} \int_{[0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}} \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial x^k} dx^1 \dots dx^m \\ \stackrel{\text{Fubini}}{=} & \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \left(\int_0^\infty \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x^1} dx^1 \right) dx^2 \dots dx^m \\ = & \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \left(-\tilde{f}_1(0, x^2, \dots, x^m) + 0 \right) dx^2 \dots dx^m = (\dagger) \end{aligned}$$

Für den Term mit $k \neq 1$ von $(*)$ gilt

$$\begin{aligned} & (-1)^{k-1} \int_{[0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}} \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial x^k} dx^1 \dots dx^m \\ = & (-1)^{k-1} \int_{[0, \infty) \times \mathbb{R}^{k-2} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{m-k}} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial x^k}(x^1, \dots, x^m) dx^k \right)}_{=0} dx^1 \dots \widehat{dx^k} \dots dx^m = 0. \end{aligned}$$

Summieren über alle k liefert also $(*) = (\dagger)$.

„2. Fall“: Der Fall einer orientierungsumkehrenden Karte ist analog mit einem zusätzlichen Vorzeichen auf beiden Seiten.

„3. Fall (allgemeiner Fall)“: Wir betrachten nun ein allgemeines $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$ mit $\text{supp}(\omega)$ kompakt. Wähle eine Partition der Eins $(\eta_\alpha)_\alpha$ wobei $\text{supp}(\eta_\alpha) \subset U_\alpha$. Dann gilt nach den ersten beiden Fällen

$$\int_M d(\eta_\alpha \omega) = \int_{\partial M} \eta_\alpha \omega.$$

Also folgt der gesamte Beweis, denn

$$\int_M d\omega = \int_M \sum_{\alpha \in A} d(\eta_\alpha \omega) = \sum_{\alpha \in A} \int_M d(\eta_\alpha \omega)$$

²⁶Im folgenden bezeichnet – ähnlich wie im Beweis von Satz 3.6.3 – $\textcolor{red}{dx}^\ell$ das ℓ -te Koordinatenkovektorfeld auf $[0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}$, während $\textcolor{blue}{dx}^\ell$ für das – normalerweise gleich bezeichnete – Koordinatenkovektorfeld auf $s\mathbb{R}^{m-1}$ steht.

$$= \sum_{\alpha \in A} \int_{\partial M} \eta_{\alpha} \omega = \int_{\partial M} \underbrace{\left(\sum_{\alpha \in A} \eta_{\alpha} \right)}_{=1} \omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Wir haben hier insbesondere wieder Lemma 3.7.16 benutzt, um zu argumentieren, dass alle Summen nur endlich viele von Null verschiedene Summanden haben. ■

Beispiel 3.8.3. Sei $M = [0, 1] \ni t$. Dann²⁷ gilt $\int_{[0,1]} df = \int_{[0,1]} f' dt = \int_0^1 f'(t) dt$ für $f \in \mathcal{C}^{\infty}([0, 1])$.

Der Satz von Stokes liefert dann

$$\int_0^1 f'(t) dt = \int_{[0,1]} df = \int_{\partial[0,1]} f = f(1) - f(0).$$

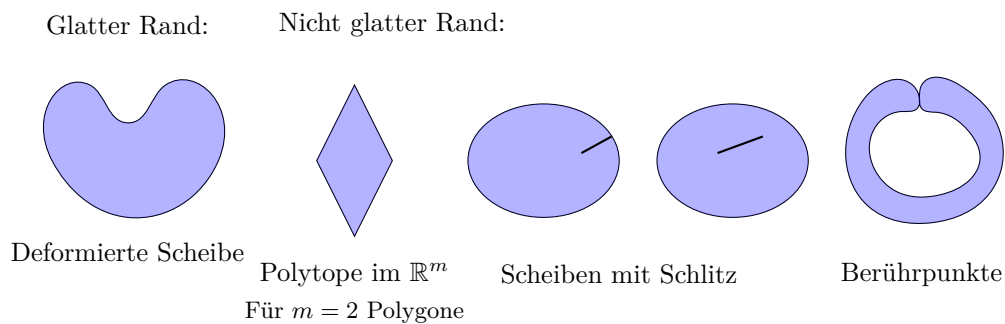
Also verallgemeinert der Satz von Stokes den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für glatte Funktionen.

Notation. Schreibe $\partial^{\text{top}} A$ für den Rand von A im Sinne von topologischen Räumen und $\partial^{\text{Mfg}} A$ für den Rand der Mannigfaltigkeit mit Rand A im Sinne der Mannigfaltigkeiten.

Definition 3.8.4. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^m$ hat einen **glatten Rand**, wenn $\partial^{\text{top}} G$ eine glatte Hyperfläche in $\mathbb{R}^m$ ist und $\partial^{\text{top}} G = \partial^{\text{top}}(\mathbb{R}^m \setminus \overline{G})$ gilt.

Beispiel 3.8.5. Ist G ein Gebiet mit glattem Rand, so ist $\overline{G}$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial^{\text{top}} G = \partial^{\text{Mfg}} G$. Hierfür gilt also der Satz von Stokes.

Betrachte folgende Gebiete:



Bemerkung 3.8.6. Der Satz von Stokes gilt auch für Gebiete G in $\mathbb{R}^m$, deren Rand nicht überall glatt ist. Er gilt insbesondere in geeigneten Erweiterungen für alle oben gezeichneten Gebiete. Um $\int_{\partial G} \omega$ zu definieren, integriert man hierbei stückweise über die glatten Stücke des Randes.

Mit dem folgenden Argument sieht man zum Beispiel, dass er sich auf Polygone (oder allgemeiner Mannigfaltigkeiten mit stückweise glattem Rand) ausdehnt:

Man rundet die „Ecken“ (also die nicht-glatten Teile des Randes) ab und betrachtet dann den Grenzwert, dass die Abrundungen immer kleiner werden.

Beide Seiten konvergieren dann in vielen Fällen gegen das Integral des Gebiets mit nicht-glatter

²⁷Wenn man hier genau liest, so bekommt man: Aus der bei uns verwendeten Notation heraus ist klar, dass $\int_{[0,1]} f' dt$ das Integral einer 1-Form ist. Es ist dann gleich dem riemannschen Integral $\int_0^1 f'(t) dt$. Bei anderen Notation könnte man $\int_{[0,1]} f' dt$ auch als Lebesgue-Integral lesen. Aber unabhängig davon, welche Definitionsvariante wir für den Ausdruck hernehmen, wir erhalten immer dieselbe reelle Zahl.

Rand.

Dies funktioniert natürlich nur dann, wenn der Rand nicht allzu irregulär ist.

Beispiel. Betrachte ein Rechteck $M := [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ mit $\partial M = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4$. Dann gilt

$$\int_{\partial M} \beta = \sum_{i=1}^4 \int_{I_i} \beta$$

Hier gilt der Satz von Stokes.

Was ist hier die Aussage des Satzes von Stokes? Um $\int_{\partial M} \omega$ zu definieren, integriert man hierbei nur über die glatten Teile des Randes.

$[a, b] \times [c, d] \in (t, s)$ sei mit der Orientierung versehen, so dass $(\partial/\partial t, \partial/\partial s)$ positiv orientiert ist. Die Orientierung des Randes wird wie folgt beschrieben: $\partial/\partial t$ ist auf $[a, b] \times \{c\}$ positiv orientiert und auf $[a, b] \times \{d\}$ negativ orientiert. Analog ist $\partial/\partial s$ auf $\{b\} \times [c, d]$ positiv orientiert und auf $\{a\} \times [c, d]$ negativ orientiert.

Der Satz von Stokes auf $[a, b] \times [c, d]$ besagt damit für $\omega \in \Omega^1([a, b] \times [c, d])$:

$$\begin{aligned} \int_{[a,b] \times [c,d]} d\omega &= \int_a^b \omega_{(t,c)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(t,c)} \right) dt + \int_c^d \omega_{(b,s)} \left(\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{(b,s)} \right) ds \\ &\quad - \int_a^b \omega_{(t,d)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(t,d)} \right) dt - \int_c^d \omega_{(a,s)} \left(\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{(a,s)} \right) ds. \end{aligned}$$

Beweis: [Skizze] Approximiere das Rechteck durch ein Gebiet G_ε bei dem die Ecken abgerundet sind und damit der Rand glatt ist. Für G_ε gilt der Satz von Stokes, also

$$\begin{array}{ccc} \int_{G_\varepsilon} d\beta & \xlongequal{\quad} & \int_{\partial G_\varepsilon} \beta \\ \varepsilon \rightarrow 0 \downarrow & & \downarrow \\ \int_M d\beta & \cdots \cdots \cdots & \int_{\partial M} \beta. \end{array}$$

■

Mit dieser Methode kann man Satz von Stokes zum Beispiel in den folgenden Fällen zeigen:

- für alle Polytope,
- alle in Beispiel 3.8.5 gezeichneten Gebiete,
- also insbesondere für Rechtecke ($m = 2$),
- oder allgemeiner m -dimensionale Quader,
- für Dreiecke ($m = 2$),
- oder allgemeiner Simplexe, für Pyramiden und viele mehr.

3.8.2 Divergenzsatz von Gauß

Wiederholung:

Eine **riemannsche Mannigfaltigkeit**, siehe Definition 2.6.7, ist ein Paar (M, g) , wobei g eine riemannsche Metrik auf M ist. Schreibe oft M für (M, g) .

Ist eine riemannsche Mannigfaltigkeit M^m orientiert, so definiere $\text{dvol}^g \in \Omega^m(M)$ wie in Unterabschnitt 3.7.2.

Definition 3.8.7. Sei M eine orientierte m -dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit. Zu $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $\omega \in \Omega^k(M)$ definiere

$$X \lrcorner \omega := \omega(X, \bullet, \dots, \bullet) \in \Omega^{k-1}(M).$$

Dann ist $\text{div}(X) \in C^\infty(M)$ die eindeutige Funktion auf M so dass

$$d(X \lrcorner \text{dvol}^g) = \text{div}(X) \text{dvol}^g \quad (*)$$

Wir nennen $\text{div}(X)$ die **Divergenz** von X .

Bemerkung. Es ist $\text{div}: \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ ein lokaler Operator. Das heißt aus $X|_U = \tilde{X}|_U$ folgt $\text{div}(X)|_U = \text{div}(\tilde{X})|_U$ für $U \subseteq M$.

Außerdem ist $\text{div}(X)$ unabhängig von der Wahl der Orientierung auf M . Deswegen ist $\text{div}(X)$ auch auf nicht-orientierbaren Mannigfaltigkeiten wohldefiniert (lokal in Karten durch $(*)$).

Beispiel 3.8.8. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$ versehen mit der euklidischen riemannschen Metrik g^{eucl} , d. h. $g^{\text{eucl}}(X, Y) = \langle X, Y \rangle = \sum_{j=1}^m X^j Y^j$ und der üblichen Orientierung. Sei $Y = (Y^1, \dots, Y^m) \in \mathfrak{X}(U)$. Dann gilt

$$Y \lrcorner \text{dvol}^g = Y \lrcorner (\text{d}x^1 \wedge \dots \wedge \text{d}x^m) = \sum_{k=1}^m Y^k (-1)^{k-1} \text{d}x^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\text{d}x^k} \wedge \dots \wedge \text{d}x^m$$

und damit

$$\begin{aligned} d(Y \lrcorner \text{dvol}^g) &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial Y^k}{\partial x^j} (-1)^{k-1} \text{d}x^j \wedge \text{d}x^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\text{d}x^k} \wedge \dots \wedge \text{d}x^m \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial Y^k}{\partial x^k} \underbrace{\text{d}x^1 \wedge \dots \wedge \text{d}x^m}_{=\text{dvol}^g}. \end{aligned}$$

Das heißt es gilt $\text{div}(Y) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial Y^k}{\partial x^k}$. Vergleiche [Übungsblatt 12, Aufgabe 4](#).

Definition 3.8.9. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand. Die eindeutig bestimmte Abbildung $\nu: \partial M \rightarrow TM$ mit

- (i) $\nu_p \in T_p M \setminus T_p \partial M$ ist nach außen gerichtet für alle $p \in \partial M$.
- (ii) $g_p(\nu_p, X) = 0$ für alle $X \in T_p \partial M$ und alle $p \in \partial M$.
- (iii) $g_p(\nu_p, \nu_p) = 1$ für alle $p \in \partial M$.

heißt **äußeres Einheitsnormalenfeld** von M .

Bemerkungen 3.8.10. Sei $\iota: \partial M \hookrightarrow M$ und ν ein äußeres Einheitsnormalenfeld.

- (i) Sei $E_1, \dots, E_{m-1}$ eine positive orientierte Orthonormalbasis von $T_p(\partial M)$ für $p \in \partial M$. Also ist $\nu|_p, E_1, \dots, E_{m-1}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $T_p M$, und es²⁸ gilt $E_j^* = E_j^\flat$. Dann gilt

$$\mathrm{dvol}_M^g|_p = \nu^\flat|_p \wedge E_1^\flat \wedge \dots \wedge E_{m-1}^\flat = \nu^\flat|_p \wedge \mathrm{dvol}_{\partial M}^g|_p.$$

Somit $\mathrm{dvol}_M^g = \nu^\flat \wedge \mathrm{dvol}_{\partial M}^g$.

- (ii) Für $X \in T_p M$ und $p \in \partial M$ zeigt man mit einer ganz ähnlichen Rechnung²⁹ wie im Eindeutigkeitsbeweis von Lemma 3.6.1:

$$\begin{aligned} X \lrcorner \mathrm{dvol}_M^g &= X \lrcorner (\nu^\flat \wedge \mathrm{dvol}_{\partial M}^g) \\ &\stackrel{\text{TB13/1}}{=} (X \lrcorner \nu^\flat) \wedge \mathrm{dvol}_{\partial M}^g - \nu^\flat \wedge (X \lrcorner \mathrm{dvol}_{\partial M}^g) \\ &= \langle X, \nu \rangle \mathrm{dvol}_{\partial M}^g - \nu^\flat \wedge (X \lrcorner \mathrm{dvol}_{\partial M}^g) \end{aligned}$$

Da $\nu|_p$ auf $T_p(\partial M)$ senkrecht steht, verschwindet $\nu^\flat|_p$ auf $T_p(\partial M)$ und dies impliziert $\iota^*(\nu^\flat) = 0$. Es folgt

$$\begin{aligned} \iota^*(X \lrcorner \mathrm{dvol}_M^g) &= \iota^* \left(\langle X, \nu \rangle \mathrm{dvol}_{\partial M}^g - \underbrace{\nu^\flat \wedge (X \lrcorner \mathrm{dvol}_{\partial M}^g)}_{=0} \right) \\ &= \langle X, \nu \rangle \mathrm{dvol}_{\partial M}^g - \underbrace{\iota^*(\nu^\flat)}_{=0} \wedge \iota^*(X \lrcorner \mathrm{dvol}_{\partial M}^g) \\ &= \langle X, \nu \rangle \mathrm{dvol}_{\partial M}^g. \end{aligned}$$

Satz 3.8.11 (Divergenzsatz oder Satz von Gauß). *Sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand, $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit $\mathrm{supp}(X)$ kompakt. Außerdem sei ν das äußere Einheitsnormalenfeld von ∂M . Dann gilt*

$$\int_M \mathrm{div}(X) \, \mathrm{d}\mu^M = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle \, \mathrm{d}\mu^{\partial M}. \quad (3.8.1)$$

Für eine orientierte Mannigfaltigkeit M gilt die hierzu äquivalente Gleichung

$$\int_M \mathrm{div}(X) \, \mathrm{dvol}_M^g = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle \, \mathrm{dvol}_{\partial M}^g. \quad (3.8.2)$$

Beweis: „1. Fall: M orientiert“: Rechne

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle \, \mathrm{d}\mu^{\partial M} &= \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle \, \mathrm{dvol}_{\partial M}^g = \int_{\partial M} \iota^*(X \lrcorner \mathrm{dvol}_M^g) \\ &\stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_M \mathrm{d}(X \lrcorner \mathrm{dvol}_M^g) \stackrel{(*)}{=} \int_M \mathrm{div}(X) \, \mathrm{dvol}_M^g = \int_M \mathrm{div}(X) \, \mathrm{d}\mu^M. \end{aligned}$$

Wir erhalten (3.8.2) und (3.8.1) für orientierte Mannigfaltigkeiten.

„2. Fall“: Es gebe eine Karte $x : U \rightarrow V$ mit $\mathrm{supp}(X) \subset U$. Die Standard-Orientierung von $\mathbb{R}^m$ induziert eine Orientierung auf $V \subseteq \mathbb{R}^m$. Man sieht mit [Übungsblatt 14, Aufgabe 4 b\)](#), dass

²⁸Achtung: an dieser Stelle sollte man $E_j^\flat$ als Element in $(T_p M)^* = \mathrm{Hom}(T_p M, \mathbb{R})$ verstehen, und dies kann man dann zu einem Element in $(T_p(\partial M))^* = \mathrm{Hom}(\partial T_p M, \mathbb{R})$ einschränken. Ähnliches gilt für $\mathrm{dvol}_{\partial M}^g$: wir setzen es so zu einer auf $T_p M$ definierten alternierenden Abbildung fort, dass $\nu \lrcorner \mathrm{dvol}_{\partial M}^g = 0$ gilt.

²⁹Man kann noch allgemeiner zeigen: für $X \in T_p M$, $\alpha \in \bigwedge^k T_p^* M$, $\beta \in \bigwedge^\ell T_p^* M$ gilt $X \lrcorner (\alpha \wedge \beta) = (X \lrcorner \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (X \lrcorner \beta)$

dann U eine Orientierung besitzt, so dass x orientierungserhaltend ist.³⁰ Aus dem ersten Fall folgt dann

$$\int_M \operatorname{div}(X) \, d\mu^M = \int_U \operatorname{div}(X) \, d\mu^U = \int_{\partial U} \langle X, \nu \rangle \, d\mu^{\partial U} = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle \, d\mu^{\partial M}.$$

Man beachte: Der Rand ∂U ist hier im Sinne des Randes einer Mannigfaltigkeit zu verstehen, also $\partial U = U \cap \partial M$. Es ist im allgemeinen **nicht** der topologische Rand von U als Teilmenge des topologischen Raums M .

„Allgemeiner Fall“: Mit Hilfe einer Partition der Eins (genauso wie im Beweis des Satzes 3.8.2 von Stokes) erhalte die Aussage für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit kompaktem Träger. Wir erhalten (3.8.1) im allgemeinen. Genauer: wir wählen einen Atlas, dessen Karten auf Mengen $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ definiert seien. Hierzu wählen wir eine Partition der Eins $(\eta_\alpha)_{\alpha \in A}$. Wir bekommen $X = \sum_{\alpha \in A} (\eta_\alpha X)$. Diese Summe ist formal gesehen unendlich, aber nur endlich viele sind von Null verschieden, siehe wiederum Lemma 3.7.16, die Summation ist also wohl definiert und vertauscht mit Integration und ähnlichem. Nun wissen wir aus dem 2. Fall:

$$\int_M \operatorname{div}(\eta_\alpha X) \, d\mu^M = \int_{\partial M} \langle \eta_\alpha X, \nu \rangle \, d\mu^{\partial M}.$$

Durch Summation über alle α folgt dann die Aussage. ■

3.8.3 Klassische Satz von Stokes

Notation:

Der Pfeil $\hookrightarrow$ bezeichnet im folgenden immer eine Inklusion.

Sei $i : M^2$ eine orientierte Fläche³¹ mit Rand ∂M in $\mathbb{R}^3$; und sei $i : M^2 \hookrightarrow W \subseteq \mathbb{R}^3$ die zugehörige Inklusion, wobei W eine offene Menge in $\mathbb{R}^3$ ist, die M enthält. Sei $Y \in \mathfrak{X}(W)$ mit $\operatorname{supp}(Y) \cap M$ kompakt³². Definiere $\beta_p := \langle Y_p, \bullet \rangle \in T_p^*M = \bigwedge^1 T_p^*M$. Dann gilt $\beta = \flat \circ Y = \Phi_1(Y) \in \Omega^1(M)$ (vgl. Übungsblatt 12, Aufgabe 4). Der Satz 3.8.2 von Stokes ergibt dann

$$\int_{\partial M} \beta = \int_M d\beta.$$

Wir benutzen hier und im folgenden wieder oft die Konvention, dass wir Formen über Untermannigfaltigkeiten (mit Rand) integrieren, in dem wir sie zunächst mit der Inklusion zurückziehen und dann integrieren. Zur Verdeutlichung der Bedeutung wollen wir dies aber nochmals ohne diese Konvention formulieren. Wir definieren dazu $\hat{\beta}|_p := \langle Y_p, \bullet \rangle \in T_p^*\mathbb{R}^3$, also $\beta = i^*\hat{\beta}$. Sei $j : \partial M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ (und $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$). Dann gilt

$$\int_{\partial M} j^*\hat{\beta} = \int_M i^*d\hat{\beta}.$$

Es ist ∂M eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit, also eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit³³.

³⁰Wichtig ist hier eigentlich nur: U ist orientierbar.

³¹Man denke hier zunächst mal an den Fall, dass M kompakt, zusammenhängend mit nicht-leerem oder leerem Rand ist und dass $W = \mathbb{R}^3$.

³²Achtung: diese Bedingung ist im allgemeinen weder stärker noch schwächer als die Bedingung „ $\operatorname{supp}(Y)$ kompakt“, dies sind unabhängig voneinander.

³³sogar eine mit abzählbarer Basis der Topologie – aber dies wird hier gar nicht benötigt.

Zerlege ∂M in Zusammenhangskomponenten N_α mit $\partial M = \bigcup_{\alpha \in A} N_\alpha$. Man kann zeigen:

Klassifikation der 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten

Jede nicht-leere zusammenhängende 1-dimensionale Mannigfaltigkeit ist diffeomorph zu $\mathbb{S}^1$ oder zu $\mathbb{R}$ je nachdem, ob sie kompakt ist oder nicht.

Wähle zu jedem nicht-kompakten N_α eine bijektive Abbildung $\gamma_\alpha: J_\alpha := \mathbb{R} \rightarrow N_\alpha$ mit $\dot{\gamma}_\alpha(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Diese Abbildung ist dann ein Diffeomorphismus und somit eine Parametrisierung von N_α .

Falls N_α kompakt ist, wähle $\gamma_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow N_\alpha$ so, dass $\gamma_\alpha(t + 2\pi) = \gamma_\alpha(t)$ für alle t und so dass $\gamma_\alpha|_{[0, 2\pi)}$ injektiv ist. In diesem Fall ist γ_α ein surjektiver lokaler Diffeomorphismus, und γ_α ergibt lokale Parametrisierungen nach Einschränkung auf Intervalle der Form $(a, a + 2\pi)$. Setze in diesem Fall $J_\alpha := [0, 2\pi]$.

In beiden Fällen kann man γ_α orientierungserhaltend wählen, denn falls γ_α zunächst orientierungsumkehrend ist, ersetze man $\gamma(t)$ durch $\gamma(-t)$.

Wir sehen auch, dass $\dot{\gamma}_\alpha$ das Koordinatenvektorfeld der Parametrisierung γ_α ist.

Da $\text{supp}(\beta) \cap M$ und damit auch $\text{supp}(\beta) \cap \partial M$ kompakt ist, gibt es nur endlich viele $\alpha \in A$ mit $\beta|_{N_\alpha} \neq 0$. Es gilt nun³⁴:

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \beta &= \sum_{\alpha \in A} \int_{N_\alpha} \beta = \sum_{\substack{\alpha \\ N_\alpha \text{ nicht kompakt}}} \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\dot{\gamma}_\alpha(t)) dt + \sum_{\substack{\alpha \\ N_\alpha \text{ kompakt}}} \int_0^{2\pi} \beta(\dot{\gamma}_\alpha(t)) dt \\ &= \sum_{\alpha} \int_{J_\alpha} \langle Y, \dot{\gamma}_\alpha(t) \rangle dt = \sum_{\alpha} \int_{\gamma_\alpha} Y. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\int_{\gamma_\alpha} Y$ das Integral des Vektorfelds Y entlang des Wegs $\gamma_\alpha|_{J_\alpha}$, das wir in [Analysis III](#), Kapitel I, Unterabschnitt 1.2 definiert haben.³⁵ Schreibe $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$. Dann gilt $\beta = \sum_{j=1}^3 Y_j dx^j$ und damit

$$\begin{aligned} d\beta &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial Y_j}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^j \\ &= \sum_{k < j} \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x^k} - \frac{\partial Y_k}{\partial x^j} \right) dx^k \wedge dx^j \\ &= \text{rot}(Y) \lrcorner (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3). \end{aligned}$$

³⁴Hierbei sind alle Summen formal endlich, das heißt nur endlich viele Summanden sind ungleich 0. Ist N_α nicht-kompakt, dann hat $t \mapsto \beta(\dot{\gamma}(t))$ kompakten Träger.

³⁵Man beachte, dass die obige Interpretation für Integration von 1-Formen auf 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten auch allgemeiner gilt. Wir geben eine Verallgemeinerung an, die sich nahezu wie oben zeigen lässt. Ist $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Parametrisierung einer 1-dimensionalen Untermannigfaltigkeit mit Inklusionsabbildung $\iota: \gamma(I) \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ und ist β eine 1-Form, die auf einer Umgebung von $\gamma(I)$ definiert ist, dann gilt

$$\int_{\gamma(I)} \beta \stackrel{(\text{def})}{=} \int_{\gamma(I)} \iota^* \beta \stackrel{\text{Bem. 3.7.17 (iv)}}{=} \int_I \gamma^* \beta = \int_\gamma \beta^\sharp,$$

wobei das letzte Integral wieder im Sinne von [Analysis III](#), Kapitel I, Unterabschnitt 1.2 zu verstehen ist. Dies kann noch weiter verallgemeinert werden, in dem wir z. B. $\mathbb{R}^m$ durch eine riemannsche oder semi-riemannsche Mannigfaltigkeit ersetzen. Die Integration von 1-Formen entspricht hier immer dem Integral von Vektorfeldern entlang von Kurven. Wenn wir nun aber mit 1-Formen und nicht mehr mit Vektorfeldern arbeiten, so hat dies die großen Vorteile, dass sich unser Integral einfacher unter Diffeomorphismen transformiert und dass zusätzliche Struktur (wie riemannsche Metriken, Skalar-Produkte etc.) unsere Betrachtung des Integrals nicht „stören“ und durch „unnötigen“ Ballast komplizierter machen.

Ist ν ein Einheitsnormalenfeld auf M , das die Orientierung von M gemäß Beispiel 3.7.6 (iv) induziert, dann rechnet man nach mit Rechnungen wie in Bemerkungen 3.8.10:

$$i^* \left(X \lrcorner \underbrace{(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)}_{\text{dvol}_{\mathbb{R}^3}^{\text{eucl}}} \right) = \langle X, \nu \rangle \text{dvol}_M^g$$

und deswegen

$$i^* d\beta = \langle \text{rot}(Y), \nu \rangle \text{dvol}_M^g.$$

Also folgt:

$$\sum_{\alpha \in A} \int_{\gamma_\alpha} Y = \int_{\partial M} \beta = \int_M d\beta = \int_M \langle \text{rot}(Y), \nu \rangle \text{dvol}^g.$$

Insbesondere haben wir:

Satz 3.8.12 (Klassischer Satz von Stokes). *Sei M eine orientierte Fläche in $\mathbb{R}^3$ mit Rand $\partial M = \bigcup N_\alpha$, N_α zusammenhängend, mit erster Fundamentalform g . Sei Y ein glattes Vektorfeld, das auf einer offenen Umgebung von M definiert sei, so dass $\text{supp } Y \cap M$ kompakt ist. Dann gilt*

$$\sum_{\alpha \in A} \int_{N_\alpha} Y = \int_M \langle \text{rot}(Y), \nu \rangle \text{dvol}^g.$$

Hierbei ist ν das Einheitsnormalenfeld von M in $\mathbb{R}^3$, das die gegebene Orientierung von M induziert.

3.9 Elektrodynamik in der Sprache der Formen

Sei $M = \mathbb{R}^4$ und $(x^0, \dots, x^3) \in \mathbb{R}^4$.

Definiere den **Hodge-Stern-Operator**³⁶

$$\ast: \bigwedge^2 T_p^* \mathbb{R}^4 \longrightarrow \bigwedge^2 T_p^* \mathbb{R}^4$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} dx^0 \wedge dx^1 &\longmapsto -dx^2 \wedge dx^3 \\ dx^{\sigma(0)} \wedge dx^{\sigma(1)} &\longmapsto \varepsilon_\sigma \text{sgn}(\sigma) dx^{\sigma(2)} \wedge dx^{\sigma(3)} \end{aligned}$$

$$\text{für } \sigma \in \text{Perm}\{0, 1, 2, 3\} \text{ und } \varepsilon_\sigma = \begin{cases} 1 & 0 \notin \{\sigma(0), \sigma(1)\} \\ -1 & 0 \in \{\sigma(0), \sigma(1)\} \end{cases}.$$

Wir wollen nur die Gleichungen im Vakuum betrachten und Materie-Effekte nicht zulassen. Letztere könnte man auch als weitere gekoppelte Teilchen modellieren, aber wir wollen das Modell einfach halten. Wir wählen nun so möglichst viele physikalische Einheiten, so dass sie 1 sind, man nennt diesen Prozess der Festlegung der von uns verwendeten Einheiten eine **Eichung**. Man

³⁶Wie der Name schon andeutet, handelt es sich bei dem Hodge-Stern wiederum um ein Stern-Symbol $\ast$, das weder mit dem Dualitätsstern $\ast$, noch mit dem Graduierungstern $\star$ verwechselt werden sollte. Wir wählen deswegen pbige Notation, die sich wiederum in Details und der Farbe abhebt. Dieser Unterschied ist in der Literatur allerdings unüblich.

kann zum Beispiel erreichen, dass die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ ist³⁷, die in der Elektrodynamik üblichen Größen ε_0 und μ_0 seien 1 etc. Man kann hier nicht beliebig weit fortfahren: wenn wir das Plancksche Wirkungsquantum $\hbar$ auch als 1 festlegen, so ist die Elektronenladung e eine reelle Zahl, gemessen als $0,085424\dots$, kann also nicht mehr durch geschickte weitere Wahlen zu 1 normiert werden³⁸.

Maxwell-Gleichungen (Physik)³⁹.

Die Daten seien:

- Ein elektrisches Feld $E: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(t, x) \mapsto E(t, x)$.
- Ein magnetisches Feld $B: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(t, x) \mapsto B(t, x)$.
- Die (elektrische) Ladungsdichte $\rho: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.
- Die elektrische Stromdichte $J: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Dann gelten, siehe z. B. [die mikroskopischen Maxwell-Gleichungen auf Wikipedia](#):

- $\operatorname{div}^{\mathbb{R}^3} E = \rho$. Das **Gaußsche Gesetz**. Elektrische Ladungsdichte bildet Quellen und Senken für das elektrische Feld.
- $\operatorname{div}^{\mathbb{R}^3} (B) = 0$. Das **Gaußsche Gesetz für Magnetfelder**. So ähnlich, aber da es keine magnetischen Monopole gibt, ist die zugehörige Ladungsdichte Null.
- $\operatorname{rot}(E) = -\frac{\partial B}{\partial t}$. Das **Faraday-Gesetz** oder **Induktionsgesetz**. Eine zeitliche Änderung des magnetischen Strom induziert ein elektrisches Feld.
- $\operatorname{rot}(B) = J + \frac{\partial E}{\partial t}$. Das **Ampère-Maxwell-Gesetz**, auch **Erweitertes Durchflutungsgesetz** genannt. Elektrische Ströme und zeitliche Änderungen des elektrischen Felds induzieren ein magnetisches Feld, das um den Strom bzw. die Feldänderungslinien herumwirbelt.

Fasse dies zusammen. Dazu zunächst

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \oplus & \mathbb{R}^3 & =: & \mathbb{R}^4 \\ \text{Zeit} & & \text{Raum} & & \text{Raumzeit.} \end{array}$$

Definiere auf der Raumzeit $\mathbb{R}^4$ das **Minkowski-Skalarprodukt** durch

$$\left\langle \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} \right\rangle := -x^0 y^0 + x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3.$$

Ein Punktteilchen $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^4$ $\tau \mapsto \gamma(\tau)$ bewegt sich genau dann mit Lichtgeschwindigkeit, wenn $\langle \dot{\gamma}(\tau), \dot{\gamma}(\tau) \rangle = 0$. Weiter bewegt es sich unterhalb der Lichtgeschwindigkeit, wenn $\langle \dot{\gamma}(\tau), \dot{\gamma}(\tau) \rangle < 0$.

Ein Punkt $(x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4$ beschreibt einen Ort $(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ zum Zeitpunkt $t = x^0$ aus

³⁷hierzu muss man einfach Längen zum Beispiel in Sekunden messen, also in der Zeit, die das Licht braucht, diese Länge zu durchlaufen. Das gibt dann zwar sehr kleine Zahlen, das stört uns aber nicht.

³⁸Man nennt dann $e^{-2} = 137,035\dots$ die Feinstrukturkonstante, deren Wert (noch) nicht theoretisch erklärt werden kann.

³⁹Diese Gesetze sind experimentell zu bestimmen

Sichtweise eines externen ruhenden Betrachters, der unseren Raum in kartesischen Koordinaten betrachtet.⁴⁰ Definiere

$$(F_{\mu\nu})_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F := \sum_{0 \leq \mu < \nu \leq 3} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu.$$

In anderen Worten:

$$F = E^b \wedge dt + \ast(B^b \wedge dt)$$

Die Interpretation hiervon: sowohl das magnetische, als auch das elektrische Feld werden als 2-Form interpretiert. Das Feld E besteht genau aus den Termen in F mit einem dt -Anteil, das B -Feld aus denen ohne dt -Anteil.

Dann rechne

$$dF = \operatorname{div}^{\mathbb{R}^3} B dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \operatorname{rot}(E) \right) \lrcorner dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Dann verschwindet dF genau dann, wenn $\operatorname{div}^{\mathbb{R}^3} B = 0$ und $\frac{\partial B}{\partial t} + \operatorname{rot}(E) = 0$, also wenn (ii) und (iii) erfüllt sind.

Sind alle Felder auf ganz $\mathbb{R}^4$ definiert, so gibt es nach dem Poincaré-Lemma, Korollar 3.6.17, also ein $A \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$ – das **Vierer-Vektorpotential** – so dass $F = dA$. Dieses A ist eindeutig bis auf geschlossene 1-Formen, denn aus $F = dA = d\tilde{A}$ folgt $d(A - \tilde{A}) = 0$. Man sieht also wiederum mit dem Poincaré-Lemma, Korollar 3.6.17, dass $A - \tilde{A}$ exakt ist, also existiert ein $f \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ mit $A - \tilde{A} = df$. Das Abändern von A zu $\tilde{A}$ durch f nennt man in der Physik eine **Eichtransformation**, sie ändert nur die mathematische Beschreibung, aber nicht die physikalische Bedeutung.

Die 1-Form A ist physikalisch zwar nicht vollständig messbar, aber dennoch ist im allgemeinen in der Quantenmechanik *mehr* messbar als nur die 2-Form F .

Wir betrachten hierzu ein elektromagnetisches Feld auf $M := \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^4$. Dieser Raum ist homotopie-äquivalent zu S^1 , wir haben also $H^0(M) \cong \mathbb{R} \cong H^1(M)$ und $H^k(M) = \{0\}$ für $k \geq 2$. Da somit jede geschlossene 2-Form wieder exakt ist, existiert zu F ein A . Wenn wir wieder zwei mögliche A und $\tilde{A}$ wählen, so ist $A - \tilde{A}$ zwar geschlossen, aber nicht immer exakt. Als Konsequenz sehen wir, dass $\int_\gamma A$ wegabhängig ist. Dieser Effekt ist zwar klassisch nicht physikalisch messbar, er beeinflusst aber das Interferenzmuster bei quantenmechanischen Interferenz-Experimenten. In der Physik nennt man dies den **Aharonov-Bohm-Effekt**.

Rechne $(\ast F) = \sum_{\mu < \nu} (\ast F)_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ für

$$(\ast F)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ -B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ -B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

⁴⁰Also ein Dreibein wählt, das uns erlaubt den Raum mit $\mathbb{R}^3$ zu identifizieren. Diese Idee geht auf den Mathematiker und Philosophen René Descartes zurück, deswegen das Wort „kartesisch“

Eichtransformationen tauchen in vielen Bereichen der Physik auf, zum Beispiel auch im sogenannten Standardmodell – hierzu müssen Sie aber zuerst mal Lie-Gruppen gut verstehen. Seminar-Vorbesprechung am Donnerstag, 23.7.

Also

$$\ast F = -B^\flat \wedge dt + \ast(E^\flat \wedge dt)$$

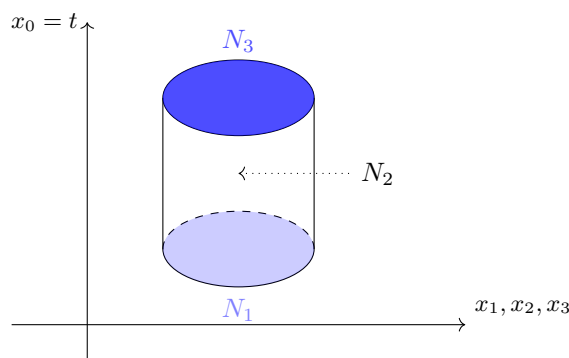
Rechne wie oben

$$\begin{aligned} d(\ast F) &= (\operatorname{div}^{\mathbb{R}^3} E) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \left(-\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{rot}(B)\right) \lrcorner dx^0 \wedge \dots \wedge dx^3 \\ &= \left((\operatorname{div}^{\mathbb{R}^3} E) \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{rot}(B)\right) \lrcorner dx^0 \wedge \dots \wedge dx^3. \end{aligned}$$

Setze $\mathcal{J}(x, t) := \begin{pmatrix} \rho(x, t) \\ J(x, t) \end{pmatrix}$. Dann sind (i) und (iv) äquivalent dazu, dass $d(\ast F) = \mathcal{J} \lrcorner dx^0 \wedge \dots \wedge dx^3$.

Anwendung des Satzes von Stokes in der Elektrodynamik.

Sei Ω ein Gebiet mit glattem Rand in $\mathbb{R}^3$ und $Q := [a, b] \times \Omega$.



Dann ist

$$\partial\Omega = \underbrace{\{a\} \times \Omega}_{=: N_1} \cup \underbrace{[a, b] \times \partial\Omega}_{=: N_2} \cup \underbrace{\{b\} \times \Omega}_{=: N_3}.$$

Rechne nun

$$0 = \int_Q \underbrace{d(d\ast F)}_{=0} = \int_{\partial Q} d\ast F = \int_{\partial Q} \mathcal{J} \lrcorner dx^0 \wedge \dots \wedge dx^3 = \int_{\partial Q} \langle \mathcal{J}, \nu \rangle d\mu^{\partial Q}$$

für ein äußeres Einheitsnormalenfeld ν .

Es ergibt sich also

$$0 = \int_{N_1} \langle \mathcal{J}, \nu \rangle + \int_{N_2} \langle \mathcal{J}, \nu \rangle + \int_{N_3} \langle \mathcal{J}, \nu \rangle = \underbrace{\int_{N_1} \rho}_{(1)} + \underbrace{\int_{N_2} \langle J, \nu \rangle}_{(2)} - \underbrace{\int_{N_3} \rho}_{(3)}$$

Dabei ist (1) die Ladung für $t = a$, (3) die Ladung für $t = b$ und (2) die Ladung die in Ω hineinströmt.

Das heißt, es gilt Ladungserhaltung.⁴¹

⁴¹Achtung: hier ist nicht das Standard-Skalarprodukt von $\mathbb{R}^4$ zu nehmen, sondern die vorhin definierte, nicht-entartete symmetrische Bilinearform von Signatur $(-+++)$. Diese Bilinearform sollte immer auf der Raumzeit die Rolle des Skalarprodukts einnehmen, nur sie ist physikalisch wohldefiniert.

Satz von Stokes und homotope Abbildungen

Wir wollen zunächst noch eine Folgerung aus dem Satz von Stokes behandeln⁴².

Korollar 3.9.1. *Sei α eine geschlossene n -Form auf einer Mannigfaltigkeit M . Sei N eine kompakte orientierte n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Angenommen $f_0, f_1 : N \rightarrow M$ sind glatte Abbildungen, die relativ⁴³ zu ∂N homotop sind, dann gilt*

$$\int_N f_0^* \alpha = \int_N f_1^* \alpha.$$

Beweis: Sei $F : [0, 1] \times N \rightarrow M$ eine glatte Homotopie relativ ∂N von f_0 zu f_1 . Es gilt dann $d(F^* \alpha) = F^*(d\alpha) = 0$. Wir rechnen in $p \in \partial N$ gilt

$$F^*(\alpha) \left(\frac{\partial}{\partial t}, \bullet, \dots, \bullet \right) \Big|_{(t,p)} = \underbrace{\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{(t,p)}, d_{(t,p)} F(\bullet), \dots, d_{(t,p)} F(\bullet) \right)}_{=0} = 0. \quad (3.9.1)$$

Bezeichne $\iota : [0, 1] \times \partial N \hookrightarrow [0, 1] \times N$ die Inklusion. Dann ist also $\iota^* F^* \alpha \in \Omega^n([0, 1] \times \partial N)$ und wegen $n = \dim([0, 1] \times \partial N)$ folgt dann mit (3.9.1), dass $\iota^* F^* \alpha$ verschwindet.

Wir wenden den Satz von Stokes auf die Mannigfaltigkeit mit Ecken $[0, 1] \times N$ an:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{[0,1] \times N} d(F^*(\alpha)) \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial([0,1] \times N)} F^*(\alpha) \\ &= \int_{\{1\} \times N} F^*(\alpha) + \int_{\{0\} \times N} F^*(\alpha) + \int_{[0,1] \times \partial N} \underbrace{\iota^* F^*(\alpha)}_{=0} \\ &= \int_N f_1^*(\alpha) - \int_N f_0^*(\alpha). \end{aligned}$$

Das rote ι^* wird normalerweise in der Notation unterdrückt, ist hier aber natürlich für die Argumentation wichtig. Das Minuszeichen kommt daher, dass die Inklusion $N \hookrightarrow \{0\} \times N$ bezüglich der gegebenen Orientierung von N und der auf $\{0\} \times N$ induzierten Orientierung orientierungsumkehrend ist. ■

3.10 Der Satz von Gauß–Bonnet

3.10.1 Die lokale Version des Satzes von Gauß–Bonnet

Die lokale Version des Satzes von Gauß–Bonnet macht eine Aussage über gekrümmte Flächen mit riemannscher Metrik, die die Form eines Polygons haben. Die Flächen sind hierbei in doppelter Hinsicht gekrümmt: zum einen hat sie im allgemeinen nicht verschwindende Gauß-Krümmung, zu anderen ist im allgemeinen auch der Rand gekrümmt. Wir nennen sie **polygonale Flächen**. Natürlich ist zuerst zu klären, wie wir polygonale Flächen beschreiben wollen, denn es sind keine

⁴²Wir benötigen das Korollar nicht für den logischen Aufbau, sie ist aber dennoch für das Verständnis hilfreich.

⁴³Das Wort „relativ“ ist hierbei wie in [Analysis III](#), Kapitel I, Unterabschnitt 3.5 zu definieren. Das heißt, es gibt eine glatte oder stetige Abbildung $F : [0, 1] \times N \rightarrow M$, so dass $F(0, \bullet) = f_0$, $F(1, \bullet) = f_1$ und für alle $t \in [0, 1]$ und alle $p \in \partial N$ gilt $F(t, p) = f_0(p)$

Flächen mit Rand: sie haben Ecken. Und selbst der Begriff von Mannigfaltigkeiten mit Ecken, siehe Beispiel 2.9 (ii) lässt noch nicht alle Möglichkeiten zu, die wir anstreben: Hiermit lassen sich nur konvexe Ecken modellieren, d. h. solche mit positiven Außenwinkel (Definition siehe unten). Die Darstellung, die wir hier wählen, beruht darauf, dass man ein glattes Flächenstück mit Rand oder Ecken etwas fortsetzen kann. Das polygonale Gebiet ist eine kompakte Teilmenge einer Fläche mit riemannscher Metrik. Natürlich wollen wir aber auch nicht jede kompakte Teilmenge als polygonales Gebiet bezeichnen, der Bezug zu Polygonen ginge verloren, und es verbliebe auch unklar, was in dieser Allgemeinheit ein verallgemeinerter Satz von Gauß–Bonnet aussagen könnte. Wir fixieren deswegen ein Polygon P in $\mathbb{R}^2$ (nicht notwendigerweise konvex!) und betrachten glatte Abbildungen $F : P \rightarrow M$ in eine Fläche M , so dass $F : P \rightarrow F(P)$ ein Diffeomorphismus ist. Wir finden dann eine in $\mathbb{R}^2$ offene Teilmenge W , die P enthält und eine Fortsetzung von F zu einer Parametrisierung $F : W \rightarrow U \subseteq M$ mit $F(W) = U \supset F(P)$. Die Orientierung von $\mathbb{R}^2$ definiert eine Orientierung von P . Es gibt dann genau eine Orientierung von $F(P)$, so dass F orientierungserhaltend ist, und nach potentieller Verkleinerung von M lässt sich diese Orientierung auf M fortsetzen.

Im folgenden Abschnitt wird der deswegen Begriff Fläche zumeist im Sinne einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit Rand gebraucht, wobei natürlich erlaubt ist, dass der Rand die leere Menge ist. Manchmal sind aber auch Flächen mit Ecken erlaubt, dies macht aber für unsere Definitionen und ersten Resultate keinen wesentlichen Unterschied.

Sei M eine orientierte Fläche mit riemannscher Metrik.

Zu $X \in T_p M$ bezeichnen wir mit $X^\perp$ den um 90 Grad in positive Richtung⁴⁴ gedrehten Vektor in $T_p M$. Man überlegt sich leicht, dass dann für $X, \tilde{X} \in T_p M$ gilt:

$$X^{\perp\perp} = -X, \quad g(X, \tilde{X}) = g(X^\perp, \tilde{X}^\perp) \text{ und } g(X^\perp, \tilde{X}) = -g(X, \tilde{X}^\perp). \quad (3.10.1)$$

Sei $\gamma : I \rightarrow M$ eine reguläre⁴⁵ Kurve in M , $T(t) := T_\gamma(t) := \dot{\gamma}(t)/\|\dot{\gamma}(t)\|$ der Tangentialvektor. Wir definieren $N(t) := N_\gamma(t) := T(t)^\perp$. Im Fall $M = \mathbb{R}^2$ ist dies gerade der Normalenvektor der Kurve im Sinne der Theorie ebener Kurven.⁴⁶ Die Krümmung einer ebenen Kurve in Beispiel 1.54 verallgemeinert sich nun wie folgt auf Kurven in Flächen: Wir definieren die **geodätische Krümmung** als

$$\kappa_\gamma^{\text{geo}}(t) := g(\dot{T}(t), N(t))/\|\dot{\gamma}(t)\|.$$

Ist $\varphi : J \rightarrow I$ ein Diffeomorphismus, so rechnet man leicht nach:

$$\begin{aligned} T_{\gamma \circ \varphi}(t) &= \begin{cases} T_\gamma(\varphi(t)), & \text{falls } \varphi \text{ orientierungserhaltend} \\ -T_\gamma(\varphi(t)) & \text{falls } \varphi \text{ orientierungsumkehrend} \end{cases} \\ N_{\gamma \circ \varphi}(t) &= \begin{cases} N_\gamma(\varphi(t)), & \text{falls } \varphi \text{ orientierungserhaltend} \\ -N_\gamma(\varphi(t)) & \text{falls } \varphi \text{ orientierungsumkehrend} \end{cases} \\ \kappa_{\gamma \circ \varphi}^{\text{geo}}(t) &= \kappa_\gamma^{\text{geo}}(\varphi(t)) \end{aligned}$$

⁴⁴d. h. $(X, X^\perp)$ ist eine positive orientierte Basis

⁴⁵Wiederholung: „regulär“ bedeutet hier, dass für alle $t \in I$ gelte $\dot{\gamma}(t) \neq 0$.

⁴⁶Die Definition des Tangentialvektors $T(t)$ ist hier wie in Beispiel 1.54, Übungsblatt 4, Aufgabe 3 und Übungsblatt 5, Aufgabe 3. Der Normalenvektor verallgemeinert $N(t)$ in Beispiel 1.54. Er ist aber verschieden zu dem in Übungsblatt 4, Aufgabe 3 und Übungsblatt 5, Aufgabe 3, da letzterer nur in Spezialfällen tangential an M ist.

Alle Winkel sind mit der in der Mathematik üblichen Orientierung zu messen, das heißt für $X, Y \in T_p M \setminus \{0\}$ gilt:

$$\alpha = \angle(X, Y) \iff Y = \frac{\|Y\|}{\|X\|} \left((\cos \alpha)X + (\sin \alpha)X^\perp \right).$$

Satz 3.10.1 (Satz von Gauß–Bonnet, lokale Version). *Sei M eine orientierte Fläche mit riemannscher Metrik, $F : P \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus F eines Polygons P (in $\mathbb{R}^2$) auf sein Bild in M . Seien α_j , $1 \leq j \leq k$, die Außenwinkel und sei κ^{geo} die geodätische Krümmung des in positive Richtung durchlaufenen Randes $\partial F(P)$. Dann gilt*

$$\int_{F(P)} K \, dA + \int_{\partial F(P)} \kappa^{\text{geo}} \, d\ell + \sum_{j=1}^k \alpha_j = 2\pi.$$

Im obigen Satz bezeichnet $dA := \text{dvol}^M$ die Volumenform einer Fläche, zum Beispiel der Fläche M oder $F(P)$. Äquivalent dazu kann man das Integral auch als Integral einer Funktion über eine riemannsche Mannigfaltigkeit im Sinne von Kapitel 1 bzw. Bemerkungen 3.7.17 (i) definieren.

Wie bereits erwähnt, setzt sich F zu einer Parametrisierung $F : W \rightarrow U$ fort. Die zugehörigen Koordinaten bezeichnen wir mit u^1 und u^2 , d. h. $u = (u^1, u^2) = F^{-1} : U \rightarrow W$ ist eine Karte und $\frac{\partial}{\partial u^j}$ ist das j -te Koordinatenvektorfeld in dieser Karte. In dieser Parametrisierungen haben wir also

$$\int_{F(U)} K \, dA = \int_U K \circ F \sqrt{\det g_{ij}} \, du^1 \, du^2.$$

Ähnlich dazu bezeichne $d\ell := \text{dvol}$ die Volumenform einer Kurve, z. B. der stückweise glatten Kurve $\partial(F(P))$. Um das Integral $\int_{\partial F(P)} \kappa^{\text{geo}} \, d\ell$ zu definieren, nehmen wir Parametrisierungen $\gamma_j : [a_j, b_j] \rightarrow \partial F(P)$, $j = 1 \dots, k$ des Randes und definieren dann

$$\int_{\gamma} \kappa^{\text{geo}} \, d\ell := \sum_{j=1}^k \int_{\gamma_j} \kappa_{\gamma_j}^{\text{geo}} \, d\ell = \sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} \kappa_{\gamma_j}^{\text{geo}}(t) \|\dot{\gamma}_j(t)\| \, dt,$$

und aus obigen Überlegungen folgt, dass dieses Integral nicht von der Wahl der Parametrisierungen abhängt. Es kann auch wieder als Integral einer Funktion über einer riemannschen Mannigfaltigkeit interpretiert werden.

Der obige Satz ist für eine orientierte Fläche formuliert. Der Rand trägt eine hiervon induzierte Orientierung. Ändern wir die Orientierung von M , so bleiben aber alle Ausdrücke erhalten. Alle anderen Terme sind offensichtlich orientierungsunabhängig. Wir könnten somit die Orientierung in der Aussage des obigen Satzes weglassen. Da wir jedoch aus beweistechnischen Gründen die Orientierung nutzen wollen, nehmen wir in diesem Unterabschnitt an, dass M orientiert ist.

Lemma 3.10.2. *Ist X ein Vektorfeld und $Z \in T_p M$, dann gilt*

$$(\nabla_Z X)^\perp = \nabla_Z (X^\perp).$$

Beweis: Wir rechnen

$$0 = \partial_Z \underbrace{g(X, X^\perp)}_{=0} = g(\nabla_Z X, X^\perp) + g(X, \nabla_Z(X^\perp))$$

$$2g(\nabla_Z X, X) = \nabla_Z g(X, X) = \nabla_Z g(X^\perp, X^\perp) = 2g(X^\perp, \nabla_Z(X^\perp))$$

Der Vektor $Y := \nabla_Z(X^\perp)$ erfüllt also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} g(X, Y) &= -g(\nabla_Z X, X^\perp) \\ g(X^\perp, Y) &= g(\nabla_Z X, X) \end{aligned} \tag{3.10.2}$$

Da X und $X^\perp$ linear unabhängig sind, hat (3.10.2) genau eine Lösung. Mit (3.10.1) sieht man, dass $Y := (\nabla_Z X)^\perp$ eine Lösung ist. Das Lemma ist somit gezeigt. ■

Definition 3.10.3. Sei $U \subset M$ offen und sei E ein auf U definiertes **Einheitsvektorfeld**, d. h. $E \in \mathfrak{X}(U)$, $\|E\| \equiv 1$. Somit ist $E^\perp$ ebenfalls Einheitsvektorfeld, und $(E_p, E_p^\perp)$ ist eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $T_p M$. Dann definieren $\omega \in \Omega^1(U)$ durch

$$\omega(Z) := g(\nabla_Z E, E^\perp) \quad \forall Z \in \mathfrak{X}(U).$$

Wir nennen ω die **Zusammenhangs-1-Form** bezüglich E .

Durch Ableiten von $g(E, E) = g(E^\perp, E^\perp) = 1$ ergibt sich $\nabla_Z E \perp E$ und $\nabla_Z(E^\perp) \perp E^\perp$. Also $\nabla_Z E = \omega(Z)E^\perp$.

Mit Lemma 3.10.2 folgt dann $\nabla_Z(E^\perp) = \omega(Z)E^{\perp\perp} = -\omega(Z)E$.

Bemerkungen 3.10.4. ⁴⁷

- (a) Sei M eine orientierte Fläche mit riemannscher Metrik g . Seien E_1 und E_2 zwei Einheitsvektorfelder, die auf $U \subseteq M$ definiert sind, die zugehörigen Zusammenhangs-1-Formen seien ω_1 und ω_2 . Dann ist $\omega_1 - \omega_2$ geschlossen.
- (b) Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine stückweise glatte, geschlossene⁴⁸ Kurve, die in U homotop zu einem Punkt ist. Dann ist $\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\dot{\gamma}(t)) dt$ unabhängig von der Wahl von E .

Beweis: „(a)“: Für jedes $p \in U$ existiert ein $\alpha(p)$, so dass

$$E_2|_p = (\cos \alpha(p))E_1|_p + (\sin \alpha(p))E_1^\perp|_p.$$

Dieses $\alpha(p)$ ist bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π eindeutig bestimmt. Wir überlegen uns, wieso wir α auf kleinen Umgebungen glatt wählen können.⁴⁹ Wir setzen deswegen $z^1(p) := \cos \alpha(p) = g(E_2|_p, E_1|_p)$ und $z^2(p) := \sin \alpha(p) = g(E_2|_p, E_1|_p^\perp)$, die beide glatt von p abhängen. Es ist $z(p) := (z^1(p), z^2(p)) \in S^1$. Auf S^1 wählen wir die Parametrisierungen $\Phi_0 : (0, 2\pi) \rightarrow S^1$, $\Phi_0(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ und $\Phi_\pi : (\pi, 3\pi) \rightarrow S^1$, $\Phi_\pi(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. Wenn $z(p_0) \neq (0, -1)$,

⁴⁷Wir benötigen die Bemerkungen nicht für den logischen Aufbau, sie ist aber dennoch für das Verständnis hilfreich

⁴⁸„geschlossen“ bedeutet $\gamma(a) = \gamma(b)$.

⁴⁹Es ist nicht allzu schwer ein Beispiel hinzuschreiben, für die eine stetig Funktion α nicht auf ganz U existiert. Man nehme zum Beispiel $U = \mathbb{R}^2$ mit der Standardmetrik, $E_1 := \frac{\partial}{\partial u^1}$ und $E_2 := \text{grad} \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2}$.

dann ist $\alpha(p) := (\Phi_\pi)^{-1} \circ z(p)$ eine glatte Wahl auf einer Umgebung von p_0 , wenn $z(p_0) = (0, -1)$, dann wählen wir $(\Phi_0)^{-1} \circ z(p)$.

Wir rechnen:

$$\begin{aligned}\omega_2(Z) &= g(\nabla_Z E_2, E_2^\perp) \\ &= g\left(\partial_Z \alpha (-\sin \alpha) E_1 + (\cos \alpha) \nabla_Z E_1, E_2^\perp\right) \\ &\quad + g\left(\partial_Z \alpha (\cos \alpha) E_1^\perp + (\sin \alpha) \nabla_Z (E_1^\perp), E_2^\perp\right) \\ &= \partial_Z \alpha \left((-\sin \alpha) g(E_1, E_2^\perp) + (\cos \alpha) g(E_1^\perp, E_2^\perp) \right) \\ &\quad + (\cos \alpha) g(\nabla_Z E_1, E_2^\perp) + (\sin \alpha) \underbrace{g((\nabla_Z E_1)^\perp, E_2^\perp)}_{g(\nabla_Z E_1, E_2)}.\end{aligned}$$

Aus bereits bekannten Relationen sieht man, dass $g(E_1, E_2^\perp) = -\sin \alpha$, $g(E_1^\perp, E_2^\perp) = \cos \alpha$, $\nabla_Z E_1 \parallel E_1^\perp$ und damit $g(\nabla_Z E_1, E_2^\perp) = (\cos \alpha) g(\nabla_Z E_1, E_1^\perp)$ und $g(\nabla_Z E_1, E_2) = (\sin \alpha) g(\nabla_Z E_1, E_1^\perp)$. Es folgt insgesamt

$$\begin{aligned}\omega_2(Z) &= \left((\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 \right) \partial_Z \alpha + \left((\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 \right) \omega_1(Z) \\ &= d\alpha(Z) + \omega_1(Z)\end{aligned}$$

Wir haben also $\omega_2 - \omega_1 = d\alpha$ auf V und somit gilt $d(\omega_2 - \omega_1)$ auf V . Da U von derartigen V überdeckt wird, ist also $\omega_2 - \omega_1$ auf ganz U geschlossen.

„(b)“: Es folgt nun mit Korollar 3.9.1

$$\int_\gamma (\omega_1 - \omega_2) = 0$$

für jeden Weg, der homotop in U zu einem konstanten Weg ist. ■

Lemma 3.10.5. *Seien M , U , E und ω wie oben. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine stückweise glatte, reguläre parametrisierte Kurve in U , mit geodätischer Krümmung $\kappa^{\text{geo}}(t)$. Die Kurve bestehe aus $k+1$ glatten Teilen und der Außenwinkel an der j -ten nicht glatten Stelle t_j , $j = 1, \dots, k$ sei*

$$\alpha_j = \angle \left(\lim_{t \nearrow t_j} T_\gamma(t), \lim_{t \searrow t_j} T_\gamma(t) \right).$$

Sei $\beta(t) := \angle \left(E|_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t) \right) = \angle \left(E|_{\gamma(t)}, T(t) \right)$. Dann gilt

$$\beta(b) - \beta(a) = \int_\gamma \kappa^{\text{geo}} d\ell + \sum_{j=1}^k \alpha_j - \int_\gamma \omega.$$

Beweis:

Da alle Ausdrücke unabhängig von der Parametrisierung sind – vorausgesetzt die Parametrisierung erhält die Orientierung –, können wir o. B. d. A. annehmen, dass γ nach Bogenlänge parametrisiert ist, also gilt $T_\gamma = \dot{\gamma}$ in den glatten Stellen. Es ist klar, dass β in den nicht glatten

Stelle von γ jeweils um den Außenwinkel α_j springt. Deswegen reicht es, das Lemma für jeden einzelnes glatte Stück zu zeigen, dass heißt wir können nun o. B. d. A. annehmen, dass γ glatt ist. Durch weitere Einschränkung auf noch kleinere Stücke, können wir o. E. annehmen, dass γ die Parametrisierung einer 1-dimensionalen Untermannigfaltigkeit mit Rand ist.

Wir haben

$$\dot{\gamma}(t) = (\cos \beta(t)) E|_{\gamma(t)} + (\sin \beta(t)) \left(E|_{\gamma(t)} \right)^\perp.$$

Also

$$\begin{aligned} (\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}) &= \underbrace{\dot{\beta}(t) \left(-(\sin \beta(t)) E|_{\gamma(t)} + (\cos \beta(t)) \left(E|_{\gamma(t)} \right)^\perp \right)}_{\dot{\gamma}(t)^\perp} \\ &\quad + (\cos \beta(t)) (\nabla_{\dot{\gamma}(t)} E) + (\sin \beta(t)) ((\nabla_{\dot{\gamma}(t)} E))^\perp \end{aligned}$$

Mit $\nabla_{\dot{\gamma}} E = \omega(\dot{\gamma}(t)) \left(E|_{\gamma(t)} \right)^\perp$ erhalten wir

$$\begin{aligned} (\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}) &= \dot{\beta}(t) \dot{\gamma}(t)^\perp + \omega(\dot{\gamma}(t)) \left((\cos \beta(t)) \left(E|_{\gamma(t)} \right)^\perp - (\sin \beta(t)) E|_{\gamma(t)} \right) \\ &= \left(\dot{\beta}(t) + \omega(\dot{\gamma}(t)) \right) \dot{\gamma}(t)^\perp \end{aligned}$$

Aus der Definition von $\kappa_\gamma^{\text{geo}}$ bekommen wir dann

$$\kappa_\gamma^{\text{geo}}(t) = \left\langle (\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}), (\dot{\gamma}(t))^\perp \right\rangle = \dot{\beta}(t) + \omega(\dot{\gamma}(t)).$$

Durch Integration folgt

$$\beta(b) - \beta(a) = \int_a^b (\kappa_\gamma^{\text{geo}}(t) - \omega(\dot{\gamma}(t))) dt = \int_\gamma \kappa_\gamma^{\text{geo}} d\ell - \int_\gamma \omega. \quad \blacksquare$$

Sei von nun P ein Polygon in $\mathbb{R}^2 \ni (u^1, u^2)$ und $F : P \rightarrow M$ ein auf einem Polygon definierter glatter Diffeomorphismus auf sein Bild, d. h. er kann zu einer Parametrisierung fortgesetzt werden, die auf einer offenen Menge definiert ist, die P enthält. Wir wählen

$$E|_p := \left\| \frac{\partial}{\partial u^1} \Big|_p \right\|^{-1} \frac{\partial}{\partial u^1} \Big|_p.$$

Also ist das Einheitsvektorfeld E parallel zum ersten Koordinatenvektorfeld $\frac{\partial}{\partial u^1}$, hat aber nicht unbedingt dieselbe Länge, sondern die Länge 1.

Wir nehmen weiter an, dass die stückweise glatte, reguläre Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \partial F(P)$ den Rand der Fläche $F(P)$ im positiven Sinne einmal durchläuft. Wir nehmen an, dass γ in einem glatten Punkt des Randes startet und endet, d. h. γ besteht aus $k+1$ glatten Stücken, wenn das Polygon k Ecken besitzt.⁵⁰

⁵⁰Sie können auch in einer Ecke starten und enden, müssen dann aber den dort liegenden Außenwinkel auch noch hinzufügen, was wir durch diese formulierung vermieden haben.

Der Umlaufsatz⁵¹ für Kurven in $\mathbb{R}^2$ besagt, dass

$$\beta(b) - \beta(a) = 2\pi.$$

Wir erhalten somit aus Lemma 3.10.5

$$2\pi = \int_{\gamma} \kappa^{\text{geo}} d\ell + \sum_{j=1}^k \alpha_j - \int_{\gamma} \omega.$$

Der Satz 3.8.2 von Stokes liefert uns nun

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{F(P)} d\omega.$$

Mit dem folgenden Lemma ist somit der Beweis von Satz 3.10.1 vollständig. Wir haben also die lokale Version des Satzes von Gauß–Bonnet bewiesen.

Lemma 3.10.6. *Es gilt für die Zusammenhangs-1-form ω und die Gaußkrümmung K :*

$$d\omega = -K \, \text{dvol}.$$

Beweis: Wir rechnen für $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ unter Nutzung von [Übungsblatt 12, Aufgabe 2](#):

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y) &= \partial_X(\omega(Y)) - \partial_Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \\ &= \partial_X(\langle \nabla_Y E, E^\perp \rangle) - \partial_Y(\langle \nabla_X E, E^\perp \rangle) - \langle \nabla_{[X, Y]} E, E^\perp \rangle \\ &\stackrel{(*)}{=} \langle \nabla_X \nabla_Y E, E^\perp \rangle + \underbrace{\langle \nabla_Y E, \nabla_X(E^\perp) \rangle}_{=0} \\ &\quad - \langle \nabla_Y \nabla_X E, E^\perp \rangle + \underbrace{\langle \nabla_X E, \nabla_Y(E^\perp) \rangle}_{=0} \\ &\quad - \langle \nabla_{[X, Y]} E, E^\perp \rangle \\ &= \langle R(X, Y)E, E^\perp \rangle. \end{aligned}$$

An der Stelle (*) haben wir genutzt, dass $\nabla_Y E \perp E$ und $\nabla_X(E^\perp) \perp E^\perp$, woraus für alle X, Y die Aussage $\nabla_Y E \perp \nabla_X(E^\perp)$ folgt. Setzen wir $X = E$ und $Y = E^\perp$ ein, so folgt aus der Definition der Gaußkrümmung, siehe Definition 2.8.6⁵²:

$$d\omega(E, E^\perp) = -K = -K \, \text{dvol}(E, E^\perp).$$

Da für jedes $p \in U$ die Abbildung $\Lambda^2(T_p^*M) \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \mapsto \alpha(E|_p, E|_p^\perp)$ injektiv ist, folgt die Behauptung. ■

⁵¹Wird hier nicht bewiesen, für einen Beweis siehe [4, Satz 2.2.10]

⁵²spezialfall Flächen in $\mathbb{R}^k$: Definition 1.85

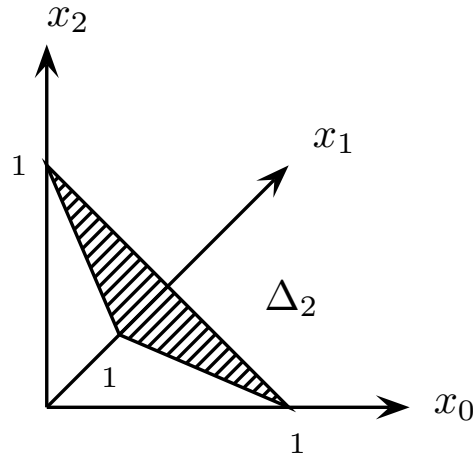


Abbildung 3.10.1: Der Standard-2-Simplex Δ_2 . Er ist eine Fläche mit Ecken in Form eines gleichseitigen Dreiecks[©]

3.10.2 Triangulierungen von Flächen

Bezeichnungen 3.10.7. Der **Standard- k -Simplex** ist definiert als

$$\Delta_k := \left\{ (x_0, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \sum_{i=0}^k x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}.$$

Δ_0 ist einfach ein Punkt, Δ_1 ist diffeomorph zu $[0, 1]$, Δ_2 ist ein Dreieck, Δ_3 ein Tetraeders, etc. – in allen Fällen nicht nur der Rand der Fläche bzw. des Körpers, sondern der volle, konvexe, abgeschlossene Körper – siehe auch Abbildung 3.10.1.

Ein **k -Simplex** in M ist eine stetige Abbildung $\sigma : \Delta_k \rightarrow M$. Man nennt den Simplex **glatt**, falls σ glatt ist. Man interpretiert den Standard- k -Simplex als k -Simplex in $\Delta_k \hookrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$.

Im Standard-2-Simplex liegen drei 1-Simplizes als „Ränder“

$$\sigma_{(0)}((x_0, x_1)) = (0, x_0, x_1), \quad \sigma_{(1)}((x_0, x_1)) = (x_0, 0, x_1), \quad \sigma_{(2)}((x_0, x_1)) = (x_0, x_1, 0).$$

Ist $\sigma : \Delta_2 \rightarrow M$ ein 2-Simplex in M und ein Diffeomorphismus auf sein Bild, so nennen wir $\sigma(\overset{\circ}{\Delta}_2)$ die **Seitenflächen des Simplex**, $\sigma \circ \sigma_{(j)}(\overset{\circ}{\Delta}_1)$, $j = 0, 1, 2$, heißen die **Kanten**, die Bilder von Δ_2 unter σ heißen die **Ecken**.

Definition 3.10.8. Eine glatte Triangulierung einer kompakten Fläche M (mit Rand und mit Ecken) besteht aus Abbildungen $(\sigma_i)_{i \in I}$, I endlich, so dass gilt:

- $\sigma_i : \Delta_2 \rightarrow M$ ist glatt und ein Diffeomorphismus auf sein Bild,
- $M = \bigcup_{i=1}^n \sigma_i(\Delta_2)$
- die Mengen $\sigma_1(\overset{\circ}{\Delta}_2), \dots, \sigma_n(\overset{\circ}{\Delta}_2)$ sind paarweise disjunkt
- für $i \neq j$ ist $\sigma_i(\Delta_2) \cap \sigma_j(\Delta_2)$

-
- entweder eine Kante von σ_i und gleichzeitig eine Kante von σ_j ,⁵³
 - oder eine Ecke von σ_i und gleichzeitig eine von σ_j ,
 - oder die leere Menge.

Liegt also $p \in M$ auf einer Kante, aber nicht in einer Ecke eines 2-Simplex σ_i , so liegt p entweder auf keiner Kante eines anderen 2-Simplex (im Fall $p \in \partial M$) oder auf einer Kante von genau einem anderen Simplex (im Fall $p \notin \partial M$).

Satz 3.10.9. *Jede kompakte Fläche besitzt eine Triangulierung.*

Beweis: siehe Unterabschnitte 3.10.4 und 3.10.5. Alternativer Beweis siehe [4, Abschnitt 6.2] bzw. Abschnitt 5.2 in der ersten Ausgabe.

Bemerkung 3.10.10. Eine analoge Aussage ist auch wahr für nicht-kompakte Flächen (lasse unendlich viele Simplizes zu, die aber lokalendlich eingebettet sind), und auch für topologische Flächen (=2-dimensionale Mannigfaltigkeiten mit C^0 -Atlas) mit Homöomorphismen statt Diffeomorphismen.

Wenn die Fläche M nun trianguliert ist, dann haben wir eine Zerlegung.

$$M := \text{Das Innere der Seitenflächen} \dot{\cup} \text{Das Innere der Kanten} \dot{\cup} \text{Ecken}$$

$f :=$ Anzahl der Seitenflächen

$k :=$ Anzahl der Kanten

$e :=$ Anzahl der Ecken

Sei $\{\sigma | i \in I\}$ die Triangulierung einer Fläche mit Rand und Ecken. Dann definieren wir die **Euler-Charakteristik**

$$\chi := f - k + e.$$

Beispiel 3.10.11 (Triangulierungen der 2-Sphäre). Man kann eine 2-dimensionale Sphäre S^2 auf verschiedene Arten triangulieren. Man füge hierzu Dreiecke so zusammen, dass man einen Raum homöomorph zu S^2 erhält. Man kann dies dann auch so arrangieren, dass die Simplizes glatt werden. Besondere Beispiele sind die regelmäßigen Polyeder, die aus Dreiecken bestehen: Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder. Sie haben die Eigenschaft, dass in den Ecken immer dieselbe Anzahl d an Dreiecken zusammen kommt: beim Tetraeder $d = 3$, beim Oktaeder $d = 4$ und beim Ikosaeder $d = 5$. Es gibt viele nicht regelmäßige Triangulierungen. Man kann sie zum Beispiel durch Unterteilung von regelmäßigen Triangulierungen erhalten.

⁵³Daraus folgt dann des. Im Fall $p \in \partial M$ liegt er auf keiner Kante eines anderen Simplex.



©

Bei einer regelmäßigen Triangulierung von S^2 bestimmt d die Anzahl von f , k und e . Denn jeweils zwei Flächen treffen sich in einer Kante, und jede Fläche hat drei Kanten, also $2k = 3f$. Jeweils d Flächen treffen sich in einer Ecke, aber jede Fläche hat drei Ecken, also $de = 3f$. Wir werden sehen, die Euler-Charakteristik hängt nicht von der Triangulierung, sondern nur von M ab. Für $M = S^2$ zeigt die Tetraeder-Triangulierung, dass $\chi = 4 - 6 + 4 = 2$. Wir erhalten also noch $f - k + e = 2$. Somit erhalten wir

$$2 = f - \frac{3}{2}f + \frac{3}{d}f = \frac{2d - 3d + 6}{2d}f \iff f = \frac{4d}{6 - d}.$$

wir erhalten für $d = 3, 4, 5$ dann $f = 4, 8, 20$ und die anderen Zahlen entsprechend.

Satz 3.10.12 (Gauß-Bonnet, globale Version mit Rand und Ecken). *Sei M eine kompakte Fläche mit Rand und Ecken mit riemannscher Metrik. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ die Außenwinkel der Ecken. Dann gilt:*

$$\int_M K dA + \int_{\partial M} \kappa_g dl + \sum_{i=1}^s \alpha_s = 2\pi\chi(M). \quad (3.10.3)$$

Satz 3.10.13. *Die Euler-Charakteristik einer triangulierten kompakten Fläche M mit Rand und Ecken hängt nur von M , aber nicht von der Triangulierung ab.*

Beweis von Satz 3.10.13: Dieser Satz folgt aus Satz 3.10.12. Wir wählen eine riemannsche Metrik. Dadurch ist die linke Seite von (3.10.3) bestimmt und somit auch die rechte. ■

Beispiele. $\chi(S^2) = 2$, $\chi(\text{Kreisscheibe}) = \chi(\Delta_2) = 1$, $\chi(T^2) = 0$, $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$, $\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2$.

Folgerung 3.10.14 (Eulerscher Polyedersatz). *Zerlegen wir S^2 in f Polygone, die zusammen k Kanten und e Ecken haben, so gilt*

$$f - k + e = 2.$$

Beweis: Falls die Flächen Dreiecke sind, so ist die Folgerung gerade die Aussage von Satz 3.10.13 für $M = S^2$. Wenn andere Polygone vorhanden sind, so müssen diese in Dreiecke zerlegt werden. So entstehen aus jedem ℓ -Eck $(\ell - 2)$ Dreiecke. Durch diese Unterteilung entstehen $\ell - 3$ zusätzlichen Seitenflächen und $\ell - 3$ zusätzliche Kanten und keine zusätzlichen Ecken. Dies hat also keinen Einfluss auf $f - k + e$. ■

Bemerkung. Man kann auch zeigen: Für kompakte Flächen M gilt auch $\chi(M) = b_0 - b_1 + b_2$, wobei b_i die in Definition 3.4.1 definierten Betti-Zahlen sind.

3.10.3 Satz von Gauß–Bonnet, globale Version

Beweis des Satzes 3.10.12 von Gauß–Bonnet: Wir wollen hier auch nur den Fall ausführen, dass M keinen Rand besitzt, da die Modifikationen im Fall mit Rand und Ecken offensichtlich sind, wenn man das Argument für Flächen ohne Rand gut verstanden hat.

Zunächst einmal triangulieren wir M mit f Dreiecken, d. h.

$$M = \bigcup_{i=1}^f \sigma_i(\Delta_2)$$

mit den Eigenschaften aus dem Abschnitt. Das Dreieck $\sigma_i(\Delta_2)$ habe die Außenwinkel $\alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}, \alpha_{3,i}$. Die zugehörigen Innenwinkel sind dann $\beta_{j,i} := \pi - \alpha_{j,i}$. Die Anzahl der Ecken der Triangulierung sei e und die Anzahl der Kanten k .

Jede Kante tritt als Randkomponente von genau zwei 2-Simplizes auf, also insbesondere $2k = 3f$. Man überlegt sich nun leicht, dass die beiden zugehörigen Terme der Form $\int \kappa^{\text{geo}} d\ell$ umgekehrtes Vorzeichen haben. Dies führt dazu, dass sich diese Terme in der nun folgenden Argumentation gegenseitig annullieren.

Wir nutzen nun die lokale Version des Satzes von Gauß–Bonnet und summieren ihn über alle Simplizes.

$$\begin{aligned} \int_M K \, dA &= \sum_{i=1}^f \int_{\sigma_i(M)} K \, dA \\ &= \underbrace{- \sum_{i=1}^f \int_{\partial \sigma_i(M)} \kappa^{\text{geo}} d\ell}_{=0} - \sum_{i=1}^f \sum_{j=1}^3 \alpha_{j,i} + 2\pi f \\ &= \underbrace{-3\pi f}_{=-2\pi k} + \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^f \beta_{j,i} + 2\pi f \end{aligned}$$

Die Innenwinkel in jeder Ecke summieren sich zu je 2π auf. Dies ergibt

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^f \beta_{j,i} = 2\pi e.$$

Dies ergibt

$$\int_M K \, dA = 2\pi(e - k + f) = 2\pi\chi(M),$$

die Aussage des Satzes für den Fall ohne Rand.

Wie oben bereits angedeutet, wird der Fall mit Rand und Ecken analog bewiesen, wobei am Rand die $\int \kappa d\ell$ -Terme und Außenwinkel nicht annulliert werden. Die detaillierte Ausführung des Falles mit Rand wird dem Leser als Übung empfohlen. ■

3.10.4 Rund um das Lemma von Gauß

In der Vorlesung überspringen!

In der Vorlesung Analysis IV wird dieser Unterabschnitt übersprungen, da im Gegensatz zu einer früheren, anders orientierten Vorlesung manche genutzte Elemente noch nicht verfügbar sind. Thematisch führt dies auch etwas weit weg von den Hauptthemen der Vorlesung.

Für diejenigen, die es selber lesen wollen, sollten einige Definitionen und Aussagen kurz gesammelt werden, die Aussagen werden im Detail oft im Rahmen der Differentialgeometrie-Vorlesungen erklärt.

Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Zu $X \in T_p M$ bezeichne $\gamma_X : (a_X, b_X) \rightarrow M$ die auf dem maximalen Existenzintervall definierte Geodätische mit $\gamma_X(0) = p$ und $\dot{\gamma}_X(0) = X$. Ist $b_X > 1$, so definieren wir $\exp(X) = \gamma_X(1)$.

Sei $\mathcal{U}_p := \{X \in T_p M \mid b_X > 1\}$; aus Sätzen der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen⁵⁴ folgt, dass $\mathcal{U}_p$ offen ist. Wir halten eine glatte Abbildung $\exp : \mathcal{U}_p \rightarrow M$, die **Exponentialabbildung**. Man sieht, dass dann $\gamma_X(t) = \exp(tX)$.

Man definiert den **Injektivitätsradius in p** als

$$\text{injad}(p) := \max\{\rho > 0 \mid B_\rho(p) \subset \mathcal{U}_p\} \in (0, \infty)$$

und den **Injektivitätsradius von (M, g)** als

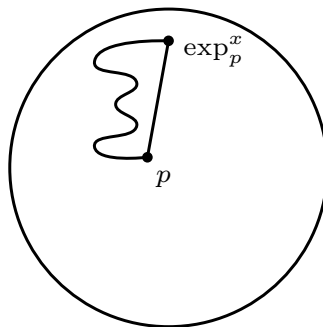
$$\text{injad}(M, g) := \inf_{p \in M} \text{injad}(p).$$

Im folgenden schreiben wir $d(p, q)$ für den intrinsischen Abstand von p zu q in der riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) . Die Dimension von M kann in diesem Abschnitt beliebig sein.

Lemma 3.10.15 (Gauß-Lemma). *Sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$, $\exp_p : \mathcal{D}_p \rightarrow M$, $X \in \mathcal{D}_p \subseteq T_p M$, $V \in T_p M$. Dann gilt:*

$$g(d_X \exp_p X, d_X \exp_p V) = g(X, V).$$

Das Gauß-Lemma wird im folgenden sehr hilfreich sein.



⁵⁴stetige Abhängigkeit der Lösungen gemäß Picard-Lindelöf von den Anfangsdaten

Wir haben unter anderem gesehen. Ist $X \in \mathcal{D}_p$ ein Vektor mit Länge $\leq \text{inrad}(p)$, dann ist jede Kurve von p nach $\exp_p X$ mindestens so lang wie die Kurve $[0, 1] \ni t \mapsto \exp_p(tX) \in M$.

$$d(p, \exp_p X) = \|X\|.$$

Es gilt also $B_\epsilon(p) = \exp_p(B_\epsilon(0))$ für $\epsilon \leq \text{inrad}(p)$.

Die Funktion $r = d(\cdot, p): M \rightarrow \mathbb{R}$, $q \mapsto d(q, p)$ ist somit glatt auf $B_\epsilon(p) \setminus \{p\}$.

Seien nun $\partial/\partial u_i$ die Koordinatenvektorfelder der Parametrisierung durch Normalkoordinaten, u_i die Koordinatenfunktionen. Es gilt dann lokal um p :

$$r := \sqrt{\sum_i u_i^2}.$$

Das Vektorfeld

$$\frac{\sum_i u_i (\partial/\partial u_i)}{\sqrt{\sum_i u_i^2}} =: \frac{\partial}{\partial r}$$

ist glatt auf $B_\epsilon(p) \setminus \{p\}$ und ist das Bild des radialen Vektorfelds in $T_p M$ unter $\exp_p$. Es ist das radiale Koordinatenfeld einer Parametrisierung durch geodätische Normalkoordinaten. Es gilt

$$2r \frac{\partial}{\partial r} r = \frac{\partial}{\partial r} r^2 = \frac{\sum_i u_i (\partial/\partial u_i)}{\sqrt{\sum_i u_i^2}} (\sum_j u_j^2) = 2 \sqrt{\sum_i u_i^2} = 2r$$

d.h. $\frac{\partial}{\partial r} r = 1$. In $X \in T_p M$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial r} \big|_{\exp_p X} = d_X \exp_p \frac{X}{\|X\|}.$$

Laut Gauß-Lemma gilt in $X \in T_p M$:

$$g_p\left(\frac{X}{\|X\|}, Y\right) = g_{\exp_p X}\left(\frac{\partial}{\partial r}, d_X \exp_p Y\right). \quad (3.10.4)$$

Definition 3.10.16. Sei $f \in C^\infty$. Der Gradient $\text{grad } f$ ist der Vektor $\in T_p M$ (bzw. das Vektorfeld), so dass

$$g(\text{grad } f, Y) = \partial_Y f$$

für alle $Y \in T_p M$ (und für alle $p \in M$).

Gilt $(\text{grad } f)(x) \neq 0$ für alle $x \in f^{-1}(t) =: N$, dann ist auch $d_x f \neq 0$, und somit ist N eine Untermannigfaltigkeit⁵⁵ Es gilt dann auch

$$T_x N = (\text{grad } f)^\perp = \{X \in T_x M \mid X \perp \text{grad } f\}.$$

Lemma 3.10.17. $\text{grad } r = \frac{\partial}{\partial r}$

⁵⁵Eine Teilmenge N von einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist eine Untermannigfaltigkeit von M , wenn für alle Parametrisierungen $\varphi: U \rightarrow V$ von M , gilt, dass $\varphi^{-1}(N)$ eine Untermannigfaltigkeit $\mathbb{R}^m$ ist.

Beweis: Wir überprüfen das Lemma in $\exp_p X$. Wir berechnen zuerst für $Y \in T_X \mathcal{D}_p = T_p M$

$$2r \partial_Y r = \partial_Y(r^2) = \partial_Y \left(\sum_i u_i^2 \right) = 2 \sum_i u_i \partial_Y u_i = 2g(Y, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix})$$

Also $\partial_Y r = \frac{1}{r} g(Y, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix})$. Auf der Mannigfaltigkeit ergibt dies, zusammen mit (3.10.4):

$$\partial_{d_X \exp_p Y} r = \frac{1}{r} g(Y, X) = g(Y, \frac{X}{\|X\|}) = g(\frac{\partial}{\partial r}, d_X \exp_p Y).$$

■

Insbesondere $g(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}) = \frac{\partial}{\partial r} r = 1$.

Lemma 3.10.18. *Gilt $q = \exp_p(X)$, dann ist $Y := \text{grad}(d(\cdot, p))(q) = \frac{1}{\|X\|} \gamma'_X(1)$. Außerdem gilt dann $p = \exp_q(-d(p, q)Y)$.*

Beweis: Mit denselben Methoden wie oben. Details werden evtl. noch ergänzt. ■

Lemma 3.10.19. *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit mit riemannscher Metrik. Dann gilt*

$$\text{injrads}(M, g) := \inf_{p \in M} \text{injrads}(p) > 0.$$

Beweis: Wir haben bereits gesehen, dass es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $U(p)$ von p gibt und eine positive Zahl δ_p , so dass $\text{injrads}(q) \leq \delta_p$ für alle $q \in U(p)$. Wir erhalten die offene Überdeckung

$$\{U(p) \mid p \in M\}$$

von M . Da M kompakt ist, ist in dieser Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung enthalten, also $M \subset U(p_1) \cup \dots \cup U(p_s)$. Wir setzen

$$\delta := \min\{\delta(p_1), \delta(p_2), \dots, \delta(p_s)\} > 0.$$

Man überprüft leicht, dass $\text{injrads}(M, g) \geq \delta$. ■

Der Raum (M, d) ist ein metrischer Raum, und als solcher induziert er eine Topologie auf M . Es ist a priori nicht klar, ob diese Topologie mit der ursprünglichen Topologie übereinstimmt. Die Aussage $B_\epsilon(p) = \exp_p(B_\epsilon(0))$ bewirkt aber, dass die von d induzierte Topologie tatsächlich mit der ursprünglichen Topologie von M übereinstimmt.

Ergebnisse des Unterabschnitts.

Zu einer kompakten riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) gibt es eine Zahl $\varepsilon > 0$, so dass alle Punkte $p, q \in M$ mit Abstand $d(p, q) < \varepsilon$ durch eine eindeutige kürzeste Kurve verbunden werden können. Diese Kurve ist dann eine Geodätische.

Liegen in einem Ball von Radius $< \varepsilon$ drei Punkte und verbinden wir diese durch Kürzeste, so liegt

- entweder einer der Punkte auf der Kürzesten zwischen den anderen, oder
- die drei Kürzesten bilden den Rand eines Dreiecks

3.10.5 Existenz einer Triangulierung

In der Vorlesung überspringen!

In diesem Abschnitt wollen wir wieder annehmen, dass M eine Fläche ohne Rand ist. Analoge Resultate gelten aber auch für glatte Flächen mit Rand und mit Ecken, und auch für Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension. Die Beweise sind offensichtliche Anpassungen der unten stehenden Techniken.

Bemerkung 3.10.20. Sehr erstaunlich ist hingegen die Tatsache, dass es ab Dimension 4 topologische Mannigfaltigkeiten (= Mannigfaltigkeiten ohne das Axiom, das besagt, dass Parametrisierungswechsel $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$ Diffeomorphismen sein müssen) gibt, die keine topologische Triangulierung (= „schöne“ Zerteilung in Teilstücke homöomorph zu Simplexes) zulassen. Insbesondere sind diese topologischen Mannigfaltigkeiten auch nicht homöomorph zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

Aber zurück zu Flächen ohne Rand.

Eine Teilmenge S von M nennt man ε -separiert, falls alle verschiedenen $p, q \in S$ die Eigenschaft $d(p, q) \geq \varepsilon$ erfüllen. Sei $\mathcal{S}_\varepsilon$ die Menge aller ε -separierten Teilmengen von M . Die Menge $\mathcal{S}_\varepsilon$ wird durch die Relation $\subset$ partiell geordnet.

Lemma 3.10.21. *Die partiell geordnete Menge $(\mathcal{S}_\varepsilon, \subset)$ besitzt maximale Elemente, sogenannte maximale ε -separierte Mengen.*

Beweis: Angenommen es gibt keine maximalen Elemente in $\mathcal{S}_\varepsilon$. Dann gibt es zu jedem $S \in \mathcal{S}_\varepsilon$ ein $T \in \mathcal{S}_\varepsilon$ mit $S \subsetneq T$.

Die leere Menge ist in $\mathcal{S}_\varepsilon$. Wir definieren $S_i \in \mathcal{S}_\varepsilon$ induktiv: $S_0 := \emptyset$. Ist $S_i \in \mathcal{S}_\varepsilon$ definiert, so wähle $S_{i+1} \in \mathcal{S}_\varepsilon$, so dass $S_i \subsetneq S_{i+1}$.

Die Menge $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ besitzt unendlich viele Elemente und besitzt wegen der Kompaktheit von M deswegen einen Häufungspunkt $p \in M$, der aber nicht unbedingt in einem der S_i liegen muss.

Wähle also eine Folge von Punkten $p_j \in \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ mit $d(p_i, p) \rightarrow 0$. Also insbesondere gilt $d(p_i, p_j)$ für genügend große i und j . Für ein genügend großes k gilt $p_i, p_j \in S_k$, also ist S_k nicht ε -separiert, im Widerspruch zu den obigen Annahmen. ■

Ab sofort sei S eine feste maximale ε -separierte Menge und $4\varepsilon < \text{inrad}(M, g)$. Auf Grund der Dreiecks-Ungleichung gilt dann $B_{2\varepsilon}(q) \subset B_{4\varepsilon}(p)$ für alle $q \in B_{2\varepsilon}(p)$. Somit ist diese Funktion $d(\cdot, q)$ für alle $q \in B_{2\varepsilon}(p)$ eine glatte Funktion auf $B_{2\varepsilon}(p) \setminus \{q\}$.

Sei nun $q \in S \cap B_{2\epsilon}(p)$, $q \neq p$. Definiere die Äquidistanzmenge

$$A_{p,q} := \{x \in B_{2\epsilon}(p) \mid d(x,p) = d(x,q)\}.$$

Man zeigt nun, dass $A_{p,q}$ in der Nähe von p und q eine Untermannigfaltigkeit ist.

Lemma 3.10.22. *Sei $\varphi := \exp_p : B_{2\epsilon}(0) \rightarrow B_{2\epsilon}(p)$ eine Parametrisierung durch Normalkoordinaten um p . Dann ist $\varphi^{-1}(A_{p,q})$ eine glatte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $B_{2\epsilon}(0)$.*

Beweis: Das Vektorfeld

$$X := \text{grad } d(\cdot, p) - \text{grad } d(\cdot, q)$$

steht bezüglich g senkrecht auf $A_{p,q}$. Wir zeigen durch einen Widerspruchsbeweis, dass X auf S nirgends verschwindet, somit folgt das Lemma aus dem Satz über implizite Funktionen.

Angenommen $X(x) = 0$ für ein $x \in S$. Dann gilt

$$Y := (\text{grad } d(\cdot, p))(x) = (\text{grad } d(\cdot, q))(x).$$

Mit Lemma 3.10.18 ergibt sich der Widerspruch

$$p = \exp_x(-d(x,p)Y) = \exp_x(-d(x,q)Y) = q.$$

■

Die Funktion $f(x) = d(x,p) - d(x,q)$ ist glatt auf $B_{2\epsilon}(p) \setminus \{p,q\}$. Nach Dreiecksungleichung gilt $f(x) \in [-d(p,q), d(p,q)]$. Mit dem Gauß-Lemma sieht man, dass

- $f(x) = d(p,q)$ genau dann gilt, wenn $x = \exp_p(tQ)$ mit $t \geq 1$ und $\exp_p Q = q$, und
- $f(x) = -d(p,q)$ genau dann gilt, wenn $x = \exp_p(tQ)$ mit $t \leq 0$ und $\exp_p Q = q$

Sei $\tilde{B}$ die Menge aller anderen Punkte von $B_{2\epsilon}(p) \setminus \{p,q\}$.

Mit Argumenten analog zu oben sieht man, dass das Vektorfeld

$$Y := (\text{grad } d(\cdot, p))(x) - (\text{grad } d(\cdot, q))(x)$$

auf allen anderen Punkten von $\tilde{B}$ nicht verschwindet. Auf dem Rand von $B_{2\epsilon}(p)$ ist Y nur in dem Punkten

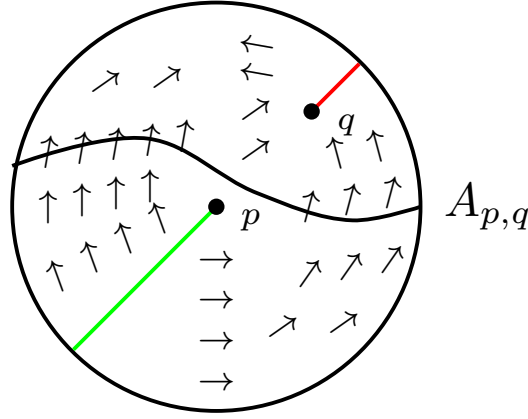
$$R_{\pm} := \exp_p(\pm \frac{2\epsilon}{\|Q\|} Q)$$

orthogonal. Durch eine Abschnidefunktion ändern wir Y in der Umgebung des Randes von $B_{2\epsilon}(p)$ so zu einem Vektorfeld $\tilde{Y}$ ab, dass $\tilde{Y}$ am Rand tangential zum Rand ist und auf $\tilde{B}$ nicht verschwindet.

Sei $\varphi : U \subseteq \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ der Fluss von $\tilde{Y}$, d.h. $(d/dt)\varphi(t,x) = \tilde{Y}(\varphi(t,x))$, $\varphi(0,x) = x$. Es gilt $\partial_Y f = g(\text{grad } f, \text{grad } f) \geq 0$ und man sieht, dass sich für geschickt Wahl von $\tilde{Y}$ auch $\partial_{\tilde{Y}} f \geq 0$ gilt. Somit schneidet jede Flusslinie $\varphi(\mathbb{R}, x)$ höchstens einmal $A_{p,q}$. Man überlegt sich auch leicht, dass der Fluss auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist und dass entlang der Flusslinie f für $t \rightarrow \pm\infty$ gegen das Maxi-

mum bzw. Minimum konvergiert. Insbesondere schneidet jede Flusslinie auch mindestens einmal die Menge $A_{p,q}$. Somit definiert φ einen Diffeomorphismus von $A_{p,q} \times \mathbb{R}$ auf $\tilde{B}$. Es folgt dass $A_{p,q}$ diffeomorph zu einem Intervall ist und dass $B_{2\epsilon}(p) \setminus A_{p,q}$ genau zwei Zusammenhangskomponenten hat. Wir bezeichnen die Zusammenhangskomponente von p mit Z_p^q .

Übung 3.10.23. Auf dem Rand von Z_p^q zeigt der Vektor $-\text{grad } d(\cdot, p)$ in Z_p^q hinein.



Lemma 3.10.24. Seien $q_1, q_2 \in B_{2\epsilon}(p) \cap S \setminus \{p\}$, $q_1 \neq q_2$. Dann sind die Schnitte von A_{p,q_1} mit A_{p,q_2} transversal.

Hier bedeutet transversal schneiden: $T_x A_{p,q_1} \neq T_x A_{p,q_2}$ für alle $x \in A_{p,q_1} \cap A_{p,q_2}$.

Beweis: Angenommen in $x \in A_{p,q_1} \cap A_{p,q_2}$ gilt

$$T_x A_{p,q_1} = T_x A_{p,q_2} =: V$$

Der Vektor $\underbrace{\text{grad } d(\cdot, p)}_{W_0 :=} - \underbrace{\text{grad } d(\cdot, q_1)}_{W_1 :=} \in T_x M$ ist ungleich 0 und orthogonal auf V . Beide Vektoren W_0 und W_1 haben Länge 1. Man erhält also W_1 aus W_0 durch Spiegelung an V . Dasselbe gilt auch, wenn wir W_1 durch $W_2 := \text{grad } d(\cdot, q_2)$ ersetzen, somit $W_1 = W_2$. Dies impliziert aber mit $d(x, p) = d(x, q_1) = d(x, q_2)$, dass $q_1 = q_2$, ein Widerspruch. ■

Definition 3.10.25. Der Stern um p ist die Menge

$$\Sigma(p) := \bigcap \left\{ \overline{Z_p^q} \mid q \in B_{2\epsilon}(p) \cap S, \quad q \neq p \right\} = \{x \in M \mid d(x, p) \leq d(x, q) \quad \forall q \in S \setminus \{p\}\}.$$

Lemma 3.10.26.

$$\Sigma(p) \subset B_\epsilon(p)$$

Beweis: Angenommen $x \in B_\epsilon(p) \setminus \Sigma(p)$. Dann gilt also $\epsilon \leq d(x, p) \leq d(x, q)$ für alle $q \in S$. Somit ist $S \cup \{x\}$ ebenfalls ϵ -separiert. Wir haben einen Widerspruch zur Maximalität von S erhalten. ■

Somit haben wir eine Zerlegung

$$M := \bigcup_{p \in S} \Sigma(p).$$

Zwei verschiedene Sterne sind im Inneren disjunkt, können am Rand aber eine gemeinsame Seitenflächen haben. Diese sind dann Strecken in Äquidistanzmenge. Die Ecken sind charakterisiert dadurch, dass ihre Distanz zu S von mindestens drei Punkten in S realisiert wird.

Es verbleibt, den Stern in Dreiecke zu zerlegen. Wir sehen mit Lemma 3.10.24, dass der Stern um p eine Fläche mit Ecken ist. Das Vektorfeld $-\text{grad } d(\cdot, p)$ ist transversal zu allen Seitenflächen von $\Sigma(p)$. Außerdem ist offensichtlich $\exp_p^{-1}(\Sigma(p))$ sternförmig um 0. Sind nun $e_1 = \exp_p X_1$ und $e_2 = \exp_p X_2$ zwei Ecken, die durch ein glattes Randstück verbunden sind. Dann schließt dieses Randstück zusammen mit den Kurven $c_i : [0, 1] \rightarrow M, t \mapsto \exp_p(tX_i)$ eine Fläche mit Ecken ein, die zu einem Dreieck diffeomorph ist. Der Stern $\Sigma(p)$ wird auf diese Art in Dreiecke zerteilt. Wir haben eine Triangulierung von M konstruiert und somit Satz 3.10.9 für Flächen ohne Rand gezeigt.

Um Satz 3.10.9 für Flächen mit Rand und Ecken zu zeigen, muss man einige kleine Zusätze in der obigen Argumentation dazufügen, die jedoch keine neuen mathematischen Ideen beitragen. Dieser Fall soll deswegen nicht genauer ausgeführt werden.

3.11 Der Laplace-Operator

Sei (M, g) eine m -dimensionale orientierte riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand.

Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dann gilt $d(X \lrcorner \text{dvol}^g) = \text{div}(X) \text{dvol}^g$. Also gilt für $f \in C^\infty(M)$, dass

$$\text{div}(fX) \text{dvol}^g = d(fX \lrcorner \text{dvol}^g) = \underbrace{df \wedge (X \lrcorner \text{dvol}^g)}_{df(X) \text{dvol}^g} + \overbrace{f d(X \lrcorner \text{dvol}^g)}^{\text{div}(X) \text{dvol}^g}.$$

In der Unterklammerung haben wir benutzt: sowohl $df \wedge (X \lrcorner \text{dvol}^g)$ als auch dvol^g sind m -Formen auf M . Wegen $\dim \bigwedge^m T_p^* M = 1$ gibt es eine Zahl $\alpha(p) \in \mathbb{R}$ mit

$$\left(df \wedge (X \lrcorner \text{dvol}^g) \right) \Big|_p = \alpha(p) \text{dvol}^g \Big|_p.$$

Um $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ zu bestimmen, setzen wir X in das erste Argument ein und erhalten dann aus der linken Seite

$$(X \lrcorner df) \wedge (X \lrcorner \text{dvol}^g) - df \wedge \underbrace{(X \lrcorner X \lrcorner \text{dvol}^g)}_{=0}.$$

Aus der rechten Seite erhalten wir durch Einsetzen von X

$$\alpha X \lrcorner \text{dvol}^g,$$

somit $\alpha = X \lrcorner df = df(X) = \partial_X f = \langle \text{grad}(f), X \rangle$. Damit haben wir insgesamt

$$\text{div}(fX) = \langle \text{grad}(f), X \rangle + f \text{div}(X).$$

Indem wir den Divergenzatz, Satz 3.8.11, auf das Vektorfeld fX anwenden, erhalten wir:

Lemma 3.11.1. *Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M)$, so dass $\text{supp}(fX)$ kompakt ist. Dann gilt für ein äußeres Einheitsnormalenfeld $\nu : \partial M \rightarrow TM$ von*

M , dass

$$\int_{\partial M} \langle fX, \nu \rangle \, \mathrm{dvol}^g = \int_M \langle \mathrm{grad}(f), X \rangle \, \mathrm{dvol}^g + \int_M f \, \mathrm{div}(X) \, \mathrm{dvol}^g.$$

Für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ mit kompaktem Träger definiere ein Skalarprodukt auf $\mathfrak{X}(M)$ durch

$$(X, Y) := \int_M \langle X, Y \rangle \, \mathrm{dvol}^g.$$

Für $f, h \in C^\infty(M)$ mit kompaktem Träger setze

$$(f, h) := \int_M fh \, \mathrm{dvol}^g.$$

Interpretation von Lemma 3.11.1 für kompakte M mit leerem Rand

Es folgt, dass $-\mathrm{div}: \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ adjungiert zu $\mathrm{grad}: C^\infty(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ ist.

Dies gilt auch auf dem Raum ausreichend schnell abfallender glatter Funktionen auf $\mathbb{R}^n$.

Definition 3.11.2. Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) definiere den **Laplace-Operator** durch

$$\Delta := \mathrm{div} \circ \mathrm{grad}: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M).$$

Beispiel 3.11.3. Sei $M = \mathbb{R}^m$ mit dem euklidischen Skalarprodukt. Dann gilt für $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathrm{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x^m} \end{pmatrix}$$

und für $Y = (Y_1, \dots, Y_m)^T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$:

$$\mathrm{div} Y = \sum_{j=1}^m \frac{\partial Y_j}{\partial x^j}.$$

Das ergibt dann

$$\Delta f = \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{(\partial x^j)^2}.$$

Ist $\partial M = \emptyset$, so ist Δ selbstadjungiert.

Für $f, h \in C^\infty(M)$ rechne

$$\int_M f(\Delta h) \, \mathrm{dvol}^g = \int_{\partial M} \langle f \mathrm{grad}(h), \nu \rangle \, \mathrm{dvol} - \int_M \langle \mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(h) \rangle \, \mathrm{dvol}^g.$$

Damit erhält man

$$\int_M f(\Delta h) \, \mathrm{dvol} - \int_M (\Delta f)h \, \mathrm{dvol} = \int_{\partial M} (f \partial_\nu h - (\partial_\nu f)h) \, \mathrm{dvol}.$$

Anschaulich: für kompakte M mit $\partial M = \emptyset$ ist Δ selbstadjungiert ist⁵⁶.

⁵⁶Dies ist genau genommen zu ungenau formuliert und auch nicht wirklich eine Folgerung. Für eine präzise For-

Wichtige Gleichungen

(Ab hier keine Beweise, sondern nur überblicksartig).

- (i) Sei $f \in C^\infty(M)$. Gibt es ein $u \in C^\infty(M)$ mit $\Delta u = f$ (und Randbedingungen)?

Poisson-Gleichung

Ist u eindeutig?

Es gibt zB. die Randbedingungen

- (a) Dirichlet-Randbedingung: $u|_{\partial M} = 0$.
(b) Neumann-Randbedingung: $\partial_\nu u|_{\partial M} = 0$.

Antworten:

- Falls M zusammenhängend und kompakt ist mit $\partial M \neq \emptyset$ und Dirichlet-Randbedingung, dann gibt es eine eindeutige Lösung von $\Delta u = f$ und (a).
- Falls M kompakt zusammenhängend ist und $\partial M = \emptyset$ gilt, so gilt

$$\int_M (\Delta u) 1 \, d\text{vol}^g = \int_M u \underbrace{\Delta 1}_{=0} \, d\text{vol}^g = 0.$$

Also existiert keine Lösung, falls $\int_M f \, d\text{vol}^g \neq 0$.

Man kann zeigen, dass im Falle $\int_M f \, d\text{vol}^g = 0$ eine (bis auf Konstanten) eindeutige Lösung existiert.

- (ii) Finde $\lambda \in \mathbb{R}$ und $u \in C^\infty(M)$ mit $\Delta u = \lambda u$ und Dirichlet-Randbedingung $u|_{\partial M} = 0$.

Eigenwertgleichung

Satz 3.11.4. Sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann gibt es reelle Zahlen $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$ und Funktionen $u_i \in C^\infty(M)$ so dass

$$-\Delta u_i = \lambda_i u_i, \quad u_i|_{\partial M} = 0, \quad \int_M u_i u_j \, d\text{vol}^g = \delta_{ij}.$$

Weiter ist $\text{span} \{u_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ dicht im Raum $\{f \in C^\infty(M) \mid f|_{\partial M} = 0\}$.

Beispiele 3.11.5 (Anwendungen). (a) *Elektrostatik.* Man betrachte ein zeitunabhängiges elektrisches Feld ohne magnetische Felder und ohne Ströme.

Ladungsdichte $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, elektrisches Feld $E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Gaußsche Gesetz: $\text{div } E = \rho$.

Faradaysche Gesetz $\text{rot } E = 0$. Also existiert ein elektrisches Potential $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $E = \text{grad } U$.

Somit

$$\Delta U = \rho$$

Problem (i) betrachtet: Sei ρ gegeben. Was wissen wir über U (und E)?

- (b) *Schwingungsfrequenzen.*

- (1) $m = 1$: Gegeben sei eine Saite $(a, b) \subset \mathbb{R}$,

mulierung müsste zuerst geklärt werden, wann man solch einen Differentialoperator selbstadjungiert nennt, auf welchem Banchraum er überhaupt definiert ist und mehrere funktionalanalytische Fragen.

(2) $m = 2$: Gegeben sei eine Trommel mit Form $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,

(3) $m = 3$: Gegeben sei ein Körper der Form $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

(Luft in einem Instrument, eine Glocke,...)

In welchen Frequenzen schwingt der Gegenstand?

Mathematisch: bestimme alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit Lösung der Eigenwertgleichung:

$-\Delta u = \lambda u$ und Randbedingungen, z. B. Dirichlet-Randbedingung $u|_{\partial M} = 0$.

Kann man die Form hören?

Nein. Es gibt [polygonale Gegenbeispiele](#).

A Beweisdetails zur riemannschen Geometrie

A.1 Beweisdetails für Satz 2.7.2

Auf diese Details müssen Sie leider noch etwas warten. Entschuldigung. Und noch eine schlimmere Warnung: wenn ich diesen Teil hier aufschreibe, kann sich vorne noch etwas ein bisschen ändern. Das werden dann aber nur Kleinigkeiten sein. Nochmals Entschuldigung.

Zu tun

- Äquivalenz von (iv) und (iv')
- Details zur Existenzaussage in Satz 2.7.2 in einem Spezialfall
- Details zur Existenzaussage in Satz 2.7.2 im allgemeinen

Stichwortverzeichnis

Symbols

1-Jet	38
$C^\infty(M)$ -Linearität im 1. Argument ...	45, 97
C^r -Immersion	6
m -dimensionale Volumen	35

A

Abbildung	
homotop	131
glatt	131
Homotopie	131
orientierungserhaltend	135
Ableitung	23, 83
innere oder kovariante	42
Richtungs~	85
Abschneidefunktion	86, 120
Abstand	103
Abzählbarkeitsaxiom	
zweites	29
Additivität im 2. Argument	45, 97
affiner Zusammenhang	97
Aharonov-Bohm-Effekt	152
Algebra	
äußere Algebra	112
Tensoralgebra	112
alternierend	
Funktion	112
Tensor	112
Alternierungsoperator	111
Ampère-Maxwell-Gesetz	151
analytisch	
reell-analytisch	72
Antiderivation	116
Atlas	20, 72
maximaler	20, 73
mit Rand	76
äußere Algebra	112
äußeres ENF	146
Ausschöpfung	
kompakt	79
äußeres Differential	116

B

Basis

orientierte	133
Basis der Topologie	29
Betti-Zahl	122

C

Cartan-Differential	116
Christoffel-Symbole	43
mit gesenktem Index	
auf riem. Mgfk.	99
auf Untermgfk.	46

D

Dach-Produkt	115
das Poincarésche Kreisscheibenmodell der	
hyperbolischen Ebene	105
de-Rham-Kohomologie	122
Derivation	85, 89
Lokalität	85
diffeomorph	69
C^ℓ -diffeomorph	79
Diffeomorphismus	18
lokaler	26
C^ℓ -Diffeomorphismus	79
Diffeomorphismusklassen	69
Differential	23, 39, 83
äußeres	116
Cartan-~	116
Differentialform	115
Dirichlet-Randbedingung	173
Divergenz	146
Divergenzsatz	147
Dreieck (geod.) in einer riem. Mgfk.	104
Durchflutungsgesetz	
erweitertes	151

E

Ecken	161
Ecken eines 2-Simplex σ	161
Eichtransformation	152
Eichung	150
Eigenwertgleichung	173
Einheitsnormalenfeld	48
äußeres	146
Einheitsvektorfeld	157

- Eins
 Partition der 81
 1-Form 88
 Einsteinsche
 Summenkonvention 44
 Euler-Charakteristik 162
 exakt
 Form 122
 Exponentialabbildung 165
 extrinsischen Geometrie 47
- F**
 f -verwandt 47
 Faraday-Gesetz 151
 Faser-Integral 129
 Feld
 Einheitsnormalenfeld 48
 Fläche 48
 Minimalfläche 63
 Flächeninhalt 37
 Form
 k -Form 115
 1-Form 88
 exakt 122
 Faser-Integral 129
 geschlossen 122
 Integral 139
 Pfaffsche $\sim$ 88
 Pullback 121
 Fundamentalform
 Zweite
 Vektorwertig 54
 1. Fundamentalform 25
 Koordinatendarstellung 25
 2. Fundamentalform 51
 Koordinatendarstellung 52
 Funktion
 alternierend 112
- G**
 Gauß-Bonnet
 für Flächen in $\mathbb{R}^3$ 70
 Gauß-Gleichung 57
 Gaußkrümmung 53, 104
 Gaußsche Gesetz 151
 Gaußsche Gesetz für Magnetfelder 151
- Gebiet
 mit glattem Rand 144
 geodätische Krümmung 155
 Geodätische 55, 102
 Geometrie
 extrinsische 47
 innere 47
 intrinsisch 47
 Geschlecht 70
 geschlossen
 Form 122
 Gesetz
 Ampere-Maxwell 151
 Faraday 151
 Gauß 151
 glatter Rand 144
 Gleichung
 Eigenwert- $\sim$ 173
 Poisson- $\sim$ 173
 gradiert kommutativ 124
- H**
 Hauptkrümmung 52
 Hauptkrümmungsrichtung 52
 Hodge-Stern-Operator 150
 homotop 131
 glatt $\sim$ 131
 Homotopie 131
 homotopieäquivalent 131
 Homotopieäquivalenz 131
 hyperbolische Ebene 105
 Hyperfläche 48
- I**
 Immersion 6
 Induktionsgesetz 151
 Injektivitätsradius in p 165
 Injektivitätsradius von (M, g) 165
 innere Geometrie 47
 Integral
 Faser 129
 Form 139
 integrierbar 34
 inverser musikalischer Isomorphismus 96
 Isometrie 26
 (zwischen riem. Mgfk.) 96

lokale.....	26
lokale (riem. Mgfk.).....	96
isometrisch.....	26, 96
Isomorphismus	
musikalischer.....	95

J

Jabobi-Identität	91
------------------------	----

K

Kanten eines 2-Simplex.....	161
Karte	20, 72
Kartenwechsel.....	72
Karten	
verträgliche $\sim$	73
Kartengebiet.....	72
Kartenwechsel	72
Kettenregel.....	84
Koeffizientenfunktionen	41
der riemannschen Metrik	94
Kohomologie	
de-Rham-	122
kompakt	
Ausschöpfung	80
konform	103
Koordinaten	20
Koordinatenbereiche	72
Koordinatenkovektorfeld.....	40
Koordinatenvektorfeld.....	22, 83
Koordinatenvektorfelder	83
Korand.....	122
Koszul-Formel	98
Kotangentialbündel.....	87
Kotangentialraum.....	25, 39
Kotangentialraums.....	85
kovariante Ableitung.....	42, 97
Kozykel	122
Krümmung	
einer ebenen Kurve.....	37
Gauß~	53
geodätische	155
Hauptkrümmung.....	52
Krümmungstensor.....	56
Krümmungstensor (Mgfk.).....	104
mittlere	52
Mittlere-Kr.-feld	55

Krümmungsfeld	
Mittlere-	55
Krümmungstensor	
Riemann	56
riemannscher	56
riemannscher $\sim$ einer Mgfk.	104
Kurve	82
Krümmung.....	37
regulär	36
Tangentialvektor	36

L

Länge.....	26, 102
Laplace-Operator.....	172
Levi-Civita-Zusammenhang	97
Lie-Klammer	91
Antisymmetrie	91
Jacobi-Identität	91
lokale C^r -Parametrisierung.....	7
lokal kompakt	80

M

Möbiusband	50
Mannigfaltigkeit	74
Atlas.....	72
glatte/differenzierbare.....	74
Karte	72
mit Ecken.....	77
orientierte.....	134
Orientierung.....	134
Produkt~	75
Rand.....	77
reell-analytische.....	74
riemannsche.....	140
topologische.....	74
C^k -Mannigfaltigkeit mit Rand.....	76
maximaler Atlas	20
Maxwell-Gleichungen	151
Menge	
messbare.....	31
Volumen einer.....	34
messbare Menge	31
Metrik	
riemannsche.....	93
metrisch	97
minimal	

Untermannigfaltigkeit	63	Produktregel II	45, 97
Minimalfläche	63	Projektion	
Minimalflächen	54	Normal~	42
instabile	64	Tangential~	42
Minkowski-Skalarprodukt	151	Projektionsabbildung	93
mittlere Krümmung	52	des (r, s) -Tensorbündel	93
Normalenfeld	55	des Kotangentialbündels	88
musikalischer Isomorphismus	95	des Tangentialbündels	88
N		Pullback	94, 120
Neumann-Randbedingung	173	R	
Normale		Rückzug	121
Einheitsnormalenfeld	48	Rand	
Normalenvektor	37	Mannigfaltigkeit	77
Normalprojektion	42	Randbedingung	
Normalraum	42	Dirichlet	173
O		Neumann	173
Oberflächeninhalt	37	Raum	
Operator		zusammenziehbar	132
Alternierungs~	111	reell-analytisch	72
Hodge-Stern~	150	reguläre Kurve	36
Laplace~	172	regulärer Wert	6
orientierbar	134	Satz vom	6
Orientierung	133	Richtungsableitung	85
einer Mannigfaltigkeit	134	Riemann	
eines Vektorraums	133	riemannsche Metrik	93
orient. Mannigfk.	134	riemannsche	
orientierungserhaltend	135	Mannigfaltigkeit	140
orientierungsumkehrend	135	riemannsche Mannigfaltigkeit	93
Randorientierung	136	Riemannsche Metrik	
orientierungsumkehrend	135	Pullback	94
P		riemannscher	
parallel	109	Krümmungstensor	56
Parametrisierung		Krümmungstensor (Mgfk.)	104
proportional zur Bogenlänge	103	S	
Partition der Eins		Satz	
starke Version	81	von Gauß–Bonnet	70
Poincaré-Lemma	133	Satz von Gauß–Bonnet	
Poisson-Gleichung	173	lokale Version	156
polygonale Flächen	154	Satz von Meusnier	55
Produktatlas	75, 78, 125	Satz von Stokes	
Produktmannigfaltigkeit	75, 125	klassischer ~	150
Produktregel	41	Schnittkrümmung	104
Produktregel I	45, 97	Seitenflächen eines 2-Simplex	161
		k -Simplex	161

glatter <i>sim</i>	161
singulärer Wert	6
Skalarprodukt	
Minkowski	151
Standard- k -Simplex.....	161
Stokes	
klassischer Satz von $\sim$	150
Satz von	141
Struktur	
$\mathcal{C}^k$	73
Summe	
Einsteinsche Summenkonvention.....	44

T

Tangentialbündel.....	38, 87
Tangentialprojektion.....	42
Tangentialraum	14, 82
Tangentialvektor.....	36
Tangentialvektoren	82
Tensor	
(r, s) - $\sim$	92
alternierend.....	112
Tensoralgebra	112
(r, s) -Tensorbündel.....	93
Theorema egregium.....	58
torsionsfrei	97
Torsionsfreiheit	45, 97
Träger	60, 64
eines Variationsvektorfelds	60
Transformationsformel.....	31

U

Überdeckung	71
lokal endlich	80
offen	71
Verfeinerung	80
Uniformisierungssatz.....	108
Untermannigfaltigkeit.....	4
Definition	4
minimal.....	63
Untermannigfaltigkeitskarte.....	5

V

Variation	60
$\sim$ feld.....	60
kompakter Träger	60

Variationsfeld.....	60
Variationsformel	61
Vektorfeld.....	21, 88
Divergenz	146
Koordinaten $\sim$	22
Vektorraum	
Basis	
orientierte	133
orientierter	133
Verfeinerung	80
verwandt	56
Vierer-Vektorpotential	152
Volumen	34
m -dimensional	35
Volumenform	137

W

Wedge-Produkt.....	115
Weingarten-Abbildung.....	50
Wert	
regulärer	6
singulärer	6
Willmore-Energie.....	vii
Winkel	103
orientiert.....	156

Z

zusammenhängende Summe.....	69
Zusammenhang	
affiner	97
Zusammenhangs-1-Form	157
Zweites Abzählbarkeitsaxiom	29

Symbolverzeichnis

$[D, \tilde{D}]$	Kommutator	S. 90	Γ_{ij}^s	Christoffel-Symbole	S. 43
$[X, Y]$	Lie-Klammer	S. 91	$\text{grad}(f)$	Gradient	S. 96
$\otimes^* V$	Tensoralgebra	S. 112	$\ast$	Hodge-Stern-Operator	S. 150
$\bigwedge^* V$	äußere Algebra	S. 112	$\text{Hom}(V, W)$	lin. Abb.	S. 112
$\bigwedge^k f$	von alt. Tens. ind. Abb.	S. 112	Π_p	2. Fundamentalform	S. 51
$\bigwedge^k V$	alt. Tensoren	S. 112	Π	2. FF	S. 52
$\text{Bil}(A, B)$	Bilin. Abb.	S. 92	$\text{im}(\Phi)$	Bild von Φ	S. 21
$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$	Borelsche σ -Algebra auf $\mathbb{R}^m$. . .	S. 31	$\int_M f \, d\mu^M$	Integral von f über (M, μ) . . .	S. 34
$\mathcal{C}^\infty(M)$	glatte Fktn $M \rightarrow \mathbb{R}$	S. 41	$\kappa_\gamma^{\text{geo}}(t)$	geod. Krümmung von γ	S. 155
$\mathcal{C}^\omega$	reell-analytisch	S. 72	$\kappa_c(t)$	Krümmung von c	S. 37
$\mathcal{C}^r(N, M)$	glatte Abb. von N nach M . . .	S. 18	$\int_U^{[x]} \beta$	Integr. einer Form in Karte . . .	S. 139
$\mathcal{C}^r$	r -mal stetig differenzierbar . . .	S. viii	λ_m	Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^m$	S. 31
$\mathcal{I}\omega$	Faser-Integral	S. 129	diag	Diagonalmatrix	S. 136
$\mathcal{J}f$	1-Jet von f	S. 38	$\text{sgn}(\sigma)$	Signum von σ	S. 48
$\mathcal{L}_{\mathbb{R}^m}$	Lebesg. σ -Algebra auf $\mathbb{R}^m$. . .	S. 31	$\mu^M(B)$	m -dim. Volumen von $B \subset M$. .	S. 34
$\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$	von Atlas induz. Topologie . . .	S. 72	μ^M	Maß auf $\mathcal{M}(M)$	S. 35
$\mathcal{O}_X$	Topologie auf X	S. 29	$\nabla_\eta Y$	innere Ableitung	S. 42
$\mathcal{S}_k$	Symm. Gruppe von $\{1, \dots, k\}$. .	S. 6	$\ \bullet\ $	Norm	S. 27
$\mathcal{X}_i^\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$	i -tes Koordinatenvekt.f.	S. 22	ν	Einheitsnormalenfeld	S. 48
$\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big _p$	i -tes Koordinatenvekt.f.	S. 83	$\Omega^1(M)$	1-Formen	S. 89
$\frac{\partial}{\partial x^i}$	i -tes Koordinatenvekt.f.	S. 114	$\Omega^*(M)$	Differentialformen	S. 116
$\deg(\omega)$	Grad	S. 115	$\Omega^k(M)$	k -Formen	S. 115
Δ_k	Standard- k -Simplex	S. 161	$\dot{\cup}$	disj. Vereinigung	S. 33
δ_{ij}	Kronecker-Symbol	S. 29	∂^{Mfg}	Rand für Mannigfaltigkeiten . .	S. 144
Δ	Laplace-Operator	S. 172	∂^{top}	Rand für top. Räume	S. 144
$\text{Tr}(A)$	Spur von A	S. 52	$\partial_X f$	Ableitung von f in Richtung X .	S. 39
$\text{Tr}(A)$	Spur von A	S. 61	$\partial_X f$	Richtungsableitung	S. 85
$\text{div}(X)$	Divergenz	S. 146	∂M	Rand von M	S. 77
$\dot{c}$	Zeitableitung von c	S. 24	$\perp$	senkrecht	S. 42
dvol_p^g	Volumenform	S. 138	$\varphi^* g$	Pullback	S. 94
$\flat$	musikalischer Isomorphismus . .	S. 95	π_p^N	Normalprojektion	S. 42
$\mathfrak{X}(M)$	Vektorfelder auf M	S. 21	π_p^T	Tangentialprojektion	S. 42
$\Gamma(TM)$	glatte Vektorfelder	S. 89	π^i	Projekt. auf die i -te Komp. . . .	S. 40
$\Gamma(\mathcal{T}^{(r,s)} M)$	Tensorfelder	S. 93	π_{T^*M}		S. 87
Γ_{ijs}	Christoffel-Symb. m. ges. Ind. . .	S. 46	π_{TM}		S. 87

$\psi^* \mathcal{A}_1$	zurückgez. Atlas	S. 75	1. FF	1. Fundamentalform	S. 25
$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	S. 7	ENF	Einheitsnormalenfeld	S. 48
$d_p \varphi^i$	Koordinatenkovektorfeld	S. 40	$\text{Vol}(U)$	Volumen	S. 61
$d_p \varphi$	Differential	S. 82	$\angle(X, Y)$	Winkel von X zu Y	S. 103
$d_p f$	Ableitung von f in p	S. 23	$B = (B_1, B_2, B_3)$	magnetisches Feld	S. 151
$d_p f$	Differential von f	S. 83	$B^k(M)$	Koränder	S. 122
df	Differential	S. 89	$B_1(0)$	Einheitsball	S. 78
d	Cartan-Differential	S. 116	$b_k(M)$	Bettizahl	S. 122
res_U	Restriktion auf U	S. 85	$E = (E_1, E_2, E_3)$	elektrisches Feld	S. 151
$N(t)$	Normalenvektor	S. 36	$e_1, \dots, e_m$	Standardbasis von $\mathbb{R}^m$	S. 22
$N_p M$	Normalraum	S. 42	$E_1, \dots, E_m$	eine Orthonormalbasis	S. 55
$T(t)$	Tangentialvektor	S. 36	f^*	Adjungierte der lin. Abb f	S. 52
$T^* M$	Kotangentialbündel	S. 87	f^*	Pullback	S. 121
$T_p^* M$	Kotangentialraum	S. 25	$F^\mathcal{V}$	Variation zum Var.-Vf. $\mathcal{V}$	S. 60
$T_p^* M$	Kotangentialraum	S. 85	$f^{\otimes k}$		S. 112
TM	Tangentialbündel	S. 38	$F_\bullet$	Variation einer U.-Mgfk.	S. 60
$\mathbb{S}^2$	2-Sphäre	S. 20	g_p^M	1. FF bei p	S. 25
$\mathcal{A}_{\max}$	max. Atlas	S. 73	g^{ij}	Koord.-darst. der Kometrik	S. 46
$\mathcal{A}$	Atlas	S. 72	g_{ij}^φ	Koord.darstellung 1. FF	S. 25
$\mathcal{B}_M$	abz. Basis des top. Raums M	S. 74	$H^*(M)$	deRham Kohomologie	S. 124
$\mathcal{B}$	Basis einer Topologie	S. 29	$H^k(M)$	k -te de-Rham-Kohomologie	S. 122
$\mathcal{D}(A)$	Raum der Derivationen von A	S. 89	H_p	mittlere Krümmung	S. 52
$\mathcal{D}_p$	Derivationen in p	S. 85	$J_y f$	Jacobimatrix von f in y	S. 32
$\sharp_p$	invers. musik. Isomorph.	S. 96	K_p	Gaußkrümmung in p	S. 53
$\sharp$	invers. musik. Isomorph.	S. 96	M^m	m -dim. Mannigfaltigkeit	S. 16
$\mathcal{L}(c)$	Länge der Kurve c	S. 26	$R(X, Y)Z$	riem. Krümmgs.-tensor	S. 56
$\mathcal{M}(M)$	messb. Mengen von M	S. 35	R_{ijk}^ℓ	Koeff. des riem. Kr.-tensors	S. 56
$\mathcal{O}_V$	Orientierung	S. 133	V^*	Dualraum von V	S. 40
$\text{supp}(f)$	Träger einer Funktion f	S. 64	$V^{\otimes k}$	k -faches Tensorpr. von V	S. 111
supp	Träger	S. 60	$W_p(X)$	Weingartenabbildung	S. 50
$\mathcal{T}_p^{(r,s)} M$	(r, s) -Tensorraum	S. 92	$X \lrcorner \omega$	Einsetzen von X	S. 146
(ESK)	Summenkonvention	S. 44	$Z^k(M)$	Kozykel	S. 122

Liste der Sätze

A

Ampere-Maxwell-Gesetz 151

D

Divergenzsatz 147

Durchflutungsgesetz

erweitertes 151

F

Faraday-Gesetz 151

G

Satz von Gauß 147

Gauß-Bonnet

für Flächen in $\mathbb{R}^3$ 70

lokale Version 156

Gauß-Gesetz 151

Gauß-Gleichung 57

H

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 131

I

Immersionssatz 6

K

Klassifikation der 1-dim. Mannigfkt. 149

Klassifikation der orientierbaren Flächen 70

L

Lie-Klammer von Koordinatenvektorfeldern 98

M

Maxwell-Gleichungen 151

Satz von Meusnier 55

P

Partition der Eins

schwache Version 82

starke Version 81

Poincaré-Lemma 133

R

Satz

vom regulären Wert 6

S

Satz von Stokes 141

klassischer $\sim$	150
T	
Theorema egregium	58
Transformationsformel	31
U	
Umlaufsatz für ebene Kurven	160
Uniformisierungssatz	108
Teilaussage	108
V	
Variationsformel	61

Urheberrechte

- Abb. 3.7.2:** Kleinsche Flasche in den Schaukästen der Fakultät für Mathematik, Regensburg. Die Schaukästen wurden von Jürgen Neukirch und Mitarbeiter(inne)n eingerichtet. Foto von Bernd Ammann. Die Rechte an diesem Bild liegen bei der Fakultät oder dem Fotografen (BA) 136
- Abb. 3.7.1:** Zwei Möbius-Bänder aus Papier, Modelle in den Schaukästen der Fakultät für Mathematik, Regensburg. Die Schaukästen wurden von Jürgen Neukirch und Mitarbeiter(inne)n eingerichtet. Foto von Bernd Ammann. Die Rechte an diesem Bild liegen bei der Fakultät oder dem Fotografen (BA) 135
- Abb. 2.8.2:** from Wikipedia, see https://commons.wikimedia.org/wiki/File:832_symmetry_0zz.png, Autor Tomruen, Lizenz CC BY-SA 106
- Abb. 2.8.4:** Autor Anton Sherwood / Public domain, Wikimedia, see [here for details](#) 107
- Abb. 2.8.1:** This file is taken from wikipedia. Its license is the CC BY 3.0 105
- Abb. 1.18 links:** This file is taken from wikipedia. Its license is the Creative Commons Attribution 3.0 Unported. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation 67
- Abb. 1.18 rechts:** Von Leonid_2 – Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8643414> 67
- Abbildung in Beispiel 3.10.11:** Alle Rechte bei Bernd Ammann 163
- Abbildung 3.10.1:** Alle Rechte bei Bernd Ammann 161
- Beispiele 2.6.8 (5):** This file is taken from wikipedia. Its license is the CC BY 3.0 94
- Titelseite/Vorwort:** Die Boysche Fläche, gefertigt von Eva-Maria Strobel nach Plänen von B. Kuhn (Mercedes-Benz). Modell in den Schaukästen der Fakultät für Mathematik, Regensburg. Die Schaukästen wurden von Jürgen Neukirch und Mitarbeiter(inne)n eingerichtet. Foto von Bernd Ammann. Die Rechte an diesem Bild liegen bei der Fakultät oder dem Fotografen (BA) vii

Literaturverzeichnis

- [1] H. Amann, J. Escher, Analysis III, Birkhäuser, Kapitel XI und XII
- [2] I. Agricola, T. Friedrich, Global Analysis, AMS
- [3] W. Ballmann, Einführung in die Geometrie und Topologie, Birkhäuser 2015.
- [4] C. Bär, Elementare Differentialgeometrie, de Gruyter, detaillierte Zitate gemäß 2. Auflage
- [5] M. Barner, F. Flohr, Analysis II, de Gruyter, Kapitel 17
- [6] T. Bröcker, Analysis III, Kapitel IV und V, BI Wissenschaftsverlag
- [7] C. Cheeger, D. Ebin, Comparison Theorems in Riemannian Geometry Comparison theorems, AMS Chelsea Publishing
- [8] M. do Carmo, Riemannian Geometry, Birkhäuser
- [9] M. do Carmo, Differentialgeometrie von Kurven und Flächen, Vieweg Studium, Aufbaukurs Mathematik
- [10] H. Garcke, Vorlesungsskript Analysis auf Mannigfaltigkeiten, Sommersemester 2010
- [11] K. Jänich, Vektoranalysis, Springer
- [12] W. Kühnel, Differentialgeometrie, Vieweg
- [13] J. Lee, Introduction to smooth manifolds, Springer
- [14] J. Lee, Introduction to topological manifolds, Springer
- [15] J. Lee, Riemannian manifolds, Springer
- [16] S. Montiel, A. Ros, Curves and surfaces, Grad. Studies in Math. **69**, AMS
- [17] B. O'Neill, Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, Academic press
- [18] F. Warner, Foundations of Differentiable manifolds and Lie groups, Springer

Spezielle Kommentare zum Literaturverzeichnis

Zu [3]: Der Inhalt von [3, 1.1-1.6] sollte Ihnen bereits bekannt sein. Das Buch besteht aus recht unabhängigen Teilen. Wir werden in anderer Reihenfolge vorgehen.

Allgemeine Kommentare zum Literaturverzeichnis

Die Themen, die wir zu Anfang der Vorlesung machen wollen, entsprechen Kap 4 und evtl. 1.7 aus [3] in Verbindung mit Kapitel 2 und 3 aus [4]. Hier gehen wir dann bis zum Theorema egregium. Nachdem wir genügend Anschauung an Hand von Untermannigfaltigkeiten erhalten haben, lösen wir den umgebenden Raum von den Mannigfaltigkeiten und betrachten dann abstrakte Mannigfaltigkeiten wie z.B. in [3, Kapitel 2 und 3] oder im Buch [2]. Auch viele ältere Bücher sind nach wie vor aktuell, z.B. [6], [5], [11].

Gute Anschauung erhält man zunächst in den Büchern, die die Aspekte der Elementaren Differentialgeometrie mehr betonen, wie zum Beispiel [9], [4], [16], Anfang von [12]. Im Laufe der Zeit erkennt man dann aber, dass dies letztendlich nur Spezialfälle sind und wird dann mit abstrakteren Büchern wie zum Beispiel [18], [17], [13–15], [7], [8] glücklicher, oder je nach Interesse auch mit mehr physikalisch orientierter Literatur.

Zitierte Originalliteratur

- [19] C. Bär und A. Strohmaier, A rigorous geometric derivation of the chiral anomaly in curved backgrounds, *Comm. Math. Phys.* **347** (2016), 703–721.
- [20] J. Pérez, A new golden age of minimal surfaces, *Notices Amer. Math. Soc.* 64 (2017), no. 4, 347–358. <https://www.ams.org/journals/notices/201704/rnoti-p347.pdf>
- [21] K. Polthier, Unstable periodic discrete minimal surfaces 129–145, in *Geometric analysis and nonlinear partial differential equations*, editiert von S. Hildebrandt und H. Karcher, Springer 2003.