

Übungen zur Analysis IV

Universität Regensburg, Sommersemester 2020

Prof. Dr. Bernd Ammann

Abgabe bis Montag 22.06.2020 bis 14:00 Uhr in GRIPS



Übungsblatt 10

1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei A eine $\mathbb{R}$ -Algebra. Eine Derivation D auf A ist ein linearer Endomorphismus, der die Produktregel erfüllt, d.h. es gilt

$$D(x \cdot y) = D(x) \cdot y + x \cdot D(y)$$

für alle $x, y \in A$. Zeigen Sie: Sind D_1 und D_2 Derivationen auf A , dann ist der Kommutator $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ wieder eine Derivation auf A .

2. Aufgabe (4 Punkte)

Seien M und N Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f \in C^k(M, N)$, $k \geq 1$ nennt man Einbettung, wenn sie injektiv, das Differential an jeder Stelle injektiv und $f : M \rightarrow f(M)$ ein Homöomorphismus ist. Es seien $\mathbb{R}P^n$ und T^n wie in Aufgabe 1 auf Blatt 9 definiert. Zeigen Sie, dass folgende Abbildungen wohldefiniert und Einbettungen sind:

a) $f : T^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$f([x, y]) = ((R + r \cos(2\pi x)) \cos(2\pi y), (R + r \cos(2\pi x)) \sin(2\pi y), r \sin(2\pi x)),$$

wobei $0 < r < R$.

b) $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^5$, definiert durch $f([x, y, z]) = [xx, xy, xz, yy, yz, zz]$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Seien U, V, W, X, Y endlichdimensionale reelle Vektorräume. Für zwei reelle Vektorräume V_1, V_2 sei $L(V_1, V_2) = \{\varphi : V_1 \rightarrow V_2 \mid \varphi \text{ linear}\}$.

a) Konstruieren Sie einen Isomorphismus $\varphi : L(U, L(V, W)) \rightarrow L(U \otimes V, W)$.

b) Die 1. Aufgabe auf Tutoriumsblatt 6 liefert eine Abbildung $\varphi : L(V, X) \otimes L(W, Y) \rightarrow L(V \otimes W, X \otimes Y)$. Zeigen Sie, dass dies ein Isomorphismus ist.

c) Sei $\dim V \geq 6$. Konstruieren Sie eine lineare Abbildung $\varphi : \Lambda^2(\Lambda^3 V) \rightarrow \Lambda^6 V$, sodass für alle $v_i, w_i \in V$, $1 \leq i \leq 3$ gilt, dass

$$\varphi((v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) \wedge (w_1 \wedge w_2 \wedge w_3)) = v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \wedge w_1 \wedge w_2 \wedge w_3.$$

Ist diese Abbildung surjektiv? Ist sie injektiv?

4. Aufgabe (4 Punkte)

Das Tangentialbündel einer C^k -Mannigfaltigkeit M ist definiert als

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M.$$

Sei $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i \mid i \in I\}$ ein m -dimensionaler C^k -Atlas von M . Dann können wir Abbildungen Φ_i durch

$$\begin{aligned} \Phi_i : TU_i &= \bigcup_{p \in U_i} T_p M \rightarrow V_i \times \mathbb{R}^m \\ T_p U_i \ni v &\mapsto (\varphi_i(p), d_p \varphi_i(v)). \end{aligned}$$

definieren.

- a) Zeigen Sie: Die Menge $T\mathcal{A} = \{\Phi_i : TU_i \rightarrow V_i \times \mathbb{R}^m \mid i \in I\}$ bildet einen $2m$ -dimensionalen C^{k-1} -Atlas von TM .
- b) Zeigen Sie: Das Paar $(TM, (T\mathcal{A})_{\max})$ ist eine Mannigfaltigkeit, d.h. die notwendigen Voraussetzungen an $(TM, \mathcal{O}_{T\mathcal{A}})$ sind erfüllt.
- c) Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten, und sei $f \in C^k(M, N)$. Wir definieren das Differential $df : TM \rightarrow TN$ wie folgt: Für $v \in T_p M$ definieren wir $df(v) := d_p f(v) \in T_{f(p)} N$. Zeigen Sie: dann ist df ein Element von $C^{k-1}(TM, TN)$.