Übungen zur Analysis IV

Universität Regensburg, Sommersemester 2020

Prof. Dr. Bernd Ammann, Guadalupe Castillo-Solano

Abgabe bis Dienstag 02.06.2020 bis 12:00 Uhr in GRIPS

Übungsblatt 7

1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit und $\varphi : U \to V$ eine Karte von M. Beweisen Sie, dass die Koeffizientenfunktionen ${R_{ijk}}^\ell : V \to \mathbb{R}$ des Riemannschen Krümmungstensors direkt nach Definition 1.92 durch die Formel

$$ {R_{ijk}}^\ell = \frac{\partial \Gamma^\ell_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^\ell_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^m_{jk} \cdot \Gamma^\ell_{im} - \Gamma^m_{ik} \cdot \Gamma^\ell_{jm} $$

gegeben sind.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ eine glatte Funktion und

$$ \mathrm{Rot}(f) = \left\{ (x, y, z)^t \mid x^2 + y^2 = f(z)^2 \right\} \subset \mathbb{R}^3 $$

die Rotationsfläche des Graphen von f. Berechnen Sie die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform, die mittlere Krümmung und die Gauß-Krümmung an jedem Punkt von $\mathrm{Rot}(f)$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $(V, \langle ., . \rangle)$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt und $B : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Dann können wir die Spur von B auf drei verschiedene Arten einführen:

a) Ist $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis von V, dann definieren wir die Spur als $\mathrm{tr} B = \sum_{i=1}^n B(e_i, e_i)$.

b) Ist $\{f_1, \dots, f_n\}$ eine beliebige Basis von V und $g_{ij} = \langle f_i, f_j \rangle$, $b_{ij} = B(f_i, f_j)$, dann ist $\mathrm{tr} B = b_{ij} g^{ij}$ wobei g^{ij} die Einträge der zu $(g_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ inversen Matrix sind.

c) Sei $\tilde{B} : V \to V$ die lineare Abbildung, die durch $\langle \tilde{B}(x), y \rangle = B(x, y)$ für alle $x, y \in V$ eindeutig bestimmt ist. Dann setzen wir $\mathrm{tr} B := \mathrm{tr} \tilde{B}$.

Beweisen Sie, dass diese drei Definitionen übereinstimmen und daher insbesondere die Definitionen in a) und b) nicht von der Wahl der Basis abhängen.