Vorlesungsskript

Analysis III

Prof. Dr. Bernd Ammann

Wintersemester 2019/20

Universität Regensburg

Öffentliche Version

Datum der Kompilation: 29. April 2020

Inhaltsverzeichnis

I Komplexe Analysis (Funktionentheorie) 1

1 Kurvenintegrale in $\mathbb{R}^n$ . . . 1
1.1 Kurven in $\mathbb{R}^n$ und ihre Bogenlänge . . . 1
1.2 Integration von Vektorfeldern längs Kurven . . . 8
1.3 Kriterien für die Existenz von Potentialen und Rotation von Vektorfeldern . . . 11
1.4 Kurvenintegrale in $\mathbb{C}$ . . . 14
2 Komplexe Differenzierbarkeit . . . 16
2.1 Definition und Beispiele zur komplexen Differenzierbarkeit . . . 16
2.2 Komplexe und reelle Differenzierbarkeit . . . 17
2.3 Folgerungen aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen . . . 19
2.4 Beziehungen zwischen holomorphen Funktionen und konformen Abbildungen . . . 20
Wiederholung aus der Linearen Algebra . . . 21
2.5 Potenzreihen und analytische Funktionen . . . 25
Berechnungen mit konvergenten Potenzreihen . . . 30
Identitätssätze . . . 34
2.6 Die komplexe Exponentialfunktion und die „Logarithmusfunktion“ . . . 36
3 Der Cauchysche Integralsatz und Anwendungen . . . 41
3.1 Motivation . . . 41
3.2 Stammfunktionen . . . 42
3.3 Cauchyscher Integralsatz für Rechtecke . . . 44
3.4 Lokale Existenz von Stammfunktionen . . . 47
3.5 Homotopie . . . 49
3.6 Cauchyscher Integralsatz für homotope Kurven . . . 53
3.7 Die Windungszahl . . . 56
4 Die Cauchysche Integralformel und Anwendungen . . . 60
4.1 Die Cauchysche Integralformel . . . 60
4.2 Holomorphie versus Analytizität . . . 62
4.3 Weitere Anwendungen . . . 65
4.4 Mittelwertgleichung und das Maximums-Prinzip . . . 68
5 Holomorphe Fortsetzung . . . 70
5.1 Motivation und Beispiele . . . 70
5.2 Funktionselemente und Funktionsketten . . . 71
5.3 Mondromiesatz . . . 74
5.4 Technische Umsetzung der holomorphen Fortsetzung . . . 75
6 Isolierte Singularitäten . . . 77
6.1 Drei Typen von isolierten Singularitäten . . . 77
6.2 Meromorphe Funktionen . . . 78

6.3 Laurent-Entwicklung . . . 82
6.4 Laurententwicklung für isolierte Singularitäten . . . 85
6.5 Residuensatz und Anwendungen . . . 87
7 Der riemannsche Abbildungssatz . . . 93
8 Nachträge . . . 96
8.1 Zum Schwarzschen Spiegelungsprinzip . . . 96
8.2 Stärkere Version des riemannschen Abbildungssatzes. . . . 96

II Maß- und Integrationstheorie 99
1 Motivation . . . 99
2 Messräume . . . 100
3 Maße . . . 108
3.1 Maßräume . . . 108
3.2 Äußere Maße . . . 109
3.3 Der Satz von Hahn über Maßerweiterungen . . . 112
3.4 Der Lebesgue-Borelsche Maßraum . . . 118
3.5 Nullmengen und Vollständigkeit . . . 119
3.6 Der Lebesguesche Maßraum und die lineare Transformationsformel für λ_n . . . 122
4 Das Lebesgue-Integral . . . 125
4.1 Lebesgue-Integral von Treppenfunktionen . . . 125
4.2 Lebesgue-Integral für nicht-negative Funktionen . . . 127
4.3 Lebesgue-Integral für integrierbare Funktionen . . . 129
4.4 L^p-Räume . . . 132
4.5 Lebesgue- versus Riemann-Integrierbarkeit . . . 134
5 Konvergenzsätze . . . 138
6 Produkt-Maße und Satz von Fubini . . . 143
6.1 Produkt-σ-Algebren . . . 143
6.2 Produkt-Maße . . . 146
6.3 Der Satz von Fubini . . . 150
7 Die Transformationsformel und Anwendungen . . . 153
7.1 Die Transformationsformel . . . 153
7.1.1 Motivation und Formulierung der Formel . . . 153
7.1.2 Der in der Vorlesung präsentierte Beweis . . . 154
7.1.3 Ein anderer Beweis, der die Sätze 7.1 und 7.2 in voller Allgemeinheit ergibt . . . 158
7.1.4 Mehr zu Nullmengen . . . 162
7.2 Integration in krummlinigen Koordinaten . . . 163
7.2.1 Polarkoordinaten der Ebene . . . 163
7.2.2 Kugelkoordinaten . . . 165
7.2.3 Zylinderkoordinaten . . . 165
8 Parameterabhängige Integrale . . . 167
8.1 Ableitung parameterabhängiger Integrale . . . 167
8.2 Die Faltung . . . 168
8.3 Ausblick: Wozu braucht man Faltungen? . . . 170
8.3.1 Zur Lösung wichtiger partieller Differentialgleichungen . . . 170
8.3.2 Glättung . . . 171

A Ergänzungen zu Analysis I und II **I**
1 Vertauschung von Ableitung und Riemann-Integral I
2 Differenzierbarkeit von $\lim f_k$ für $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ III
3 Der Cauchsche Doppelreihensatz und Variationen IV

B Zusätzliche Details und Ausführungen **IX**
1 Details zur Umformung von Satz 1.20 zu Satz 3.3 in Kapitel I IX
2 Ausführungen über Nullmengen X

C Index-Verzeichnisse **XIII**
Stichwortverzeichnis XIII
Symbolverzeichnis XVII
Liste der Sätze XVIII
Literaturverzeichnis XXI

Vorwort

Dies ist das Vorlesungsskript der Vorlesung Analysis III, die ich im Wintersemester 2019/20 an der Universität Regensburg halte.

Das Skript basiert in Teilen auf meiner Vorlesung vom Wintersemester 2014/15. Damals hat Frau Bianca Marcen beim Setzen in Latex geholfen, wofür ich ihr herzlich danke. Das Setzen des Skripts baut auf den LaTeX-Stylefiles auf, die Daniel Heiß im Sommersester 2015 für die Analysis IV erstellt hat. Auch ihm sei an dieser Stelle herzlich gedankt.

Falls Sie einen Tippfehler finden oder sonstige Verbesserungsvorschläge haben, so senden Sie bitte eine Email an mich.

Leider enthält das Skript bisher noch nicht sehr viele Bilder und Zeichnungen. Freiwillige Beiträge oder verbesserte Versionen werden gerne entgegengenommen. Bei einigen fehlenden Bildern ist ein grüner Kommentar im Skript.

Bernd Ammann, Regensburg

Die aktuelle Version des Skripts ist hier zu finden:

www.mathematik.ur.de/ammann/lehre/2019w_analysisIII/AnalysisIII.pdf

I Komplexe Analysis (Funktionentheorie)

1 Kurvenintegrale in $\mathbb{R}^n$

1.1 Kurven in $\mathbb{R}^n$ und ihre Bogenlänge

Di 15.10.

Ab jetzt schreiben wir $\mathbb{N}^* := \mathbb{N}_{>0} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ für die Menge der positiven natürlichen Zahlen. Ist X eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ bzw. von $\mathbb{C}$, dann schreiben wir $X \Subset \mathbb{R}^n$ bzw. $U \Subset \mathbb{C}$.

Im folgenden Abschnitt sei $\|\cdot\|$ immer die Standard-Norm auf $\mathbb{R}^n$. Ähnliche Aussagen würden auch für beliebige Normen gelten, dies wollen wir aber nicht diskutieren. Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle.

Definition 1.1. *Eine* **Kurve** *oder ein* **Weg** *in $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung*

$$\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n,$$

wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Hierbei darf I offen, abgeschlossen oder halboffen sein. Es sind sowohl beschränkte als auch unbeschränkte Intervalle möglich.

Schreibweise: Für die Ableitung der Kurven an der Stelle t_0 schreibt man oft $\dot{\gamma}(t_0)$ an Stelle von $\gamma'(t_0)$. Diese Schreibweise kommt aus der Physik: man nutzt dort Kurven, um die Bewegung eines Gegenstands im Raum in Abhängigkeit von der Zeit t zu beschrieben. Die Ableitungen nach der Zeit (also nach t) werden in der Physik oft mit $\dot{\gamma}$ an Stelle von γ' bezeichnet.

Beispiele 1.2.

(a) $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$

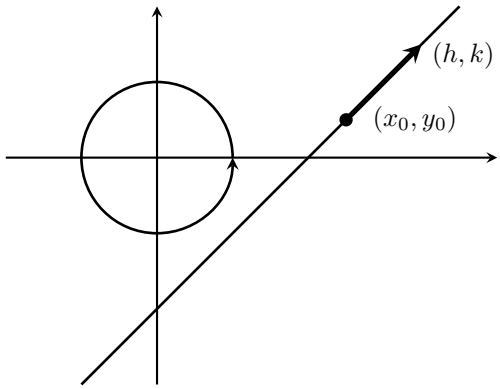


Abbildung 1.1: Zu den Beispielen 1.2 (a) und (b)

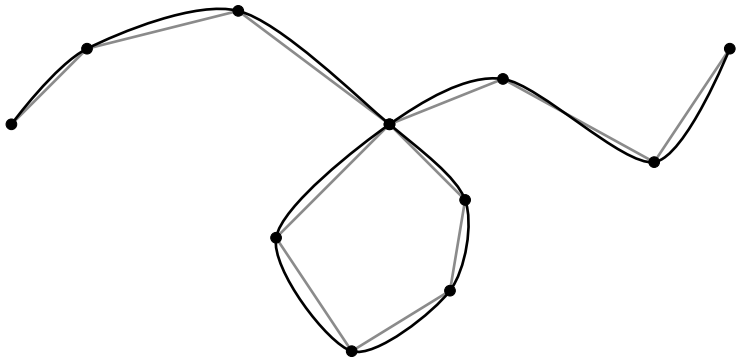


Abbildung 1.2: Zu Definition 1.3

(b) $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (x_0, y_0)^T + t(h,k)^T$, wobei $(x_0, y_0)^T, (h,k)^T \in \mathbb{R}^2$.

Definition 1.3. *Die* **Bogenlänge** *einer Kurve* $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ *ist*

$$\begin{aligned} L(\gamma) &:= \sup\left\{ \sum_{j=1}^{k} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \ \wedge\ t_0, \dots, t_k \in I \ \wedge\ t_0 < t_1 < \dots < t_k \right\} \\ &\in [0, \infty]\,. \end{aligned}$$

Falls $L(\gamma) < \infty$*, so nennt man* γ **rektifizierbar**.

Vorbemerkung zu stetiger Differenzierbarkeit: Bis jetzt haben wir die Ableitung einer Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ in x_0 nur dann definiert, wenn x_0 innerer Häufungspunkt ist. Dies entspricht den üblichen Konventionen.

Die Definition der Ableitung benötigt aber lediglich, dass x_0 ein Häufungspunkt von U ist[1]. Wir sagen dann, f is differenzierbar in x_0 und hat die Ableitung a, wenn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert und den Wert a hat. Man schreibt wieder $f'(x_0) := a$ für die Ableitung. Selbstverständlich erstreckt sich hier der Limes über alle $x \in U \backslash \{x_0\}$. Unter der Annahme, dass x_0 ein Häufungspunkt von U ist, ist der Grenzwert – wenn er existiert – eindeutig.

Man erweitert nun die Definition von $C^k(I, \mathbb{R}^n)$ auf beliebige Intervalle I. Wir sagen $f : I \to \mathbb{R}^n$ ist **in** $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ oder äquivalent f ist **stetig differenzierbar**, wenn f in allen $x_0 \in I$ differenzierbar ist und die Ableitungsfunktion $f' : I \to \mathbb{R}^n$ stetig ist. Wie in Analysis I folgt dann auch, dass f stetig ist. Für $k \in \mathbb{N}_{>1}$ definiert man dann $f : I \to \mathbb{R}^n$ ist **in** $C^k(I, \mathbb{R}^n)$ oder äquivalent f ist **k-mal stetig differenzierbar**, falls f (überall) differenzierbar ist und $f' \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$.

Lemma. *Für eine stetige Funktion* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$*,* $a < b$ *sind äquivalent*

(1) f *ist stetig differenzierbar (im obigen Sinn),*

(2) $f|_{(a,b)}$ *ist stetig differenzierbar und die Grenzwerte* $\lim_{x \to a} f'(x)$ *und* $\lim_{x \to b} f'(x)$ *existieren,*

[1] Diese Behauptung ist nicht mehr richtig, wenn U eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, $n > 1$ ist und wir mehr-dimensionale Differenzierbarkeit betrachten. Diesen Fall wollen wir aber an dieser Stelle nicht diskutieren.

(3) *Es gibt ein* $\varepsilon > 0$ *und eine stetig differenzierbare Funktion* $F : (a-\varepsilon, b+\varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ *mit* $F_{[a,b]} = f$.

Das Lemma gilt ebenfalls – mit den offensichtlichen Modifikationen – wenn wir ein halboffenes Intervall I betrachten, und auch für beliebige C^k-Funktionen, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und in Kombination dieser beiden Modifikationen.

Die Beweis von (1)$\Longrightarrow$(2) und (3)$\Longrightarrow$(2) sind offensichtlich. Der Beweis von (2)$\Longrightarrow$(1) nutzt den 1. Mittelwertsatz (Analysis I, Kap. 5, Satz 3.2) und wird als Übung gelassen. Der Beweis von (2)$\Longrightarrow$(3) konstruiert F durch geeignete affin-lineare Fortsetzungen auf $(a-\varepsilon, a)$ und $(b, b+\varepsilon)$ im Fall $k = 1$ und durch Polynome von Grad $\leq k$ für allgemeines k. Der Fall $k = \infty$ ist etwas aufwändiger zu zeigen.

Lemma 1.4. *Sei* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *eine Kurve.*

(a) *Sei* $\tau\colon [c,d] \to [a,b]$ *eine Reparametrisierung, d. h. eine bijektive und stetige Abbildung.*[2] *Dann gilt*

$$L(\gamma \circ \tau) = L(\gamma).$$

(b) *Für alle* $t_0 \in [a,b]$ *gilt:* $L(\gamma_{|_{[a,t_0]}}) + L(\gamma_{|_{[t_0,b]}}) = L(\gamma)$.

Den Beweis sollten Sie selbstständig ausführen können.[3]

Beweisskizze: Man muss im Prinzip nur die Definition von $L(\gamma)$ hinschreiben und – unter Nutzung der Dreiecks-Ungleichung – geschickt mit dem Supremum hantieren. ■

Satz 1.5. *Sei* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *eine* C^1*-Kurve (das heißt* γ *ist stetig differenzierbar).*

Dann ist γ *rektifizierbar und es gilt*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Wiederholung:

Wir definieren das Integral über stetige Funktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ wie folgt:[4]

$$\int_a^b F(t)\,dt := \begin{pmatrix} \int_a^b F_1(t)\,dt \\ \vdots \\ \int_a^b F_n(t)\,dt \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

[2] Aus dem Zwischenwertsatz folgt dann, dass τ entweder strng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist

[3] Sonst in den Übungsgruppen nachfragen!

[4] Diese Definition erlaubt es uns auch Funktionen $F\colon [a,b] \to V$ zu integrieren, wenn V ein endlich-dimensionaler Vektorraum ist. Hierzu muss man sich überlegen, dass die Existenz des Integrals und der Wert des Integrals $\int_a^b F(t)\,dt \in V$ unabhängig von der Wahl der Basis von V ist.

Der Vektorraum $C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ der stetigen Funktionen $f,g\colon [a,b]\to\mathbb{R}^n$ trägt das Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle := \int_a^b f(t)g(t)\,dt.$$

Die zugehörige Norm ist die L^2-Norm

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,dt}.$$

Wie in jedem euklidischen Vektorraum gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung[5]

$$\big|\langle f,g\rangle\big| \le \|f\|_2\,\|g\|_2\,.$$

Beweis: Wir zeigen „$\le$“ und „$\ge$“.

Zwischenbehauptung:

$$\Big\|\int_a^b F(t)\,dt\Big\| \le \int_a^b \|F(t)\|\,dt. \tag{1.1}$$

Beweis der Zwischenbehauptung: Setzte $x_j = \int_a^b F_j(t)\,dt$, $x=(x_1,\dots,x_n)^T$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \Big|\sum_{j=1}^n (x_j)^2\Big| = \Big|\sum_{j=1}^n \left(x_j\int_a^b F_j(t)\,dt\right)\Big| \\
&= \Big|\int_a^b \sum_{j=1}^n x_jF_j(t)\,dt\Big| \\
&\le \int_a^b \underbrace{\Big|\sum_{j=1}^n x_jF_j(t)\Big|}_{=|\langle x,F(t)\rangle|\le\|x\|\cdot\|F(t)\|\text{ Cauchy-Schwarz auf }\mathbb{R}^n}\,dt \\
&\le \|x\|\int_a^b \|F(t)\|\,dt, \\
\implies \quad \|x\| &\le \int_a^b \|F(t)\|\,dt\,,
\end{aligned}$$

wobei $\|x\| = \Big\|\int_a^b F(t)\,dt\Big\|$. ■

Weiter mit dem eigentlichen Beweis. Wir zeigen nun „$\le$“:

Seien $t_0<\dots<t_k$ wie im Supremum von Definition 1.3 gegeben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $a=t_0$ und $b=t_k$.[6] Dann folgt

$$\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\| \overset{\text{HDI}}{=} \Big\|\int_{t_{i-1}}^{t_i}\dot\gamma(t)\,dt\Big\| \overset{(1.1)}{\le} \int_{t_{i-1}}^{t_i}\|\dot\gamma(t)\|\,dt$$

[5] Bemerkung: das Skalar-Produkt, die L^2-Norm und die Cauchy-Schwarz-Ungleichung wurden in der Vorlesung kurz wiederholt. Sie sind (natürlich) richtig, wurden aber im folgenden Beweis gar nicht benötigt.

[6] Man nennt dann die Zahlen $a=t_0<t_1\dots<t_k=b$ eine Partition von $[a,b]$, denn das Intervall $[a,b]$ wird dadurch in die Teilintervalle $[t_0,t_1]$, $(t_1,t_2]$. $(t_2,t_3]$,$\dots(t_{k-1},t_k]$ zerteilt.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \leq \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\, dt.$$

Damit ist „$\leq$“ gezeigt, da das für *jeden* Polygonzug gilt.

Wir zeigen nun „$\geq$“:

Die Funktion $\dot\gamma$ ist stetig auf $[a,b]$, und da $[a,b]$ kompakt ist, ist $\dot\gamma$ sogar *gleichmäßig* stetig, siehe Analysis II, Kap. 8, Lemma 6.14. Das heißt, zu jedem $\varepsilon > 0$ es existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $s, t \in [a,b]$ gilt:

$$|s-t| < \delta \implies \|\dot\gamma(s) - \dot\gamma(t)\| < \varepsilon\,.$$

Wir wählen eine Partition $a = t_0 < \cdots < t_k = b$ mit $\triangle\, t_i = |t_i - t_{i-1}| < \delta$ für alle $i = 1, \ldots, k$. Es folgt für alle $t \in [t_{i-1}, t_i]$

$$\begin{aligned}\|\dot\gamma(t)\| &\leq \|\dot\gamma(t_i)\| + \|\dot\gamma(t) - \dot\gamma(t_i)\| \\ &\leq \|\dot\gamma(t_i)\| + \varepsilon\end{aligned}$$

und damit folgt weiter

$$\begin{aligned}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot\gamma(t)\|\, dt &\leq \|\dot\gamma(t_i)\| \triangle\, t_i + \varepsilon \triangle\, t_i \\ &= \Big\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \big(\dot\gamma(t) + \dot\gamma(t_i) - \dot\gamma(t)\big)\, dt \Big\| + \varepsilon \triangle\, t_i \\ &\leq \Big\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot\gamma(t)\, dt \Big\| + \Big\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \big(\dot\gamma(t_i) - \dot\gamma(t)\big)\, dt \Big\| + \varepsilon \triangle\, t_i \\ &\overset{(1.1)}{\leq} \Big\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot\gamma(t)\, dt \Big\| + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\big\|\dot\gamma(t_i) - \dot\gamma(t)\big\|}_{\leq \varepsilon}\, dt + \varepsilon \triangle\, t_i \\ &\overset{\text{HDI}}{=} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\big\|\dot\gamma(t_i) - \dot\gamma(t)\big\|}_{\leq \varepsilon}\, dt + \varepsilon \triangle\, t_i \\ &\leq \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + 2\varepsilon \triangle\, t_i.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\implies \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\, dt &= \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot\gamma(t)\|\, dt \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + 2\varepsilon(b-a) \\ &\leq L(\gamma) + 2\varepsilon(b-a)\end{aligned}$$

Im Limes $\varepsilon \to 0$ folgt

$$\int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\, dt \leq L(\gamma)\,.$$

■

Definition 1.6. *Eine Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ nennen wir* **stückweise C^1**, *falls es eine Partition*

$a = t_0 < \cdots < t_k = b$ gibt, so dass $\gamma_{|_{[t_{i-1},t_i]}}$ eine C^1-Kurve für alle $i = 1, \ldots, k$ ist. Damit folgt

$$L(\gamma) = \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt.$$

Beispiel. Sei $\gamma : [0,4] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\gamma(t) := \begin{cases} (t,0)^T, & \text{falls } t \in [0,1] \\ (1, t-1)^T, & \text{falls } t \in [1,2] \\ (3-t, 1)^T, & \text{falls } t \in [2,3] \\ (0, 4-t)^T, & \text{falls } t \in [3,4] \end{cases}$$

Die Kurve durchläuft den Rand des Einheitsquadrats $[0,1]^2$ in $\mathbb{R}^2$, ist stückweise stetig differenzierbar und hat Bogenlänge 4.

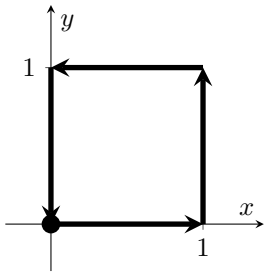


Abbildung 1.3: Die Kurve, die den Rand von $[0,1]^2$ durchläuft.

Bemerkung 1.7. Die Integralformel für die Bogenlänge gilt auch für (stückweise) C^1-Kurven $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^k$ auf beliebigen Intervallen (offen, halboffen). Eine solche Kurve muss nicht rektifizierbar sein. Für diesen Fall ist $\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt = \infty$ ein uneigentliches Integral.

≈Fr. 18.10.

Wiederholung (mehr dazu in Zentralübung am 22.10.)

$U \subset \mathbb{R}^n$ heißt

(1) **zusammenhängend**,

$$\begin{aligned} &\iff \nexists A, B \Subset U, \text{ nicht-leer mit } U = A \dot{\cup} B, \\ &\iff \nexists A, B \Subset \mathbb{R}^n \text{ mit } A \cap U \text{ und } B \cap U \text{ nicht-leer und mit mit } U = (A \cap U) \dot{\cup} (B \cap U). \end{aligned}$$

Hierbei benutzen wir das Symbol $\dot{\cup}$ für die disjunkte Vereinigung von Teilmengen, das heißt $R \dot{\cup} S = T$ ist äquivalent zu $R \cup S = T$ und $R \cap S = \emptyset$.

(2) **wegzusammenhängend**, falls

$$\forall x, y \in U \; \exists \gamma \colon [0,1] \to U \text{ stetig mit } \gamma(0) = x \text{ und } \gamma(1) = y.$$

Ist U wegzusammenhängend, so kann man immer eine stückweise C^1-Kurve γ wählen.

Es gilt immer

$$\text{wegzusammenhängend} \implies \text{zusammenhängend}.$$

Abbildung 1.4: Beispiel für eine nichtzusammenhängende Menge

Ende der Wiederholung[7]

Satz 1.8. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Dann ist U auch wegzusammenhängend. Genauer lassen sich je zwei Punkte in U durch einen Polygonzug verbinden.*

Beweis: Fixiere $x_0 \in U$ und setze

$$A_{x_0} := \{x \in U \mid \exists \text{ Polygonzug von } x_0 \text{ nach } x\} \neq \emptyset.$$

Man muss zeigen, dass $A_{x_0} \subset U$ und $U \setminus A_{x_0} \subset U$ offen sind.

(1) A_{x_0} ist offen: Sei $x \in A_{x_0}$ und sei $B_\varepsilon(x) \subset U$ ein offener Ball [8]. Jeder Punkt in $B_\varepsilon(x)$ lässt sich mit x durch eine Strecke verbinden. Damit folgt, dass $B_\varepsilon(x) \subset A_{x_0}$ ist und somit A_{x_0} offen.

(2) $U \setminus A_{x_0}$ ist offen: Sei $x \in U \setminus A_{x_0}$ und $B_\varepsilon(x) \subset U$. Könnte man $\tilde{x} \in B_\varepsilon(x)$ mit einem Polygonzug in U mit x_0 verbinden, dann würde dies auch für x gelten. Also haben wir $\tilde{x} \notin A_{x_0}$. Damit ist $B_\varepsilon(x) \subset U \setminus A_{x_0}$ und somit ist $U \setminus A_{x_0}$ offen. ■

Mit nahezu dem gleichen Beweis, kann man auch Versionen des obigen Satzes zeigen. Genauer: der Satz gilt auch dann, wenn man

- „Polygonzug“ durch „achsenparallelen Polygonzug“ ersetzt oder
- „Polygonzug“ durch „stückweise C^k-Kurve“ für irgend ein $k \in \mathbb{N}$ ersetzt oder
- „Polygonzug“ durch „C^k-Kurve“ für irgend ein $k \in \mathbb{N}$ ersetzt oder
- „Polygonzug“ durch „stückweise C^∞-Kurve“ ersetzt oder
- „Polygonzug“ durch „C^∞-Kurve“ ersetzt.

Definition 1.9. *Eine Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, die offen, nicht-leer und zusammenhängend ist, heißt* **Gebiet**.

[7] Achtung: in den folgenden Zeilen (Satz 1.8 bis Satz 1.13) hat sich im Vergleich zur Vorlesung die Nummerierung geändert.

[8] Dass solch Ball existiert, ist klar, da U offen ist.

1.2 Integration von Vektorfeldern längs Kurven

Definition 1.10. *Sei $Y\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld auf $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\gamma\colon [a,b] \to U$ eine C^1-Kurve. Dann ist das* **Kurven-Integral von Y längs γ**

$$\int_\gamma Y := \int_a^b \langle Y(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle \, dt.$$

Hier: $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$ mit $x, y \in \mathbb{R}^n$.

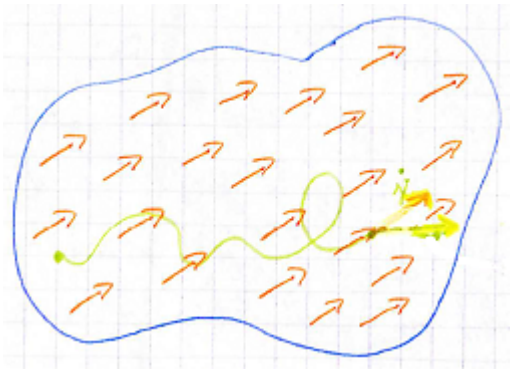


Abbildung 1.5: Ein stetiges Vektorfeld.

Bemerkung. Physikalische Interpretation: Bewegt man einen Massepunkt entlang einer Kurve γ in einem Kraftfeld Y, so ist die dafür nötige **Energie** gegeben durch das Kurvenintegral $\int_\gamma Y$.

Lemma 1.11. *Sei $Y\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld auf $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\gamma\colon [a,b] \to U$ eine C^1-Kurve. Sei $\tau\colon [c,d] \to [a,b]$ eine C^1-Reparametrisierung.*

Dann folgt

$$\int_{\gamma\circ\tau} Y = \begin{cases} \int_\gamma Y & \dot\tau > 0 \\ -\int_\gamma Y & \dot\tau < 0 \end{cases}.$$

Beweis:

$$\int_{\gamma\circ\tau} Y = \int_c^d \langle Y(\gamma(\tau(t)), \overbrace{(\gamma\circ\tau)}^{\bullet}(t)\rangle \, dt.$$

Substituiere $s = \tau(t)$. Übungsaufgabe auf Präsenzblatt. ∎

Definition 1.12. *Sei U wieder offen in $\mathbb{R}^n$. Ist $\varphi : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist der* **Gradient** $\operatorname{grad}\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ *von φ definiert als*

$$(\operatorname{grad}\varphi)(x) := (\varphi'(x))^T \qquad \forall x \in U.$$

Man schreibt oft auch $\nabla\varphi$ für $\operatorname{grad}\varphi$. Ein stetiges Vektorfeld $Y\colon U \to \mathbb{R}^n$ heißt **konservativ**,

falls es eine C^1-Funktion $\varphi \in C^1(U)$ gibt mit

$$Y = \operatorname{grad} \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Solch eine Funktion φ nennt man ein **Potential** *von Y.*

Bemerkung. Sei $Y = \operatorname{grad} \varphi$. Sei $\gamma\colon [a,b] \to U$ eine C^1-Kurve.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_\gamma Y &= \int_a^b \langle Y(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle \, dt \\ &= \int_a^b \langle \operatorname{grad} \varphi(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle \, dt \\ &= \int_a^b \underbrace{\varphi'(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma_i(t)}_{\frac{d}{dt}\varphi(\gamma(t))} \, dt \\ &\overset{\text{HDI}}{=} \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) \,. \end{aligned}$$

Hier bedeutet HDI: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Eine Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ nennt man **geschlossen**, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$. Es folgt aus der obigen Bemerkung: ist $Y : U \to \mathbb{R}^n$ konservativ und γ geschlossen, so ist $\int_\gamma Y = 0$.

Satz 1.13. *Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$. Für ein stetiges Vektorfeld $Y\colon U \to \mathbb{R}^n$ mit U (weg)-zusammenhängend sind äquivalent*

(1) *Y ist konservativ*

(2) *$\int_\gamma Y = 0$ für alle geschlossenen Kurven $\gamma\colon [a,b] \to U$, die stückweise C^1 sind.*[9]

(3) *Es gilt $\int_\gamma Y = \int_{\hat\gamma} Y$, für alle stückweise-$C^1$-Kurven γ und $\hat\gamma$ mit gleichem Anfangs- und Endpunkt.*[10]

Beweis: Wir haben bereits gesehen, dass aus (1) bereits (2) folgt.

(2) ist hinreichend[11] für (3). Denn angenommen $\gamma : [a,b] \to U$ und $\hat\gamma : [c,d] \to U$ sind stückweise C^1-Kurven mit dem selben Anfangs- und Endpunkt. Wir definieren nun die stückweise C^1-Kurve $\widetilde\gamma : [a, b+d-c] \to U$ mit

$$\widetilde\gamma(t) := \begin{cases} \gamma(t) & \text{für } t \in [a,b] \\ \hat\gamma(b+d-t) & \text{für } t \in [b, b+d-c] \end{cases}$$

[9] Wenn man ein Vektorfeld entlang einer geschlossenen Kurve integriert, so schreibt man oft $\oint$ an Stelle von $\int$. Diese Schreibweise ist vor allem in Texten üblich, die physikalische Probleme und ihre Anwendungen erörtern. Es ergäbe sich also in diesem Fall $\oint_\gamma Y$ für $\int_\gamma Y$.

[10] Das heißt: Sind $\gamma : [a,b] \to U$ und $\hat\gamma : [c,d] \to U$ Kurven, die stückweise C^1 sind und gilt $\gamma(a) = \hat\gamma(c)$ und $\gamma(b) = \hat\gamma(d)$, so gilt $\int_\gamma Y = \int_{\hat\gamma} Y$.

[11] Hier nutzen wir den folgenden Sprachgebrauch: „(A) ist eine hinreichende Bedingung für (B)“ bedeutet (A)$\Longrightarrow$(B). Man nutzt hingegen den Satz „(A) ist eine notwendige Bedingung für (B)“ im Sinne von (B)$\Longrightarrow$(A). Wir beweisen also hier oben (2)$\Longrightarrow$(3).

$$\xRightarrow{\text{Lemma 1.11}} \quad 0 \overset{(2)}{=} \int_{\tilde{\gamma}} Y = \int_{\gamma} Y - \int_{\hat{\gamma}} Y.$$

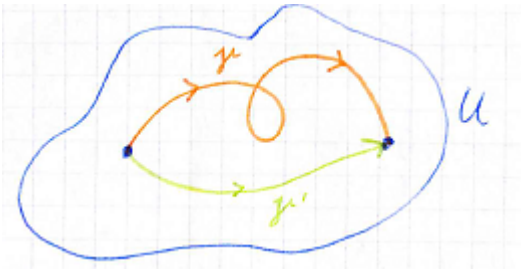


Abbildung 1.6: Bild zum Beweis Satz 1.13 für die Richtung (1)$\Longrightarrow$(2).

Schließlich zeigen wir, dass aus (3) wieder (1) folgt:

Fixiere $x_0 \in U$ und setze $\varphi(x) = \int_\gamma Y$ für eine beliebige C^1-Kurve γ von x_0 nach x. Da das Integral ja nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt, ist die Schreibweise $\varphi(x) = \int_{x_0 \to x} Y := \int_\gamma Y$ sinnvoll. Es bleibt zu zeigen, dass Y partiell differenzierbar ist und

$$Y = \operatorname{grad} \varphi.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \big(\varphi(x + h \cdot e_i) - \varphi(x)\big) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \Big(\int_{x_0 \to x + h \cdot e_i} Y - \int_{x_0 \to x} Y \Big) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \Big(\int_{x \to x_0} Y + \int_{x_0 \to x + h \cdot e_i} Y \Big) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{x \to x + h \cdot e_i} Y
\end{aligned}$$

Man beachte: noch ist nicht gezeigt, dass $\partial \varphi / \partial x_i$ existiert. Wir wissen jedoch, dass diese Ableitung existiert, wenn der Limes in der untersten Zeile existiert.

Leider noch kein gutes Bild vohanden

Abbildung 1.7: Bild zum Beweis Satz 1.13 für die Richtung (3)$\Longrightarrow$(1).

Als nächstes wählt man von x nach $x + h \cdot e_i$ die Kurve $\gamma \colon [0, h] \to U$ mit $\gamma(t) = x + t \cdot e_i$, und man erhält für $Y(x) = (Y_1(x), \ldots, Y_n(x))^T$:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{x \to x + h \cdot e_i} Y &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h \langle Y(x + t \cdot e_i), e_i \rangle \, dt \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h Y_i(x + t \cdot e_i) \, dt \\
&= \frac{d}{dh}\Big|_{h=0} \int_0^h Y_i(x + t \cdot e_i) \, dt \\
&\overset{\text{HDI}}{=} Y_i(x + h \cdot e_i)_{|h=0} \\
&= Y_i(x)
\end{aligned}$$

Hieraus folgt zum einen die partielle Differenzierbarkeit und zum anderen der gewünschte Wert

der Ableitung. ■

1.3 Kriterien für die Existenz von Potentialen und Rotation von Vektorfeldern

Motivierende Frage: Wie kann man konkret prüfen, ob ein Vektorfeld Y konservativ ist, ohne ein Potential φ zu „erraten“?

Lemma 1.14. *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ und $Y\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld.*[12] *Ist Y konservativ, so gilt*

$$\frac{\partial Y_k}{\partial x_j} = \frac{\partial Y_j}{\partial x_k} \tag{1.2}$$

für alle $j, k = 1, \dots, n$.

Beweis: Sei Y ein konservatives Feld mit $Y = \operatorname{grad} \varphi$ mit Y differenzierbar. Dann ist φ zweimal differenzierbar. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y_k}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\Big)\\ &\overset{\text{Schwarz}}{=} \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\Big)\\ &= \frac{\partial Y_j}{\partial x_k}\end{aligned}$$

■

Definition 1.15. *Für $n = 3$ heißt das Vektorfeld*

$$\operatorname{rot} Y = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y_3}{\partial x_2} - \frac{\partial Y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial x_3} - \frac{\partial Y_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial x_1} - \frac{\partial Y_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

die **Rotation von Y**.

Lemma 1.14 besagt also für $n = 3$: Ist Y konservativ und ist $Y \in C^1$, so folgt $\operatorname{rot} Y = 0$.

In der Physik ist es üblich $\nabla \times Y$ an Stelle von $\operatorname{rot} Y$ zu schreiben, denn die Definition von $\operatorname{rot} Y$ und von $X \times Y$ kann man sich mit der Merkregeln

$$\operatorname{rot} Y = \det\left(\nabla, Y, \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}\right) \qquad X \times Y = \det\left(X, Y, \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}\right)$$

herleiten.

[12] Wir fordern für dieses Lemma Y (überall) differenzierbar, und nicht wie in vielen Bücher die stärkere Eigenschaft $Y \in C^1$. Differenzierbarkeit ist für uns ausreichend, da wir in unserem Beweis des Satzes von Schwarz auch nur 2-fache Differenzierbarkeit benötigt haben und keine 2-fache stetige Differenzierbarkeit.

Beispiel 1.16. Die Umkehrung von Lemma 1.14 gilt im Allgemeinen nicht. Sei $\Omega = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ und $Y \colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$Y(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Somit erfüllt Y (1.2). Aber Y ist nicht konservativ, denn

$$\int_\gamma Y = 2\pi \neq 0$$

für die geschlossene Kurve $\gamma \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$.

Ähnliche Beispiele existieren auf $\Omega := \mathbb{R}^n \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-2})$.

In manchen Fällen gilt sie aber. Interessanterweise hängt dies vom Gebiet Ω ab, auf dem Y definiert ist.

Definition 1.17. *Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt* **sternförmig bezüglich** $x_0 \in \Omega$*, falls gilt: ist $x \in \Omega$ und $t \in [0,1]$, dann haben wir auch $(1-t)x_0 + tx \in \Omega$.*

Abbildung 1.8: Eine sternförmige Menge.

Satz 1.18. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig, dann gilt auf Ω die Umkehrung von Lemma 1.14. Genauer: Erfüllt $Y \in C^1$ die Bedingung (1.2), so ist Y konservativ.*

Di 22.10.

Zunächst ein paar Worte zur Idee des Beweises: sei Ω sternförmig bezüglich x_0. Wir wollen im Beweis eine Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ finden mit $Y = \operatorname{grad} \varphi$. Wenn es solch eine Funktion φ gibt, dann können wir eine finden mit $\varphi(x_0) = 0$.[13] Nach der Rechnung direkt vor Satz 1.13 ist klar: wenn es solch ein φ gibt, dann gilt für jede stetig differenzierbare Kurve $\gamma_x \colon [0,1] \to \Omega$ von x_0 nach x:

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} Y\,.$$

Nun ist nach Definition der Sternförmigkeit die Kurve

$$\gamma_x(t) := tx + (1-t)x_0$$

solche ein Kurve. Mit $\dot{\gamma}_x(t) = x$ erhalten wir dann

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} Y = \int_0^1 \langle Y(\gamma_x(t), \dot{\gamma}_x(t)\rangle\, dt = \int_0^1 \langle Y(\gamma_x(t), x\rangle\, dt\,. \tag{1.3}$$

[13] Ersetze $\varphi(x)$ durch $\varphi(x) - \varphi(0)$.

Wenn es also überhaupt solch ein φ gibt, dann können wir die Formel (1.3) nutzen, um φ zu beschreiben. Die Idee des Beweises ist nun, (1.3) als Definition von φ herzunehmen und dann $Y = \operatorname{grad}\varphi$ zu zeigen.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei Ω sternförmig bezüglich 0. [14]

Für $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \Omega$ setzen wir nun $\varphi(x) = \int_0^1 \langle Y(tx), x\rangle\, dt$. Man kann nun die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_j}$ mit der Integration vertauschen: hierzu wenden wir Lemma 1.2 in Anhang A.1 mit $f(s,t) = \langle Y(tx), x\rangle$ und $s = x_j$ und an (oder alternativ Satz 8.1 in Kapitel II); die restlichen Komponenten x_k, $k \neq j$, von x bleiben hierbei fixiert.

Wir erhalten dann

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j}\langle Y(tx), x\rangle\, dt\,.$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\sum_{k=1}^n Y_k(tx)\, x_k\Big)\, dt \\
&= \int_0^1 \Big[\Big(\sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{\partial Y_k}{\partial x_j}(tx)}_{\overset{(1.2)}{=}\frac{\partial Y_k}{\partial x_j}(tx)}\; tx_k\Big) + Y_j(tx)\Big]\, dt \\
&= \int_0^1 \underbrace{\Big[\Big(t\sum_{k=1}^n \frac{\partial Y_j}{\partial x_k}(tx)\, x_k\Big) + Y_j(tx)\Big]}_{=\frac{d}{dt}(t\cdot Y_j(tx))\ \text{(Prod.- und Ket.-regel)}}\, \mathrm{d}t \\
&\overset{(1.2)}{=} \int_0^1 \frac{d}{dt}[t\cdot Y_j(tx)]\, \mathrm{d}t \\
&\overset{\text{HDI}}{=} 1\cdot Y_j(x) - 0\cdot Y_j(0) = Y_j(x)
\end{aligned}$$

■

Bemerkung 1.19. Satz 1.18 gilt auch auf allgemeineren Gebieten als auf sternförmigen, nämlich auf den Gebieten, die „einfach zusammenhängend“ sind. Ein Gebiet Ω heißt **einfach zusammenhängend**, wenn es zu jeder geschlossenen Kurve $\gamma : [a,b] \to \Omega$ eine stetige Abbildung $\eta : [a,b]\times[0,1] \to \Omega$ gibt, mit den Eigenschaften:

- Für alle $t \in [a,b]$ gilt $\gamma(t) = \eta(t,0)$.
- Für alle $s \in [0,1]$ gilt $\eta(a,s) = \eta(b,s)$.
- Die Abbildung $t \longmapsto \eta(t,1)$ ist konstant.

[15] Anschauliche Bedeutung: Es gibt geschlossene Kurven $\gamma_s = \eta(\,\cdot\,, s) : [a,b] \to \Omega$, stetig in s, die $\gamma = \gamma_0$ mit die konstanten Kurve γ_1 verbinden.

[14] Falls Ω sternförmig bezüglich $x_0 \neq 0$ ist, dann verschiebt sich alles um x_0. Zum Beispiel betrachtet man dann: $Y(x_0 + t(x - x_0))$ an Stelle von $Y(tx)$ etc..

[15] In der Literatur sind auch andere Definitionen von „einfach zusammenhängend“ vorhanden, alle gängigen Definitionen sind aber zu der obigen äquivalent.

Das Quadrat $[0,1]^2$ mit Abbildung nach Ω und der Vorgabe auf dem Rand.

Das ringförmig Gebiet $\Omega := B_2(0) \setminus B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$: nicht einfach zusammenhängend.

Der folgende Satz fasst die wesentlichen Punkte zusammen:

Satz 1.20 (Satz über konservative Vektorfelder)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $Y\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann sind äquivalent*

(1) *Y ist konservativ, das heißt $Y = \operatorname{grad} \varphi$, wobei $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion ist.*

(2) *Geschlossene Kurvenintegrale von Y sind Null.*

(3) *Kurvenintegrale von Y hängen nur von den Endpunkten ab.*

Ist Y ein C^1-Vektorfeld, so folgt aus (1), (2) oder (3):

(4)
$$\frac{\partial Y_k}{\partial x_j} = \frac{\partial Y_j}{\partial x_k} \qquad \text{für alle } j,k = 1,\dots,n.$$

Ist Ω sternförmig (oder allgemein einfach zusammenhängend), so ist (4) sogar äquivalent zu (1) (bzw. zu (2) bzw. zu (3)). Im Fall $n = 3$ ist (4) äquivalent zu $\operatorname{rot} Y = 0$.

Die Funktion φ in (1) ist dann natürlich immer sogar stetig differenzierbar.

1.4 Kurvenintegrale in $\mathbb{C}$

Im folgenden indentifizieren wir $\mathbb{C}$ immer mit $\mathbb{R}^2$, siehe auch Abbildung 1.9. Wir schreiben $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

Für $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ schreibe
$$F(t) := U(t) + iV(t)$$
für alle $t \in [a,b]$ bzw. $F = U + iV$ für $U, V\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

Definition 1.21. *$F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt* **Riemann-integrierbar***, falls U und V Riemann-integrierbar sind. Setze dann*
$$\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t := \int_a^b U(t)\,dt + i\int_a^b V(t)\,\mathrm{d}t.$$

Bemerkung. Identifiziert man $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$, so stimmt dieser Integralbegriff mit dem Integralbegriff in der Wiederholung nach Satz 1.5 überein. Des Weiteren übertragen sich alle Rechenregeln für das Riemann-Integral wortwörtlich (Linearität, Substitution, partielle Integration,...). Es gilt[16] weiter:
$$\Big|\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t\Big| \le \int_a^b |F(t)|\,\mathrm{d}t \le \|F\|_\infty\,|b-a|, \tag{1.4}$$
wobei $\|F\|_\infty := \sup_{t\in[a,b]} \big|F(t)\big| \in [0,\infty]$.

[16] Beweis: zum Beispiel Zwischenbehauptung Ungleichung 1.1 im Beweis von Satz 1.5 oder Zentralübung am 19.11.

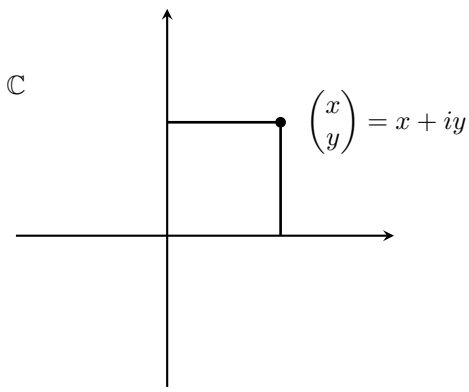


Abbildung 1.9: Veranschaulichung von $\mathbb{C}$.

Definition 1.22. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ eine C^1-Kurve. Dann heißt*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{C}$$

das **Kurvenintegral** *oder* **Wegintegral von f längs γ.**

Wir erhalten dann aus (1.4):

$$\begin{aligned} \left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \int_a^b |f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\le \sup\{|f(\gamma(t))| \mid t \in [a,b]\} \int_a^b |\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= \sup\big\{|f(z)| \mid z \in \gamma([a,b])\big\}\, L(\gamma) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Bemerkung 1.23. Solche Integrale spielen in der Funktionentheorie eine ganz zentrale Rolle. Diese Integrale sind im wesentlichen Integrale von Vektorfeldern im Sinne des vorigen Abschnitts. Hierzu betrachten wir die folgenden Vektorfelder:

$$\begin{aligned} Y : \Omega \to \mathbb{R}^2, \quad Y(z) &= (\operatorname{Re} f(z), -\operatorname{Im} f(z))^T \\ Z : \Omega \to \mathbb{R}^2, \quad Z(z) &= (\operatorname{Im} f(z), \operatorname{Re} f(z))^T \end{aligned} . \tag{1.6}$$

Wir definieren nun wie im letzten Abschnitt die Integrale $\int_\gamma Y \in \mathbb{R}$ und $\int_\gamma Z \in \mathbb{R}$, wobei wir γ als Kurve in $\Omega \subset \mathbb{R}^2 (\cong \mathbb{C})$ betrachten. Das in Definition 1.22 definierte Integral berechnet sich dann als

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma Y + i \int_\gamma Z.$$

Es folgt hieraus insbesondere, dass $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ sich unter Reparametrisierung von γ nicht ändert. Es gibt aber Kurven γ, $\hat\gamma$ in Ω mit gleichem Anfangs- und Endpunkt und Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \neq \int_{\hat\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

2 Komplexe Differenzierbarkeit

Notation: $\Omega \subset \mathbb{C}$ ist immer ein Gebiet.

2.1 Definition und Beispiele zur komplexen Differenzierbarkeit

Definition 2.1. *Die Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ heißt* **komplex differenzierbar in** $z_0 \in \Omega$*, falls der Grenzwert*

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{w \to 0} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w}$$

in $\mathbb{C}$ existiert. Ist f in jedem Punkt aus Ω komplex differenzierbar, so nennt man f **komplex differenzierbar** *oder* **holomorph**. *Man nennt $f'(z_0)$ die* **Ableitung** *von f in z_0.*

Wie in der reellen Analysis zeigt man: ist f komplex differenzierbar in $z_0 \in \Omega$, dann ist f auch stetig in z_0.

Ist $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, dann ist die **Ableitung(sfunktion)** die Funktion $f'\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $z \longmapsto f'(z)$. Konstante Funktionen sind holomorph, und deren Ableitung ist überall 0. Die Inklusion $\Omega \to \mathbb{C}$, $z \longmapsto z$ ist holomorph und die Ableitung ist überall 1.

Bemerkung. Auch bei komplexer Differenzierbarkeit gelten die üblichen Ableitungsregeln: Summenregel, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel (siehe Übungsblatt 3). Es folgt daraus, dass alle Polynome $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, $a_j \in \mathbb{C}$, auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph sind und dass die gewohnte Formel $f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1}$ gilt.

Bisher ist alles sehr ähnlich zur reellen Differenzierbarkeit (in einer Veränderlichen). Im Unterschied zu dieser kann man jedoch im komplexen sehr einfach Funktionen hinschreiben, die zwar stetig aber nirgends differenzierbar sind, wie das folgende Beispiel zeigt. Im Verlauf der Vorlesung werden wir viele weitere wichtige Unterschiede sehen. Unter anderem werden wir sehen, dass eine holomorphe Funktion bereits beliebig oft komplex differenzierbar sind, was ja angesichts der reellen Analysis sehr erstaunlich ist.

Beispiel 2.2. $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \overline{z}$. Es gilt also $f(x + iy) = x - iy$. Somit ist f nirgends komplex differenzierbar, aber stetig!

Weitere wichtige Beispiele sind Potenzreihen

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

mit $a_0, a_1, \cdots \in \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Man nennt z_0 den **Entwicklungspunkt der Potenzreihe**.

Erinnerung:

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \in [0, \infty]$$

heißt **Konvergenzradius**. Die Reihe $P(z)$ konvergiert absolut für $z \in B_R(z_0)$ und definiert eine stetige Funktion $P\colon B_R(z_0) \to \mathbb{C}$.

Satz 2.3. *$P\colon B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ ist holomorph und*

$$P'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1}.$$

Der Konvergenzradius von P' ist mindestens so groß wie der von P.[17]

Beweis kommt später.

Beispiel 2.4.

- $\exp(z) = e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$
- $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{iz}}{2i}$
- $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
- Eulerformel: $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$

2.2 Komplexe und reelle Differenzierbarkeit

In diesem Abschnitt wird (wie so oft) $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifiziert, also $z = x + iy$ mit $(x, y)^T$. Insbesondere haben wir dann auch $\|z\| = |z|$, wenn $\|\cdot\|$ die Standard-Norm auf $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

Sei $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Man kann nun sowohl nach der komplexen als auch nach der reellen Differenzierbarkeit von f im Punkt z_0 fragen. Ebenso wollen wir untersuchen, ob und gegebenenfalls wie die Ableitungen zusammenhängen.

Komplexe Differenzierbarkeit gilt genau dann, wenn es ein $\zeta \in \mathbb{C}$ gibt, so dass gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - \zeta h}{h} = 0, \tag{2.1}$$

wobei der Limes sich über alle h erstreckt, für die $z_0 + h \in \Omega \subset \mathbb{C}$.

Reelle Differenzierbarkeit gilt genau dann, wenn es ein $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gibt, so dass gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - Ah}{\|h\|} = 0, \tag{2.2}$$

wobei sich der Limes wieder über alle h mit $z_0 + h \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ erstreckt.

Um den Zusammenhang zu verdeutlichen, schreiben wir (2.1) und (2.2) in Vektorschreibweise:

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} h_1 + ih_2$$
$$\zeta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} a + ib$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

[17] Man kann sogar zeigen, dass sie gleich groß sind.

Dann ist die komplexe Multiplikation in Vektorschreibweise folgende:

$$\begin{aligned}\zeta \cdot h &= (a+ib)(h_1+ih_2)\\ &= (ah_1-bh_2)+i(bh_1+ah_2)\\ &\mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} ah_1-bh_2\\ bh_1+ah_2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} h_1\\ h_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die komplexe Multiplikation mit einer (festen) komplexen Zahl $\zeta = a+ib$ entspricht also der Matrixmultiplikation mit $\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$.

Satz 2.5 (Cauchy-Riemann-Bedingung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $z_0 \in \Omega$. Für $f = u+iv\colon \Omega \to \mathbb{C}$mit $u, v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *f ist in z_0 komplex differenzierbar*

(2) *f ist in z_0 reell differenzierbar (im Sinne der Analysis II) und u und v erfüllen*

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)\\ \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\end{aligned} \tag{2.3}$$

Die Gleichungen (2.3) nennt man die **Cauchy-Riemann-Gleichungen**.

Beweis: „(1) $\Longrightarrow$ (2)“: Sei $f'(z) = a+ib$ die komplexe Ableitung. Setze $A = \begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)-f'(z_0)\cdot h}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)-A\cdot h}{h}\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)-Ah}{\|h\|} = 0.$$

Wir haben gezeigt, dass f reell differenzierbar ist und dass die Ableitung die Matrix A ist. Um die reelle Ableitung klar von der komplexen zu unterscheiden, bezeichnen wir in diesem Kapitel die reelle Ableitung in z_0 als $Jf(z_0)$, wobei der Buchstabe J für Jacobi-Matrix steht.

$$A = Jf(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0)\\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_1) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_1)\end{pmatrix}$$

Daraus folgen die Cauchy-Riemann-Gleichungen.

„(2) $\Longrightarrow$ (1)“: Wir nehmen an f sei in z_0 reell differenzierbar und erfülle die Cauchy-Riemann-Gleichungen. Setze $a := \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)$ und $b = \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$ und $\zeta = a+ib$. Dann gilt wegen der Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$Jf(z_0) = \begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$$

Wir rechnen mit $h \in \mathbb{C}$:

$$\left\| \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} h}{\|h\|} \right\| = \left| \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - \zeta h}{|h|} \right| = \left| \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - \zeta h}{h} \right| .$$

Und somit

$$\begin{aligned} 0 &= \left\| \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} h}{\|h\|} \right\| \\ &= \lim_{h\to 0} \left\| \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} h}{\|h\|} \right\| \\ &= \lim_{h\to 0} \left| \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - \zeta h}{h} \right| \\ &= \left| \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - \zeta h}{h} \right| \\ &= \left| \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - \zeta \right) \right| \\ \implies \qquad \zeta &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} . \end{aligned}$$

Also ist f in z_0 komplex differenzierbar mit $f'(z_0) = \zeta$. ■

Im Beweis haben wir auch gesehen:

Zusatz 2.6. *Voraussetzungen und Notation wie in Satz 2.5. Wenn (1) – oder die dazu äquivalente Bedingung (2) – in Satz 2.5 gilt und wenn $f'(z_0) = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, dann folgt daraus:*

$$Jf(z_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} .$$

Der Zusatz wurde so im wesentlichen auch gezeigt, aber aus Zeitgründen in der Vorlesung nicht explizit formuliert.

2.3 Folgerungen aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen

Fr 25.10.

Der folgende Satz wird in der Vorlesung übersprungen, da er als Übungsaufgabe behandelt wird.

Satz 2.7. *Sei Ω ein Gebiet und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

(1) $\operatorname{Re} f$ *ist konstant*

(2) $\operatorname{Im} f$ *ist konstant*

(3) $|f|$ *ist konstant*

(4) $f'(z) = 0$ *für alle* $z \in \Omega$.

(5) f *ist konstant*

Der Beweis ist ein Übungsgaufgabe auf Übungsblatt 3.

Beweis: (5) $\Longrightarrow$ (1), (5) $\Longrightarrow$ (2), (5) $\Longrightarrow$ (3), (5) $\Longrightarrow$ (4) ist klar.

Wir betrachten nun die folgenden Umformungen, die aufgrund der Cauchy-Riemann-Gleichungen gelten: $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{C} \ni f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z) \\
&= \frac{\partial v}{\partial y}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z) \\
&= \frac{\partial v}{\partial y}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z)
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich:
(1) $\Longrightarrow$ für alle $z \in \Omega : u'(z) = 0 \Longrightarrow$ für alle $z \in \Omega : f'(z) = 0$ (4)
(2) $\Longrightarrow$ für alle $z \in \Omega : v'(z) = 0 \Longrightarrow$ für alle $z \in \Omega : f'(z) = 0$ (4)
(3) $\Longrightarrow u^2 + v^2$ ist konstant

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow && \begin{cases} 2\frac{\partial u}{\partial x}u + 2\frac{\partial v}{\partial x}v = 0 \\ 2\frac{\partial u}{\partial y}u + 2\frac{\partial v}{\partial y}v = 0 \end{cases} \\
&\overset{\text{CR-Gl.}}{\Longrightarrow} && \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial x}v = 0 \\ -\frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial x}v = 0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow && \frac{\partial u}{\partial x}u^2 + \frac{\partial u}{\partial x}v^2 = 0 \\
&\Longrightarrow && \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ oder } |f|^2 = u^2 + v^2 = 0
\end{aligned}$$

Man zeigt $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ oder $|f|^2 = u^2 + v^2 = 0$ analog. Wenn $|f|^2 = 0$ in einem Punkt gilt, so gilt dies überall. Wir haben alsogezeigt, dass entweder (1) gilt oder $f \equiv 0$ gilt. Insgesamt folgt (5).
(4) $\Longrightarrow$ für alle $z \in \Omega : Jf(z) = 0 \overset{\text{Ana II, } \Omega \text{ zshgd.}}{\Longrightarrow} f$ ist konstant (5) ■

2.4 Beziehungen zwischen holomorphen Funktionen und konformen Abbildungen

Der folgende Abschnitt kann in der Vorlesung aus Zeitgründen nur stark gekürzt behandelt werden. Da wichtige elementare Fakten der Linearen Algebra nochmals wiederholt werden, wollen wir die ausführliche Version im Skript belassen.

In der Mathematik wird das Wort „**konform**“ zumeist im Sinne von „**winkeltreu**“ benutzt. Sind V und W euklidische Vektorräume, so nennt man eine lineare Abbildung $h : V \to W$

konform, wenn sie Winkel erhält; dies bedeutet h ist injektiv und für alle $X, Y \in V \setminus \{0\}$ gilt

$$\sphericalangle(X, Y) = \sphericalangle(h(X), h(Y)).$$

Man zeigt im Rahmen der Linearen Algebra, dass es dann eine konstante $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass für alle $X, Y \in V$ gilt

$$\langle h(X), h(Y)\rangle = \lambda\langle X, Y\rangle\,.$$

Die Begriffe „konform“ und „winkeltreu“ werden aber auch für geeignete nicht-lineare Abbildungen benutzt. Hierfür müssen wir uns in einem Kontext befinden, in dem wir Winkel überhaupt definieren können und in dem es Sinn ergibt, dass Abbildungen Winkel auf Winkel abbilden. Dies ist zum Beispiel der Fall wenn wir Diffeomorphismen zwischen offenen Teilmengen euklidischer Vektorräume betrachten. Diese vage angedeuteten Begrifflichkeiten sollen nun in zwei-dimensionalen Räumen präzise eingeführt werden.

Nun wollen wir zunächst den Fall $V = W = \mathbb{R}^2$ (mit dem Standard-Skalarprodukt) mit einer $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ betrachten, und wir wollen wieder $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ wie folgt identifizieren:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{R}^2, \\ a + ib & \mathrel{\widehat{=}} & \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{array}$$

Wiederholung aus der Linearen Algebra

$h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$h(z + w) = h(z) + h(w).$$

h ist $\mathbb{R}$-linear genau dann, wenn h ein Gruppenhomomorphismus ist und für alle $z \in \mathbb{C}$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$h(\lambda z) = \lambda h(z).$$

h ist $\mathbb{C}$-linear genau dann, wenn h ein Gruppenhomomorphismus ist und für alle $z \in \mathbb{C}$ und für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$h(\lambda z) = \lambda h(z).$$

Wir definieren

$$I := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Matrix mit $h(z) = A \cdot z$. Dann sind äquivalent:

$$\begin{aligned} & h \text{ ist } \mathbb{C}\text{-linear} \\ \iff\ & \forall z \in \mathbb{C} \mathrel{\widehat{=}} \mathbb{R}^2 :\ h(iz) = ih(z) \text{ (Interpretation: } z, h(z) \in \mathbb{C}) \\ \iff\ & \forall z \in \mathbb{C} \mathrel{\widehat{=}} \mathbb{R}^2 :\ h(Iz) = Ih(z) \text{ (Interpretation: } z, h8z) \in \mathbb{R}^2) \\ \iff\ & AI = IA. \end{aligned}$$

Lemma 2.8. *Sei $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-linear, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die zugehörige Matrix. Dann sind äquivalent:*

(1) *h ist $\mathbb{C}$-linear.*

(2) *Es existiert ein $w \in \mathbb{C}$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $h(z) = wz$.*

(3) *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $h(iz) = ih(z)$.*

(4) *$IA = AI$.*

(5) *Es existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$*

Beweis: „(1) $\iff$ (3) $\iff$ (4)“ haben wir bereits gezeigt.

„(1) $\iff$ (2)“ wurde in der linearen Algebra gezeigt.

„(4) $\iff$ (5)“ zeigen wir nun. Es sei $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ und $I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$AI = \begin{pmatrix} c & -a \\ d & -b \end{pmatrix}$$

und

$$IA = \begin{pmatrix} -b & -d \\ a & c \end{pmatrix}.$$

Also gilt $AI = IA$ genau dann, wenn $a = d$ und $b = -c$. ■

!ACHTUNG!. *$h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$-linear. Es gilt $\det_{\mathbb{C}} h \neq \det_{\mathbb{R}} h$, denn:*

wenn $h(z) = wz$; $w = a + ib$, dann ist $\det_{\mathbb{C}} h = w$, $\det_{\mathbb{R}} h = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 = w\overline{w}$.

Lemma 2.9. *Sei $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear. Dann gelten folgende Äquivalenzen:*

(a) h ist $\mathbb{C}$-linear

$\iff$ *(b) h ist Verkettung einer zentrischen Streckung (mit Zentrum 0) und einer Drehung (mit Zentrum 0)*

$\iff$ *(c) h erhält die Winkel und die Orientierung.*

Für das obige Lemma definieren wir: h erhält die Winkel (oder h ist **winkeltreu** oder **konform**), genau wenn h injektiv ist und falls $\sphericalangle(x, y) = \sphericalangle(h(x), h(y))$, wobei dies wiederum äquivalent zu $\cos\langle x, y\rangle = \cos\langle h(x), h(y)\rangle$ ist.

Sei $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ injektiv und $\mathbb{R}$-linear. Dann gilt

- h ist **orientierungserhaltend** genau dann, wenn $\det_{\mathbb{R}} h > 0$.
- h ist **orientierungsumkehrend** genau dann, wenn $\det_{\mathbb{R}} h < 0$.

Beweis von Lemma 2.9:

„$(a) \Longrightarrow (b)$“ bereits oben bewiesen.

„$(b) \Longrightarrow (a)$“[18]: Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$h(z) = \lambda \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\cos(\varphi) & -\lambda\sin(\varphi) \\ \lambda\sin(\varphi) & \lambda\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

„$(b) \Longrightarrow (c)$“ ist klar.

„$(c) \Longleftarrow (a)$“:

$$h(z) = A \cdot z \text{ für } A \in \mathbb{R}^{2x2}, \quad A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Annahme: h ist winkeltreu und orientierungserhaltend mit $\det A > 0$.

Zu zeigen: $c = -b$ und $a = d$.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad &\Longrightarrow \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \perp A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \quad ac + bd = 0 \\
&\overset{\det A \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Weiter:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\Longrightarrow \quad & A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\Longrightarrow \quad & \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} a-c \\ b-d \end{pmatrix} \\
\Longrightarrow \quad & a^2 - c^2 + b^2 - d^2 = 0 \\
\Longrightarrow \quad & a^2 - \lambda^2 b^2 + b^2 - \lambda^2 a^2 = 0 \\
\Longrightarrow \quad & (1-\lambda^2)(a^2+b^2) = 0 \\
\Longrightarrow \quad & \lambda = 1 \text{ oder } \lambda = -1 \\
\Longrightarrow \quad & \det A = \det \begin{pmatrix} a & -\lambda b \\ b & \lambda a \end{pmatrix} = \lambda \underbrace{(a^2+b^2)}_{>0} \\
\Longrightarrow \quad & \lambda > 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \\
\Longrightarrow \quad & A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

■

[18] Es wäre eigentlich gar nicht nötig $(b) \Longrightarrow (a)$ zu zeigen. Zur besseren Vorstellung wird diese Implikation hier hinzugefügt.

Bemerkung 2.10. Man nennt $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **komplex anti-linear**, falls h $\mathbb{R}$-linear ist und

$$h(iz) = -ih(z)$$

gilt. Dann gilt also für alle $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$: $h(\lambda z) = \overline{\lambda}(z)$.

h ist komplex anti-linear $\overset{A=\mathrm{Mat}(h)}{\iff} AI = -IA \Leftrightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{R}: \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$
$\iff$ h ist Verkettung einer Spiegelung mit einer zentrischen Streckung
$\iff$ h konform und orientierungsumkehrend ist

Definition 2.11. *Sei $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar (im Sinne der Analysis II) und offen, so dass für alle $z \in \Omega$ gilt:* $\det Jf(z) \neq 0$. *Die Abbildung f ist* **winkeltreu** *oder* **konform**, *falls für alle $z_0 \in \Omega$ die durch $Jf(z_0) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ beschriebene lineare Abbildung konform ist. Die Abbildung f ist* **orientierungserhaltend** *bzw.* **orientierungsumkehrend**, *falls f für alle $z_0 \in \Omega$ $Jf(z_0) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ orientierungserhaltend bzw.* **orientierungsumkehrend** *ist.*

Abbildung 2.1: Beispiel einer winkeltreuen Abbildung.

Wir haben also gesehen:

Satz 2.12 (Satz über holomorphe und konforme Funktionen)**.** *Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, Ω offen in $\mathbb{C}$, f reell differenzierbar, wobei für alle $z \in \Omega$ gilt:* $\det Jf(z) \neq 0$.
Dann sind äquivalent:

(1) *f ist holomorph,*

(2) *f erfüllt die Cauchy-Riemann-Gleichungen,*

(3) *für alle $z \in \Omega$ ist $Jf(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex linear,*

(4) *f ist konform und orientierungserhaltend.*

Bemerkungen 2.13.

(a) Ist zusätzlich $f \in C^1$ und Ω zusammenhängend, dann ist f orientierungserhaltend genau dann, wenn es ein $z_0 \in \Omega$ gibt mit $\det_{\mathbb{R}} Jf(z_0) > 0$.

(b) Wir machen oben nur Aussagen für den Fall, dass für alle $z \in \Omega$ gilt: $\det Jf(z) \neq 0$.[19] Insbesondere in Punkten $z \in \Omega$ mit $Jf(z) = 0$ ist eine mit der Literatur konsistente Definition derzeit zu aufwändig.

[19] Dies war in der Vorlesung leider nicht so klar.

(c) Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar und ist für alle $z \in \Omega$ die reelle Ableitung $Jf(z)$ komplex anti-linear, so nennt man f anti-holomorph. Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt also auch: f ist anti-holomorph genau dann, wenn f konform und orientierungsumkehrend ist.

2.5 Potenzreihen und analytische Funktionen

Wir wollen nun Satz 2.3 zeigen. Wir erinnern an die Definition der Potenzreihe:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

mit $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Wir nehmen an, der Konvergenzradius R sei positiv.

Satz 2.3. *$P\colon B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ ist holomorph und*

$$P'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1}.$$

Der Konvergenzradius von P' ist mindestens so groß wie der von P.

Im Beweis wenden wir die folgende Proposition an.

Wir betrachten eine offene Teilmenge U in $\mathbb{R}^n$, $f_k\colon U \to \mathbb{R}$ stetig und $f\colon U \to \mathbb{R}$. Konvergiert f_k gleichmäßig gegen f, so folgt mit Analysis II, Kapitel 7, Satz 2.5, dass f stetig ist.

Nun stellt sich die Frage, ob aus $f_k \in C^1$ auch $f \in C^1$ folgt.

Proposition 2.1 aus Anhang A.2. *Sei U eine offene Teilmenge im $\mathbb{R}^n$, $f_k\colon U \to \mathbb{R} \in C^1$ und $f\colon U \to \mathbb{R}$. Wir definieren $Jf_k := f_k'\colon U \to \mathbb{R}^{1\times n} = \mathbb{R}^n$; dies sind stetige Funktionen. Es gelte zudem:*

(a) *f_k konvergiere gleichmäßig gegen f*

(b) *Jf_k konvergiere gleichmäßig gegen $g\colon U \to \mathbb{R}^n$,*

dann ist $f \in C^1$ und es gilt

$$Jf = g.$$

Der Beweis der Proposition ist eine naheliegende Verallgemeinerung des Spezialfalls $n = 1$, den wir in Analysis II, Kapitel 7, Theorem 3.3 betrachtet haben. Wir verweisen auf Anhang A.2 für Details zum Beweis.

Beweis von Satz 2.3: Es sei $n = 2$, $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ und $U := B_r(z_0)$ für ein $r \in (0, R)$.

$$f_k(z) := \sum_{j=0}^{k} a_j (z - z_0)^j.$$

Auf $B_r(z_0)$ konvergiert f_k gleichmäßig gegen P, ebenso konvergiert f_k' gleichmäßig gegen

$$z \longmapsto \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} j a_j (z - z_0)^{j-1}}_{=:Q(z)}$$

Es folgt aus f_k komplex differenzierbar, dass f_k auch reell differenzierbar ist und

$$Jf_k = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f_k' & -\operatorname{Im} f_k' \\ \operatorname{Im} f_k' & \operatorname{Re} f_k' \end{pmatrix}$$

Dann folgt mit Proposition 2.1 aus Anhang A.2, dass $P = \lim_{k\to\infty} f_k$ reell differenzierbar ist.

$$\begin{aligned} JP &= \begin{pmatrix} \lim_{k\to\infty} \operatorname{Re} f_k' & -\lim_{k\to\infty} \operatorname{Im} f_k' \\ \lim_{k\to\infty} \operatorname{Im} f_k' & \lim_{k\to\infty} \operatorname{Re} f_k' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} Q & -\operatorname{Im} Q \\ \operatorname{Im} Q & \operatorname{Re} Q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also erfüllt P die Cauchy-Riemann-Gleichungen und ist somit komplex differenzierbar:

$$P'(z) = \operatorname{Re} Q(z) + i \operatorname{Im} Q(z) = Q(z).$$

■

Definition 2.14. *Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sei Ω offen in $\mathbb{K}$. Eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{K}$ heißt im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$* **analytisch** *oder* **komplex-analytisch** *oder im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$* **analytisch** *oder* **reell-analytisch** *in $z_0 \in \Omega$, falls es eine Potenzreihe $P_{z_0}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{z_0,j}(z - z_0)^j$ mit $a_{z_0,j} \in \mathbb{K}$ mit Konvergenzradius $R_{z_0} > 0$ und eine offene Umgebung $U \subset B_{R_{z_0}}(z_0)$ von z_0 gibt, so dass*

$$f|_U = P_{z_0}|_U.$$

Falls f in allen $z_0 \in \Omega$ (reell-/komplex-) analytisch ist, dann nennt man f **(reell-/komplex-) analytisch**.[20]

Beispiele 2.15.

(1) Alle durch konvergente Potenzreihen gegebenen Funktionen sind analytisch (Beweis später, Satz 2.17) [21]

(2) Die Funktion

$$\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

ist komplex-analytisch. Für $z_0 \in \mathbb{C}$ setze $P_{z_0}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\exp(z_0)}{j!}(z - z_0)^j$. Dann gilt

$$\exp(z) = \exp(z_0)\exp(z - z_0) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\exp(z_0)}{j!}(z - z_0)^j = P_{z_0}(z).$$

[20] Die Bedingung „Es gibt eine offene Umgebung $U \subset B_{R_{z_0}}(z_0)$ von z_0 mit $f|_U = P_{z_0}|_U$“ ist äquivalent zu „es existiert ein $r \in (0, R_{z_0})$ mit $f|_{B_r(z_0)} = P_{z_0}|_{B_r(z_0)}$“.

[21] An dieser Stelle habe ich in der Vorlesung leider einen Schritt übersprungen.

Analog zeigt man, dass $z \longmapsto \exp(iz)$ und $z \longmapsto \exp(-iz)$ auf $\mathbb{C}$ komplex-analytisch ist. Dann sind auch $\cos z = (\exp(iz) + \exp(-iz))/2$ und $\sin z = (\exp(iz) - \exp(-iz))/(2i)$ auf $\mathbb{C}$ komplex-analytisch. [22]

(3) Aus f komplex-analytisch, folgt dass $\operatorname{Re} f_{|\mathbb{R}}$ und $\operatorname{Im}_{|\mathbb{R}}$ reell-analytisch sind.

(4) Eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten ist auch eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten. Deswegen kann eine reell-analytische Funktion lokal immer zu einer komplex-analytischen erweitert werden. Wir werden sehen: um reell-analytische Funktionen richtig zu verstehen, sollte man zunächst diese komplex-analytischen Erweiterungen verstehen.

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann sind $\mathbb{K}$-analytische Funktionen unendlich oft $\mathbb{K}$-differenzierbar (und damit insbesondere auch glatt, also im reellen Sinn unendlich oft differenzierbar). Angenommen:

$$f|_U = P_{z_0}|_U = \sum_{j=0}^{\infty} a_{z_0,j}(z - z_0)^j \,.$$

Dann haben wir:

$$\begin{aligned}
f|_U &= P_{z_0}|_U = \sum_{j=0}^{\infty} a_{z_0,j}(z - z_0)^j \\
f(z_0) &= 0!\, a_{z_0,0} \\
f'(z_0) &= 1!\, a_{z_0,1} \\
f''(z_0) &= 2!\, a_{z_0,2} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
f^{(\ell)} &= \ell!\, a_{z_0,\ell}
\end{aligned}$$

Also ist $\sum_{j=0}^{\infty} a_{z_0,j}(z - z_0)^j$ die Taylorreihe von f in z_0.

Die Funktion f ist $\mathbb{K}$-analytisch genau dann, wenn f unendlich oft $\mathbb{K}$-differenzierbar ist und in jedem Punkt durch die Taylorreihe dargestellt wird.

Bemerkung 2.16.

(1) Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt:

$$\text{reell-analytisch} \implies \text{glatt} \implies \text{differenzierbar}\,.$$

(2) Die Umkehrungen gelten nicht:

(a)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$x \longmapsto |x| \cdot x = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

ist differenzierbar, aber nicht in C^2, also auch nicht glatt.

[22] Wie in der Vorlesung erwähnt, ist der Tangens auf dem Definitionsbereich ebenfalls analytisch, dies ist aber noch nicht für Sie ersichtlich. Hierzu benötigen wir, dass der Quotient analytischer Funktionen auf dem Definitionsbereich wieder analytisch ist.

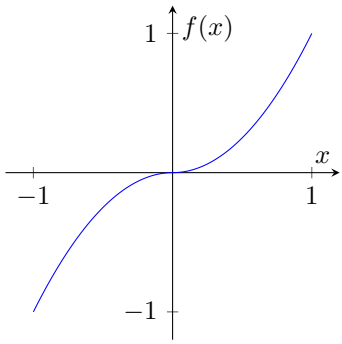


Abbildung 2.2: Der Graph der Funktion f in Bemerkung 2.16 (2) (a).

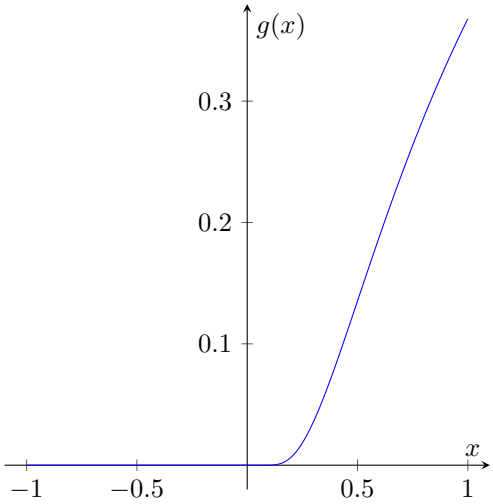


Abbildung 2.3: Der Graph der Funktion g in Bemerkung 2.16 (2) (b).

(b)

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

ist glatt[23]. Die Taylorreihe in 0 ist $\sum_{j=0}^{\infty} 0 \cdot z^j$, also ist f nicht analytisch.

(3) Wir werden sehen, dass im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt:

$$\text{analytisch} \iff \text{glatt} \iff \text{holomorph}.$$

Di 29.10.

Satz 2.17 (Änderung des Entwicklungspunkts)**.** *Sei $P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$ eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z_0 und mit Konvergenzradius $r_0 > 0$. Für jedes $z_1 \in B_{r_0}(z_0)$ gibt es eine Potenzreihe $Q(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j (z - z_1)^j$ mit Entwicklungspunkt z_1 und mit Konvergenzradius $\geq r_1 := r_0 - |z_0 - z_1| > 0$, so dass*

$$Q(z) = P(z) \qquad \forall z \in B_{r_1}(z_1).$$

[23] Überlegen Sie mal wieso, hilfreiche Übung!

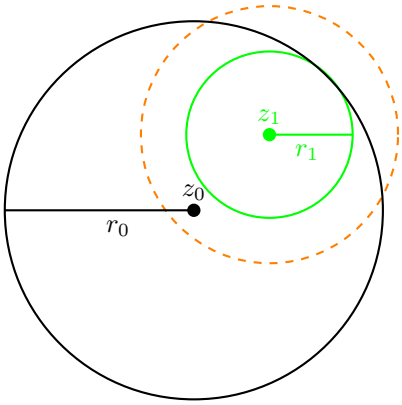


Abbildung 2.4: Abbildung zum Satz 2.17. Der gestreifte orangene Kreis deutet an, dass der Potenzradius in z_1 größer als r_1 sein kann.

Beweis: Sei o. B. d. A. $z_0 = 0$[24]. Wir wollen zeigen, dass die Taylor-Reihe von P mit Entwicklungspunkt z_1 auf $B_{r_1}(z_1)$ konvergiert und dass der Wert der Taylor-Reihe auf diesem Ball mit P übereinstimmt.

Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir $P_k(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(k+j)!}{j!} a_{k+j} \cdot z^j$. Die Potenzreihe P_k ist die k-te Ableitung von P, und deswegen ist der Konvergenzradius von P_k mindestens r_0. (Man kann sogar zeigen, dass er gleich r_0 ist.[25])
Damit folgt: $P_k(z)$ konvergiert für $|z| < r_0$.

Zu $z_1 \in B_{r_0}(z_0)$ wähle r mit $|z_1| < r < r_0$.[26] Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(z_1)}{k!}(r - |z_1|)^k$ wird majorisiert durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(k+j)!}{k!\,j!} |a_{k+j}||z_1|^j \Big)}_{\geq \frac{|P_k(z_1)|}{k!}} (r - |z_1|)^k \overset{(1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty,$$

wobei bei (1) der Cauchysche Doppelreihensatz (Satz 3.1 aus Anhang A.3) [27] und die binomische

[24] Ansonsten verschiebe alles um z_0.
[25] Um die Konvergenzradien zu bestimmen, kann man rechnen:

$$\limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{|a_{k+j}|} = \limsup_{j\to\infty} (|a_{j+k}|^{\frac{1}{j}})^{\frac{j}{j+k}} = \limsup_{j\to\infty} \sqrt[j+k]{|a_{j+k}|} = \limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{|a_j|}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[j]{\frac{(k+j)!}{j!}} &= \sqrt[j]{(j+1)(j+2)\dots(j+k)} \\ &= \underbrace{\sqrt[j]{(j+1)}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1} \dots \underbrace{\sqrt[j]{j+k}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1} \longrightarrow 1 \end{aligned}$$

sieht man

$$\limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{\frac{(k+j)!}{j!}|a_j|} = \limsup \sqrt[j]{|a_j|}$$

[26] In der Vorlesung stand hier zunächst $r < r_0$, dann $r < r_1$, korrekt ist aber das, was oben steht! Entschuldigung. Obige Bedinung impliziert dann $0 \leq r - |z_1| < r_1$ und jede Zahl $\rho \in (0, r_1)$ erhält man in der Form $r - |z_1|$.
[27] Der Cauchysche Doppelreihen-Satz ist etwas allgemeiner als der Satz vom Cauchy-Produkt (Analysis I, Kap. 3, Kor. 2.37). Wir verwenden diese stärkere Version, die sich sehr ähnlich beweist. Details siehe Anhang A.3.

Formel

$$r^n = ((r - |z_1|) + |z_1|)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} |z_1|^j (r - |z_1|)^{n-j}$$

angewandt wird. Also ist ihr Konvergenzradius $\geq r_1 = r_0 - |z_0|$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(z_1)}{k!}(z - z_1)^k$, hat denselben Konvergenzradius, das heißt sie konvergiert insbesondere für alle $z \in B_{r_1}(z_1)$. Es gilt für $|z - z_1| < r_1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(z_1)}{k!}(z - z_1)^k &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(k+j)!}{k!j!} a_{k+j} z_1^j (z - z_1)^k \\ &\overset{(2)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = P(z),\end{aligned}$$

wobei bei (2) zum einen wieder der Cauchysche Doppelreihensatz (Satz 3.1 aus Anhang A.3 angewandt wird und die Gleichheit wie folgt gilt:

$$z^n = ((z - z_1) + z_1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z_1^j (z - z_1)^{n-j}.$$

■

Wir haben sogar eine Möglichkeit erhalten, die Koeffizienten von Q zu berechnen:

$$b_k = \frac{P_k(z_1)}{k!} \tag{2.4}$$

Es folgt direkt:

Korollar 2.18 (Potenzreihen sind analytisch)**.** *Potenzreihen sind auf dem Konvergenzgebiet*[28] *analytisch.*

Berechnungen mit konvergenten Potenzreihen

Im folgenden sei wieder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Seien $P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ und $Q(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$ Potenzreihen mit Konvergenzradius $\geq \rho > 0$.

Summe und Differenz.

$\sum_{j=0}^{\infty}(a_j + b_j)z^j$ konvergiert auf $B_\rho(0)$ gegen $P(z) + Q(z)$.

Produkte.

$c_k := \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$. Der Satz vom Cauchy-Produkt (Analysis I, Kap. 3, Kor. 2.37 oder Korollar 3.2 aus Anhang A.3) – oder alternativ der allgemeinere Cauchysche Doppelreihen-Satz (Satz 3.1 aus Anhang A.3) – liefert: $\sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$ konvergiert auf $B_\rho(0)$ gegen $P(z) \cdot Q(z)$.

Kehrwert.

Falls $P(0) = a_0 \neq 0$, dann gibt es ein $r \in (0, \rho]$ mit $z \longmapsto \frac{1}{P(z)}$, $B_r(0) \to \mathbb{K}$ glatt (bekannt)

[28] Unter Konvergenzgebiet verstehen wir die Menge $B_r(z_0)$, wobei z_0 der Entwicklungspunkt der Potenzreihe und r der Konvergenzradius der Potenzreihe ist.

und sogar analytisch (Korollar 2.22) und konvergiert auf $B_\varepsilon(0) \subset B_\rho(0)$ für ein $\varepsilon > 0$. Der Konvegenzradius der Potenzreihe $z \longmapsto \frac{1}{P(z)}$ ist also positiv. [29]

Wir schreiben $\frac{1}{P(z)} = \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^j$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 1 + 0 \cdot z + 0 \cdot z^2 + \ldots = 1 &= \frac{1}{P(z)} \cdot P(z) \\ &= \Big(\sum_{j=0}^{\infty} d_j z^j\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{k}(d_j a_{k-j}) z^k\Big). \end{aligned}$$

Weiter folgt mit der Produktformel:

$$\begin{aligned} 1 &= d_0 a_0 \\ 0 &= d_0 a_1 + d_1 a_0 \\ 0 &= d_0 a_2 + d_1 a_1 + d_2 a_0 \\ \vdots & \quad \vdots \\ 0 &= d_0 a_k + d_1 a_{k-1} + \cdots + d_k a_0 \\ \vdots & \quad \vdots \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die folgenden Formelm zur rekursiven Berechnung der d_k:

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{1}{a_0} \\ d_1 &= \frac{1}{a_0}(-d_0 a_1) \\ d_2 &= \frac{1}{a_0}(-d_0 a_2 - d_1 a_1) \\ \vdots & \quad \vdots \\ d_{k+1} &= \frac{1}{a_0}(-d_0 a_{k+1} - \ldots - d_k a_1) \\ \vdots & \quad \vdots \end{aligned}$$

Also kann man die Koeffizienten von $\frac{1}{P(z)}$ iterativ aus den Koeffizienten von $P(z)$ berechnen.

Beispiel 2.19. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir betrachten die Polynomfunktion $z \longmapsto 1 - z$ als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. Dies Potenzreihe konvergiert offensichtlich auf $\mathbb{K}$. Der Konvergenzradius ist also ∞. Der Kehrwert ist auf einer Umgebung der 0 als Potenzreihe $\sum_{j=0}^{\infty} d_j z^j$ gegeben und wir erhalten wegen $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $0 = a_2 = a_3 = \ldots$, die Gleichungen $d_0 = 1$, $d_{k+1} = \frac{1}{1}(-d_k \cdot (-1)) = d_k$, also

$$z \longmapsto \frac{1}{1-z} = \sum_{j=0}^{\infty} z^j.$$

[29] Es kann durchaus vorkommen, dass $\varepsilon < \rho$. Da wir wissen, dass der Konvergenzradius von $1/P(z)$ mindestens ϵ ist, wissen wir im allgemeinen nicht mehr als seine Positivität.

Diese Potenzreihe hat Konvergenzradius 1, also hat sich der Konvergenzradius verkleinert.

Quotienten.

Ergibt sich direkt aus Produkt und Kehrwert.

Verkettung von konvergenten Potenzreihen.

Seien $P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ und $Q(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$ Potenzreihen mit $b_0 = 0$, mit Konvergenzradien $r_P > 0$ und $r_Q > 0$. Es gibt dann eine reelle Zahl $\rho > 0$ mit $\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|\rho^j < r_P$. Für $|z| < \rho$ gilt

$$|Q(z)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |b_j||z|^j < r_P$$

Also ist $P(Q(z))$ wohldefiniert.

$$\begin{aligned} P(Q(z)) &= a_0 + a_1(b_1 z + b_2 z^2 + \dots) + a_2(b_1 z + b_2 z^2 + \dots)^2 + \dots \\ &\overset{(*)}{=} a_0 + (a_1 b_1)z + (a_1 b_2 + a_2 b_1^2)z^2 + (a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3)z^3 + \dots \end{aligned}$$

Umordnen $(*)$ ist erlaubt, da

$$|a_0| + |a_1|(|b_1||z| + |b_2||z^2| + \dots) + |a_2|(|b_1| \dots)^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \underbrace{\Big(\sum_{\ell=1}^{\infty} |b_\ell| \underbrace{|z|^\ell}_{<\rho} \Big)^j}_{<r_\rho} < \infty\,. \tag{2.5}$$

Hierbei verwenden wir eine Modifikation des Umordnungssatzes, siehe Anhang A.3 Satz 3.3.

Satz 2.20 (Verkettung von Potenzreihen)**.** *Seien $P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j$ und $Q(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j(z-z_1)^j$ zwei Potenzreihen mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ und mit Konvergenzradien $r_P > 0$ und $r_Q > 0$. Sei weiter $b_0 = z_0$. Dann gibt es eine Potenzreihe $R(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-z_1)^j$ mit [30] Konvergenzradius $\geq \hat{\rho} := \sup\{\rho > 0 \mid \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|\rho^j < r_P\}$, so dass $P \circ Q(z) = R(z)$ für alle $z \in B_{\hat{\rho}}(z_1)$, $c_0 = a_0$, $c_1 = a_1 b_1$, $c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1^2$, $c_3 = a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + +a_3 b_1^3$, $\dots$.*

Beweis: Im Fall $z_0 = 0 = z_1 = b_0$ haben wir es oben gezeigt. Der allgemein Fall folgt durch Verschieben. ■

Es folgt direkt:

Korollar 2.21 (Verkettung analytischer Funktionen)**.** *Die Verkettung analytischer Funktionen ist ebenfalls analytisch.*

Korollar 2.22 (Kehrwerte analytischer Funktionen sind analytisch)**.** *Es sei Ω offen in $\mathbb{K}$ und f eine analytische Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{K}$. Dann ist $\Omega \setminus f^{-1}(0) \to \mathbb{K}$, $z \longmapsto 1/f(z)$ analytisch.*

Beweis von Korollar 2.22: Wir behaupten, dass $\mathbb{C} \setminus \{0\} \xrightarrow{h} \mathbb{C}$ mit $z \longmapsto \frac{1}{z}$ analytisch ist. Aus der Behauptung folgt dann Korollar 2.22, denn wir wissen ja auf Grund von Satz 2.20, dass die Verkettung der analytischen Funktionen h und f wieder analytisch ist, $h(f(z)) = 1/f(z)$.

[30] Das hier konstruierte $\hat{\rho}$ ist also die eindeutige Lösung von $\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|\hat{\rho}^j = r_P$, eine einfachere Charakterisierung, die allerdings im folgenden nicht benötigt wird.

Beweis der Behauptung:
Wir rechnen $h(z) = \frac{1}{z}$, $h^{(k)}(z) = (-1)^k k! z^{-(k+1)}$. Man muss zeigen, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(w_0)}{k!}(z-w_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k w_0^{-k-1}(z-w_0)^k \end{aligned}$$

auf einer Umgebung von $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k w_0^{-k-1}(z-w_0)^k &= \frac{1}{w_0} \sum_{k=0}^{\infty} q^k \\ &\overset{(1)}{=} \frac{1}{w_0} \frac{1}{1-q} \\ &= \frac{1}{w_0} \frac{w_0}{w_0 + z - w_0} \\ &= \frac{1}{z}, \end{aligned}$$

wobei $q = -\frac{z-w_0}{w_0}$ mit $|z-w_0| < |w_0|$ und bei (1) die geometrische Reihe verwendet wird. ■

Umkehrfunktionen.

Falls $f : \Omega \to \mathbb{K}$ analytisch mit $f'(z_0) \neq 0$ ist, dann besitzt f eine lokale Umkehrfunktion. Das heißt: es existiert eine offene Umgebung U von z_0 in Ω, so dass $f|_U$ injektiv ist und $(f|_U)^{-1} \colon f(U) \to U$ analytisch ist.

Beweis: [31] Zunächst reicht es, den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ zu betrachten, denn reelle Potenzreihen können auf $\mathbb{C}$ erweitert werden. Die reelle analytische Umkehr-Funktion erhält man dann durch Restriktion der komplexen Umkehrfunktion auf reelle Argumente.

Sei also nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. *Der Beweis nutzt die noch nicht bewiesene Aussage, dass holomorphe Funktionen analytisch sind.*[32]

Da f analytisch ist, ist f beliebig oft im komplexen Sinn differenzierbar. Insbesondere ist auch $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Eine Aufgabe auf Übungsblatt 4 besagt nun, dass es eine offene Umgebung U von z_0 in Ω gibt, so dass $f|_U$ injektiv ist und $(f|_U)^{-1} \colon f(U) \to U$ holomorph ist. Sobald wir gezeigt haben, dass holomorphe Funktionen analytisch sind, ist somit auch die Umkehrfunktion analytisch.

Beweis der Übunsgaufgabe. Die Bedingung $f'(z_0) \neq 0$ impliziert, dass $Jf(z_0) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertierbar ist. Da f' stetig ist, ist f im reellen Sinn stetig differenzierbar. Aus dem lokalen Umkehrsatz folgt die Existenz einer Umgebung U von z_0, so $f|_U$ injektiv ist und $g := (f|_U)^{-1} \colon f(U) \to U$ reell differenzierbar ist. Es folgt für alle $z \in U$: $Jg(f(z)) \cdot Jf(z) = \mathbb{1}_2$. Aus der komplexen Linearität von $Jf(z)$ (Cauchy-Riemann-Gleichungen) folgt also die komplexen Linearität von $Jg(f(z))$. Somit erfüllt auch g die Cauchy-Riemann-Gleichungen, ist also auch holomorph. ■

[31] Dieser Beweis wurde in der Vorlesung übersprungen.
[32] Wir dürfen diese Aussage also vorläufig nicht im Aufbau der Vorlesung nutzen!

Die Koeffizienten der lokalen Umkehrfunktion können wir nun mit Satz 2.20 berechnet werden. Wir schreiben lokal

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j \qquad f^{-1}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j (z - f(z_0))^j$$

Man wendet den Satz nun entweder für $f \circ f^{-1}(z) = z$ oder $f^{-1} \circ f(z) = z$ an und erhält dann zum Beispiel $b_0 = z_0$, $1 = a_1 b_1$, $0 = a_1 b_2 + a_2 b_1^2$, $0 = a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3$, $\ldots$, was induktiv Formeln für alle b_k liefert. Man kann so endlich viele Koeffizienten gut berechnen. Mir ist aber keine in der Praxis gut nutzbare Formel bekannt, die alle Koeffizienten auf einmal beschreibt, ohne dass man zur Berechnung mit kombinatorische Problemen konfrontiert wird. Für spezielle Koeffizienten a_i kann man aber eventuell mit guten „Tricks“ zu den Koeffizienten b_i kommen, wie z. B. in Aufgabe 4 von Übungsblatt 4.

Zusammenfassung:.

Aus f, g analytisch folgt:

- $f \pm g$ analytisch
- $f \cdot g$ analytisch
- $\frac{1}{f}$ analytisch
- $\frac{f}{g}$ analytisch
- $f \circ g$ analytisch
- f^{-1} analytisch (noch nicht vollständig gezeigt)

Di 5.11. wobei man die Koeffizienten aus den Koeffizienten von f und g erhält.

Identitätssätze

Satz 2.23 (Identitätssatz für Potenzreihen)**.** *Sei $P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ eine reelle oder komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann sind äquivalent:*

(1) $P \equiv 0$ *auf* $B_r(0)$.

(2) $P^{(k)}(0) = 0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$ *(P verschwindet in 0 von Ordnung ∞)*

(3) $a_k = 0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$

(4) *Es gibt* $z_n \in B_r(0) \setminus \{0\}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ *und* $P(z_n) = 0$. *In anderen Worten:* 0 *ist Häufungspunkt von* $P^{-1}(\{0\})$.

Beweis: (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (1) $\Longrightarrow$ (4) ist alles klar.

Bleibt also zu zeigen, dass (4) auch (1) impliziert.

$$
\begin{aligned}
0 = \lim_{n\to\infty} P(z_n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_j z_n^j \overset{(*)}{=} \sum_{j=0}^{\infty} a_j (\underbrace{\lim_{n\to\infty} z_n}_{=0})^j = a_0 \\
\frac{P(z)}{z} &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{j-1} \\
0 = \lim_{n\to\infty} \frac{P(z_n)}{z_n} &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j (\underbrace{\lim_{n\to\infty} z_n}_{=0})^{j-1} = a_1 \\
\vdots \qquad & \quad \vdots \\
0 = \lim_{n\to\infty} \frac{P(z_n)}{z_n^k} &= \sum_{j=k}^{\infty} a_j (\underbrace{\lim_{n\to\infty} z_n}_{=0})^{j-k} = a_k \\
\vdots \qquad & \quad \vdots
\end{aligned}
$$

Hierbei haben wir bei $(*)$ die Stetigkeit von Potenzreihen benutzt. Es folgt (3) und somit auch (1). ■

Wiederholung: $\Omega \subset \mathbb{C}$ ist genau dann ein Gebiet, wenn Ω zusammenhängend, offen und nicht leer ist.

Satz 2.24 (Identitätssatz für analytische Funktionen)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$ im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{K}$ analytisch. Dann sind äquivalent:*

(1) $f \equiv 0$

(2) *Es existiert ein $z_0 \in \Omega$, so dass $0 = f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots$.*

(3) *Es gibt ein $H \subset \Omega$ mit mindestens einem Häufungspunkt in Ω, so dass $f_{|H} \equiv 0$. ($\Leftrightarrow f^{-1}(0)$ besitzt einen Häufungspunkt in Ω.)*

Beweis: (1)$\Longrightarrow$ (2) ist klar. (1) $\Longrightarrow$ (3) ist klar mit $H := \Omega$.

Es gelte (2) oder (3). Für (3) sei $z_0 \in \Omega$ ein Häufungspunkt von H, nach Voraussetzung gilt $f_{|H} \equiv 0$. Für (2) und (3) verschwindet dann – aufgrund des Identitätssatzes für Potenzreihen – die Funktion f auf einer Umgebung von z_0. Das heißt, es existiert ein $\varepsilon > 0 :\ f_{|B_\varepsilon(z_0)} \equiv 0$. Definiere nun

$$
\begin{aligned}
U &:= \{z \in \Omega \mid f \text{ verschwindet auf einer Umgebung von } z\} \\
&\overset{\text{Satz 2.23}}{=} \{z \in \Omega \mid 0 = f(z) = f'(z) = f''(z) = \dots\} \\
&= \underbrace{f^{-1}(\{0\})}_{\{z\in\Omega \mid f(z)=0\}} \cap (f')^{-1}(\{0\}) \cap \dots \\
&= \bigcap_{j=0}^{\infty} \underbrace{\{z \in \Omega \mid f^{(j)}(z) = 0\}}_{(f^{(j)})^{-1}(\{0\}) \text{ abgeschlossen in } \Omega}
\end{aligned}
$$

Also ist U abgeschlossen in Ω. Aus dem oben Gezeigten folgt $z_0 \in U$.

U ist auch offen: sei $z \in U$, dann existiert ein $\varepsilon > 0 :\ f|_{B_\varepsilon(z)} \equiv 0$. Also für alle $w \in B_\varepsilon(z)$:

$f|_{B_{\varepsilon-|w-z|}(w)} \equiv 0$. Also $w \in U$.

Abbildung zum Beweis von Satz 2.24

Wir haben somit $B_\varepsilon(z) \subset U$. Deswegen ist U offen und abgeschlossen in Ω. Da Ω zusammenhängend ist, folgt $\Omega = U$. ■

Korollar 2.25. *Angenommen $f, g\colon \Omega \to \mathbb{K}$ analytisch, Ω Gebiet, $z_n, z_\infty \in \Omega$.*

- *Angenommen es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$: $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$. Dann folgt mit Satz 2.24 auch $f \equiv g$.*
- *Existiert eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n \to z_\infty$, $z_n \neq z_\infty$, $f(z_n) = g(z_n)$. Dann folgt: $f \equiv g$.*

Bemerkung 2.26. Aber es gibt analytische Funktionen $f\colon \Omega_1 \to \mathbb{C}$, $g\colon \Omega_2 \to \mathbb{C}$, sodass $(f-g)$ auf einer Umgebung von z_0 verschwindet, aber $(f-g)|_{\Omega_1\cap\Omega_2} \not\equiv 0$, siehe Beispiel 2.32 (3).

Wir erhalten auch hieraus:

Bemerkung (Prinzip der analytischen Fortsetzung)**.** Angenommen Ω ist ein Gebiet in $\mathbb{K}$, U eine offene Teilmenge von Ω und $f : U \to \mathbb{K}$ analytisch. Dann gibt es höchstens eine analytische Fortsetzung auf Ω, das heißt, es gibt höchstens eine analytische Funktion $F : \Omega \to \mathbb{K}$ mit $F|_U = f$.Wir haben aber noch keine Kriterien gesehen, mit denen wir im allgemeinen entscheiden können, ob solch ein F existiert.

Satz 2.27. *Ω Gebiet, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, Ω ein offenes Intervall ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$). $f\colon \Omega \to \mathbb{K}$ analytisch, $f \not\equiv 0$. Dann ist $f^{-1}(0) = \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$ diskret.*

Wiederholung: $A \subset \mathbb{C}$ diskret genau dann, wenn die von $\mathbb{K}$ induzierte Topologie auf A die diskrete Topologie ist. Dies ist genau dann, wenn für alle $z \in A$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(z) \cap A = \{z\}$.

Beweis: Angenommen $f^{-1}(0)$ ist nicht diskret. Dann existiert ein $z \in f^{-1}(0)$, so dass $\{z\}$ nicht offen in $f^{-1}(0)$ ist. Dies impliziert: für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $z_n \in (B_{\frac{1}{n}}(z) \setminus \{z\}) \cap f^{-1}(0)$. Somit $z_n \neq z : |z_n - z| < \frac{1}{n} \to 0$. Daraus folgt, dass z ein Häufungspunkt von $f^{-1}(0)$ ist. Mit Satz 2.24 folgt $f \equiv 0$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. ■

Folgerung 2.28. *Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$. Sei $K \subset \Omega$ eine kompakte Teilmenge. Weiter sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch mit $f \not\equiv 0$. Dann ist $f^{-1}(0) \cap K$ endlich.*

Denn $f^{-1}(0)$ ist diskret und abgeschlossen in Ω.
$\Longrightarrow f^{-1}(0) \cap K$ ist diskret und abgeschlossen in K.
$\Longrightarrow f^{-1}(0) \cap K$ ist kompakt und diskret.
$\Longrightarrow f^{-1}(0) \cap K$ ist endlich, denn kompakte diskrete Mengen sind endlich.

2.6 Die komplexe Exponentialfunktion und die „Logarithmusfunktion“

Exponentialfunktion.

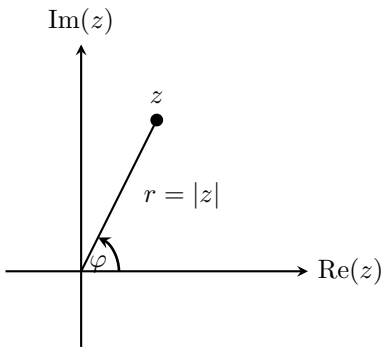


Abbildung 2.5: Veranschaulichung von $z = r \cdot e^{i\varphi}$.

Wir betrachten die **Polardarstellung** von $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$z = re^{i\varphi} = r\cos\varphi + ri\sin\varphi \text{ mit } r \in \mathbb{R}, \quad r = |z|,$$

r ist der **Betrag von z**, $\varphi \in \mathbb{R}$ und $\varphi = \arg z$ heißt **Argument** von z.

Das Argument φ ist nicht eindeutig, also ist auch $\arg z$ im Allgemeinen nicht eindeutig, sondern nur bis auf Vielfache von 2π, definiert.

Die Exponentialfunktion ist $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \longmapsto \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} z^j =: \exp z = e^z$.

Eigenschaften 2.29.

(1) $\left(\frac{d}{dz} \exp\right)(z) = \exp(z)$

(2) Mit dem Satz vom Cauchy-Produkt (Analysis I, Kap. 3, Kor. 2.37 oder Korollar 3.2 aus Anhang A.3) haben wir gesehen: $\exp(z + w) = (\exp(z))(\exp(w))$

(3) $\exp(z) \cdot \exp(-z) = 1$, also ist $\exp(z) \neq 0$. Es folgt: $\exp(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Andererseits definieren wir für $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$: $z := \log|w| + i \cdot \arg w$

$\Longrightarrow e^z = e^{\log|w|} \cdot e^{i \cdot \arg w} = |w| e^{i \cdot \arg w} = w$.
Also $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(4) $e^z = 1 \Longleftrightarrow z = 2\pi i n$ mit $n \in \mathbb{Z}$.
Denn sei $e^z = 1$, $z = x + iy$, dann folgt daraus

$$|e^z| = 1 \quad \Longrightarrow \quad |e^z| = |e^x| \underbrace{|e^{iy}|}_{=1} = 1,$$

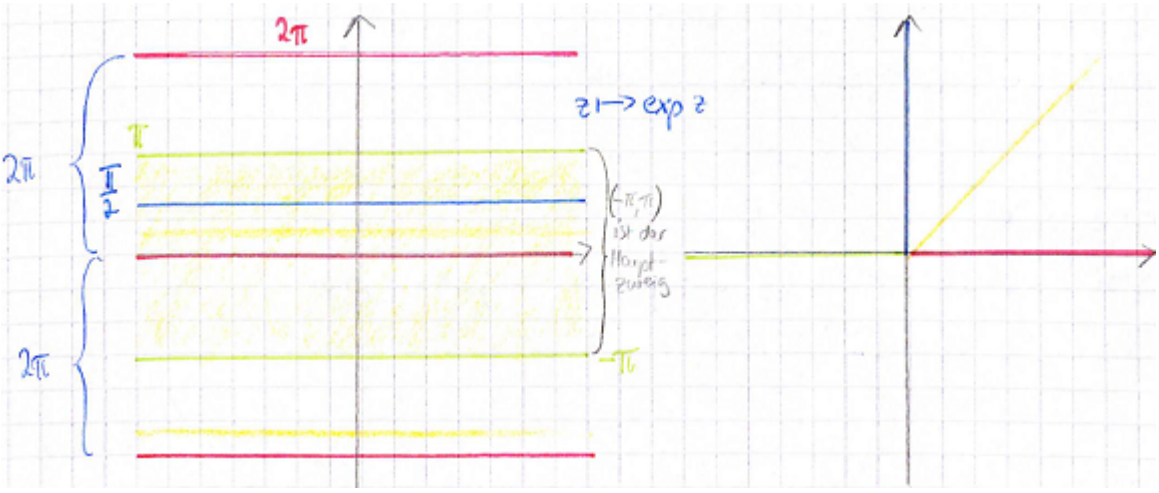
wobei wir nutzten: $|e^{iy}|^2 = e^{iy}e^{-iy} = e^0 = 1$.

Es gilt also: $x = 0$ und man muss noch zeigen: $y = 2\pi n$

$1 = e^{iy} = \cos y + i \sin y \Longrightarrow \cos y = 1,\ \sin y = 0$. Also: $y \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Logarithmus.

Löse $e^z = w$, $w \neq 0$. $e^z = w \Longleftrightarrow z = \log|w| + i \arg w$, wobei $\arg w$ bis auf $2\pi\mathbb{Z}$ eindeutig bestimmt



ist.

Definition 2.30. *Die* **Logarithmus-„Funktion“** *ist die Relation*

$$\log\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$$

$$w \longmapsto \log|w| + i\arg w,$$

wobei $\arg w$ *bis auf* $2\pi\mathbb{Z}$ *eindeutig bestimmt ist.* [33] *Man redet in diesem Zusammenhang oft von „vieldeutigen Funktionen“. Man kann es auch als eine wohldefinierte Funktion mit* $\log\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}/(2\pi i\mathbb{Z})$ *ansehen. Um möglichst präzise zu bleiben, arbeiten wir aber nicht mit diesem Konzept der vieldeutigen Funktionen; wir wollen gar nicht näher diskutieren, was die Logarithmus-„Funktion“ nun wirklich ist, sondern mit dem folgenden Konzept des Zweiges der Logarithmus-Funktion arbeiten: Ist* $\Omega \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *ein Gebiet und* $\ell\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *eine stetige Funktion mit* $\exp(\ell(z)) = z$ *für alle* $z \in \Omega$*, dann nennt man* ℓ *einen* **Zweig der Logarithmusfunktion**.[34]

!ACHTUNG!. *Ist* $\ell\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *ein Zweig der Logarithmusfunktion, dann ist auch* $\ell + 2\pi i$ *ein Zweig der Logarithmusfunktion. Die Zweige sind also keineswegs eindeutig.*

Spezialfall:

$$\begin{aligned} \operatorname{Log}\colon \Omega = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\leq 0} &\to \mathbb{C} \\ \operatorname{Log} w &= \log|w| + i\arg w \\ -\pi < \arg w &< \pi \end{aligned}$$

ist der **Hauptwert des Logarithmus** *oder der* **Hauptzweig des Logarithmus**.

Lemma 2.31. *Sind* $f, g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *Zweige der Logarithmusfunktion, dann existiert ein* $n \in \mathbb{Z}$ *für alle* $z \in \Omega$*, so dass* $f(z) = g(z) + 2\pi i n$.

Beweis:

$$z = e^{f(z)} = e^{g(z)}$$

[33] Der Begriff „Logarithmus**funktion**“ ist historisch gewachsen und etwas problematisch. Strikt in der Sprache, die wir in Analysis I eingeführt haben, ist damit die Relation $\{(\exp z, z) \in \mathbb{C}^2 \mid z \in \mathbb{C}\} = \{(w, |w| + i\arg w) \in \mathbb{C}^2 \mid w \in \mathbb{C}\setminus\{0\},\quad \arg w \text{ ist irgendein Argument von } w\}$ gemeint. Diese Relation ist aber nicht funktional.

[34] Zweige der Logarithmusfunktion sind Funktionen im klassischen Sinn, keine „vieldeutigen“ Funktionen.

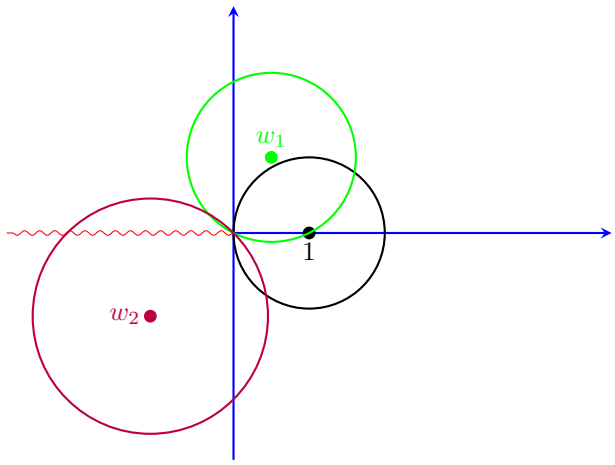


Abbildung 2.6: Zu Beispiel 2.32. Alles außer dem negativen Teil der reellen Achse (orange gewellt) ist der Definitionsbereich von Log. Der Definitionsbereich von $\widetilde{\mathrm{Log}}$ aus (1) ist die schwarze Kreisscheibe. Die rote und grüne Kreisscheibe sind die Definitionsbereiche eines Zweigs der Logarithmusfunktion wie in (2) für zwei verschiedene $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad e^{f(z)-g(z)} = 1 \\ &\Longrightarrow \quad f(z) - g(z) \in 2\pi i\mathbb{Z} = \{2\pi i n \mid n \in \mathbb{Z}\}\,. \end{aligned}$$

Wir definieren $A := \{\underbrace{f(z) - g(z)}_{\text{stetig in } z} \mid z \in \Omega\}$. Als Bild der zusammenhängenden Menge Ω unter einer stetigen Funktion ist A zusammenhängend [35] und $A \subset 2\pi i\mathbb{Z}$ ist diskret. Diskrete, zusammenhängende Mengen bestehen nur aus einem Punkt. Also existiert ein $n \in \mathbb{Z}$, so dass $A = \{2\pi i n\}$. ■

Beispiel 2.32. Potenzreihen als Zweige der Logarithmusfunktion

(1) Für $|z| < 1$ definiere

$$\widetilde{\mathrm{Log}}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

mit $\widetilde{\mathrm{Log}}\colon B_1(1) \to \mathbb{C}$, $1 \longmapsto 0$. Aufgabe 4 auf Übungsblatt 4 impliziert: $\widetilde{\mathrm{Log}}$ ist ein Zweig der Logarithmusfunktion. Deswegen

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}\,|_{B_1(1)} &= \widetilde{\mathrm{Log}} + 2\pi i n \\ \mathrm{Log}(1) &= 0 = \widetilde{\mathrm{Log}}(1) \\ \Longrightarrow \qquad n &= 0 \\ \Longrightarrow \mathrm{Log}\,|_{B_1(1)} &= \widetilde{\mathrm{Log}} \end{aligned}$$

[35] Ω ist ein Gebiet, da wir Zweige der Logarithmusfunktionen nur auf Gebieten definiert haben. Damit ist Ω insbesondere zusammenhängend.

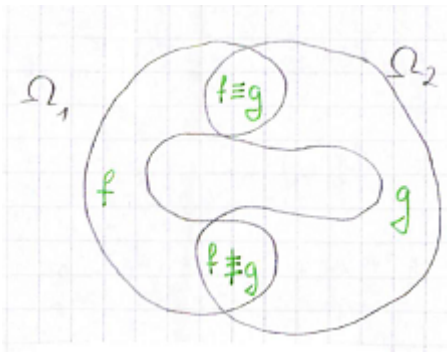


Abbildung 2.7: Beispiel Zweige der Logarithmusfunktion.

(2) $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ w = |w|e^{i\varphi}$ mit $z \in B_{|w|}(w) \iff \frac{z}{w} \in B_1(1)$,

$$\begin{aligned} L_{|w|,\varphi} \colon B_{|w|}(w) &\to \mathbb{C}, \\ z &\longmapsto \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{z}{w} - 1\right)^n}_{= \widetilde{\operatorname{Log}}\left(\frac{z}{w}\right)} + \log|w| + i\varphi \end{aligned}$$

ist ein Zweig der Logarithmusfunktion, denn

$$\begin{aligned} \exp(L_{|w|,\varphi}(z)) &= \left[\exp\left(\widetilde{\operatorname{Log}}\left(\frac{z}{w}\right)\right)\right] \cdot |w| \cdot e^{i\varphi} \\ &= \frac{z}{w} \cdot w \\ &= z \end{aligned}$$

(3) Beispiel zur Bemerkung 2.26: Wir betrachten den Fall $w = -1 = 1e^{i\pi}$. Dann ist $L_{1,\pi} : \Omega_1 := B_1(-1) \to \mathbb{C}$ ein Zweig der Logarithmus-Funktion, der auf $B_1(-1) \cap \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ mit dem Hauptzweig $\operatorname{Log} : \Omega_2 := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$ übereinstimmt. Auf $B_1(-1) \cap \{z \mid \operatorname{Im} z < 0\}$ gilt aber $L_{1,\pi} = L_{1,-\pi} + 2\pi i = \operatorname{Log} + 2\pi i$.

Aus dem Beispiel folgt, dass es zu jedem $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ einen Zweig $\ell \colon B_{|w|}(w) \to \mathbb{C}$ gibt, der analytisch ist. Da Zweige der Logarithmusfunktion lokal sich nur um Vielfache von $2\pi i$ unterscheiden, sieht man dadurch, dass alle Zweige der Logarithmusfunktion analytisch sind. (Man sieht dies
Fr. 8.11. auch dadurch, dass Umkehrfunktionen analytischer Funktionen analytisch sind.)

Anmerkung zu der Notation.

Wir verwenden log sowohl für den reellen (natürlichen) Logarithmus $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ zur Basis e, als auch für die vieldeutige komplexe Logarithmus-Funktion (hier gibt es selten Missverständnisse, da wir letztere zu vermeiden versuchen). Log bezeichnet den Hauptwert des Logarithmus. Die Bezeichnungen $\widetilde{\operatorname{Log}}$, $L_{|w|,\varphi}$ und dergleichen hatten nur lokale Bedeutung und werden so nicht mehr regelmäßig benutzt.

Im Allgemeinen gilt nicht

$$\operatorname{Log}(a \cdot b) \neq \operatorname{Log} a + \operatorname{Log} b.$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log}\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) &= i\frac{2\pi}{3} \\
\operatorname{Log}\left(e^{\frac{4i\pi}{3}}\right) &= \operatorname{Log}(e^{-\frac{2i\pi}{3}}) = -\frac{2i\pi}{3} \\
\text{Also: } \operatorname{Log}\left(e^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) = -\frac{2i\pi}{3} &\neq \operatorname{Log}\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) + \operatorname{Log}\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) = \frac{4i\pi}{3}
\end{aligned}$$

Sei $\ell\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ein Zweig der Logarithmus-Funktion, es gilt also $\exp(\ell(z)) = z$. Durch Ableiten unter Verwendung der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned}
&(\exp'(\ell(z)))\,\ell'(z) = 1 \\
&\Longrightarrow \ell'(z) = \frac{1}{\exp(\ell(z))} = \frac{1}{z}
\end{aligned}$$

Korollar 2.33. *Jeder Zweig $\ell : \Omega \to \mathbb{C}$ der Logarithmus-Funktion ist holomorph und es gilt $\ell'(z) = \frac{1}{z}$.*

3 Der Cauchysche Integralsatz und Anwendungen

3.1 Motivation

In der reellen Analysis haben wir gesehen, dass stetige Funktionen integrierbar sind und deswegen hat jede stetig Funktion eine (reelle) Stammfunktion: man gewinnt sie durch Integration und sieht mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass es tatsächlich eine Stammfunktion ist.

In der komplexen Analysis findet man viele stetige Funktionen, die keine Stammfunktion besitzen. Man sieht zum Beispiel, dass $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \longmapsto |z| \in \mathbb{R}$ keine (komplexe) Stammfunktion besitzt, nicht einmal auf kleinen offenen Mengen. Wir werden bald Methoden haben, um dies einfach zu zeigen. [36]

Es stellt sich nun die Frage, wann Funktionen der Form $f : \Omega \to \mathbb{C}$, Ω Gebiet in $\mathbb{C}$, Stammfunktionen besitzen.

Eng damit verbunden ist die Frage: Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Seien $\gamma_1, \gamma_2\colon [a,b] \to \Omega$ stückweise stetig differenzierbare Kurven mit $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Gilt dann auch $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$?

Antwort.

[36] Alternativ geben wir hier einen elementaren Beweis an: angenommen, es existiert eine holomorphe Funktion $F : B_\epsilon(w) \to \mathbb{C}$, $B_\epsilon(w) \subset \mathbb{C}$ mit $F'(z) = |z|$. Wegen

$$0 = \operatorname{Im} F'(z) = -\frac{\partial \operatorname{Re} F}{\partial y} = \frac{\partial \operatorname{Im} F}{\partial x}$$

ist F von der Form $u(x) + iv(y)$ für reell-wertige Funktionen u und v. Aus $\partial u/\partial x(x) = \partial v/\partial y(y)$ für alle $(x + iy) \in B_\epsilon(w)$ folgt die Existenz einer Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $\partial u/\partial x \equiv \partial v/\partial y \equiv c$, also $|z| = c$ konstant. Widerspruch.

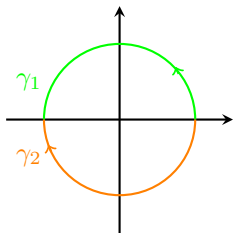


Abbildung 3.1: Bild zum Beispiel $\gamma_1(t) = e^{\pi i t}$ und $\gamma_2(t) = e^{-\pi i t}$.

Im allgemeinen Nein, aber unter geeigneten Voraussetzungen ist es wahr.

Beispiel zu Nein.

Betrachte die holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$, und die beiden Kurven $\gamma_1(t) = e^{\pi i t}$ und $\gamma_2(t) = e^{-\pi i t}$ für $t \in [0,1]$. Es gilt

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz = \int_0^1 \frac{1}{e^{\pi i t}} \cdot (\pi i) \cdot e^{\pi i t} dt = \pi i$$
$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz = \int_0^1 \frac{1}{e^{-\pi i t}} \cdot (-\pi i) \cdot e^{-\pi i t} dt = -\pi i$$

Das Integral hängt also vom Weg ab.

3.2 Stammfunktionen

Man nennt F eine **Stammfunktion** von f, falls $F' = f$.

Lemma 3.1. *Angenommen $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ist holomorph, $f = F'\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig, $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ stückweise C^1. Dann ist $\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.*

Beweis:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b (f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt \\ &= \int_a^b \underbrace{F'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)}_{\frac{d}{dt}F(\gamma(t))} dt \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\end{aligned}$$

■

Dann hängt $\int_\gamma f(z)dz$ nur von $F, \gamma(a), \gamma(b)$ ab.

Beispiele 3.2.

(1) $f = w \in \mathbb{C}$, $F(z) = w \cdot z$, $\int_\gamma w \,\mathrm{d}z = w(\gamma(b) - \gamma(a))$

(2) $f(z) = w(z - z_0)$, $F(z) = \frac{1}{2}w(z-z_0)^2$, $\int_\gamma w(z-z_0)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}w\Big((\gamma(b)-z_0)^2 - (\gamma(a)-z_0)^2\Big)$

(3) $\int_{\partial R}(w_0 z + w_1)\, dz = 0$, wenn ∂R der Rand eines Rechteckes ist.

Mit Hilfe von Bemerkung 1.23 kann man Satz 1.20 in eine Aussage über komplexe Kurvenintegrale und komplexe Stammfunktionen übersetzen:

Satz 3.3 (Wegunabhängigkeit komplexer Kurvenintegrale)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind äquivalent*

(1) *f besitzt eine Stammfunktion, das heißt $f = F'$ für eine differenzierbare Funktion $F : \Omega \to \mathbb{R}$.*

(2) *Ist γ eine geschlossene stückweise-C^1-Kurve in Ω, dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = 0.$$

(3) *Sind γ und $\hat{\gamma}$ stückweise-C^1-Kurven in Ω mit gleichem Anfangs- und Endpunkt, dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \int_{\hat{\gamma}} f(z)\, \mathrm{d}z\,.$$

In anderen Worten: Kurvenintegrale von f hängen nur von den Endpunkten ab.

Ist f eine C^1-Funktion im reellen Sinn, so folgen aus (1), (2) oder (3) die Cauchy-Riemann-Gleichungen:

(4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(z_0) &= \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(z_0) &= -\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}(z_0) \end{aligned}$$

Ist zusätzlich Ω sternförmig (oder allgemein einfach zusammenhängend), so ist (4) sogar äquivalent zu (1) (bzw. zu (2) bzw. zu (3)).

Die Funktion F in (1) ist dann natürlich immer sogar stetig differenzierbar. Ist f reell stetig differenzierbar, so ist bereits bekannt, dass (4) äquivalent zur Holomorphie von f ist.

Der Beweis des Satzes ergibt sich direkt aus Satz 1.20 durch Anpassen an die komplexe Situation. Wir betrachten wie in (1.6)

$$\begin{aligned} Y : \Omega \to \mathbb{R}^2, \quad & Y(z) = (\operatorname{Re} f(z), -\operatorname{Im} f(z))^T \\ Z : \Omega \to \mathbb{R}^2, \quad & Z(z) = (\operatorname{Im} f(z), \operatorname{Re} f(z))^T \end{aligned}.$$

und dann ergibt sich direkt aus Satz 1.20 die Äquivalenz von (1), (2) und (3). Die Gleichung in (4) in Satz 1.20 übersetzt sich direkt in die Cauchy-Riemann-Gleichungen (4).

Eine detailiertere Ausführung von Rechnungen, die eigentlich jetzt jetzt schon klar sein sollten, zur Ergänzung noch in Anhang B.1.

Korollar 3.4 (Cauchyscher Integralsatz für (komplex) stetig differenzierbare Funktionen)**.** *Sei Ω sternförmig, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $f'\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Seien $\gamma_1, \gamma_2\colon [a,b] \to \Omega$ stückweise stetig differenzierbare Kurven mit $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, dann ist $\int_{\gamma_1} f(z)\, \mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\, \mathrm{d}z$.*

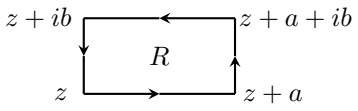


Abbildung 3.2: Bild des Rechtecks $R_{z,a,b} = \{z + ta + isb \mid t, s \in [0,1]\}$.

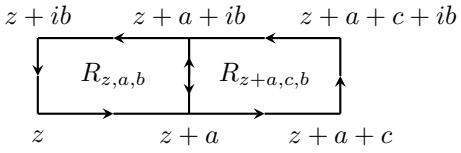


Abbildung 3.3: Bild des Rechteckes $R_{z,a+c,b}$.

Im folgenden wollen wir unter anderem zeigen, dass die Annahme „$f'\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig“ nicht nötig ist.

3.3 Cauchyscher Integralsatz für Rechtecke

Bezeichnungen: $z \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{R}$ und
$R_{z,a,b} = \{z + ta + isb \mid t, s \in [0,1]\}$

$\partial R_{z,a,b}\colon [0,4] \to \mathbb{C}$ mit

$$\partial R_{z,a,b}(t) = \begin{cases} z + ta & 0 \le t \le 1 \\ z + a + (t-1)ib & 1 \le t \le 2 \\ z + ib + (3-t)a & 2 \le t \le 3 \\ z + (4-t)ib & 3 \le t \le 4. \end{cases}$$

$a \cdot b > 0 \iff \partial R$ läuft im Gegenuhrzeigersinn um R.
$a \cdot b < 0 \iff \partial R$ läuft im Uhrzeigersinn um R.
$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ist stetig, $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ mit $-\gamma(t) := \gamma(-t)$, wobei $-\gamma\colon [-b,-a] \to \Omega$ und gilt $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$.

$\int_{\partial R_{z,a,b}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\partial R_{z+a,c,b}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial R_{z,a+c,b}} f(z)\,\mathrm{d}z$

Satz 3.5 (Satz von Goursat: Cauchyscher Integralsatz für Rechtecke)**.** [37] *$\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $R_{z,a,b} \subset \Omega$. Dann ist $\int_{\partial R_{z,a,b}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$*

Bemerkung. Wir nutzen im Beweis die Ungleichungskette für $\gamma : [a,b] \to \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\Big| = \Big|\int_a^b f(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t\Big| \le \sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))| \int_a^b |\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t = \sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))|\, L(\gamma)\,. \tag{3.1}$$

Siehe auch (1.5).

Beweis des Satzes von Goursat:

[37] Biographie von Goursat: http://de.wikipedia.org/wiki/%C3%89douard_Goursat

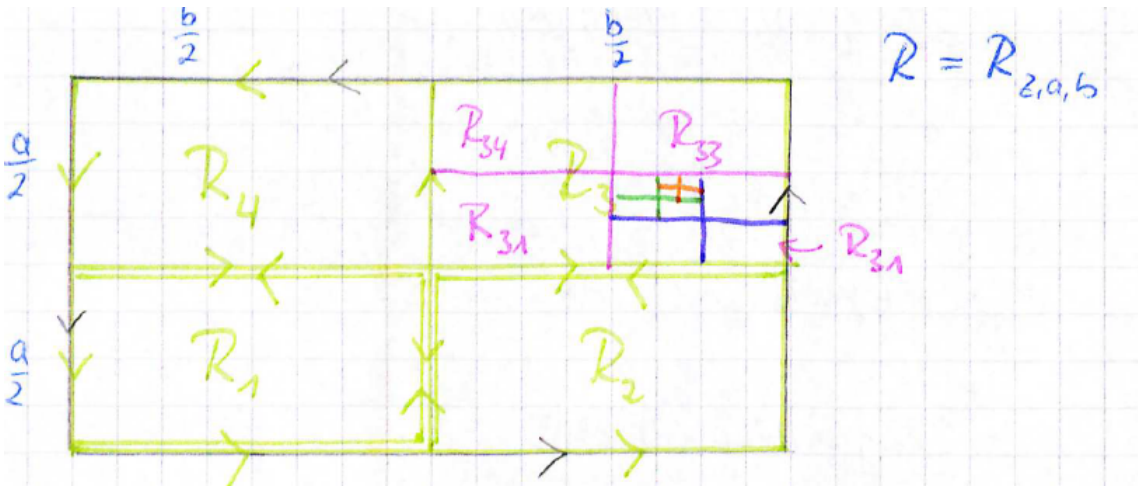


Abbildung 3.4: Bild zum Beweis von Satz 3.5.

Wir schreiben R für $R_{z,a,b}$. Wir zerteilen R in 4 Teilrechtecke, die wir im Gegenuhrzeigersinn durchnummerieren.

$$\begin{aligned} R_1 &:= R_{z,a/2,b/2} \\ R_2 &:= R_{z+a/2,a/2,b/2} \\ R_3 &:= R_{z+a/2+ib/2,a/2,b/2} \\ R_4 &:= R_{z+ib/2,a/2,b/2} \end{aligned}$$

Analog zerteilen wir nun jedes R_j in Teilrechtecke $R_{j1}, \ldots, R_{j4}$, dann wieder jedes R_{jk} in 4 Rechtecke etc.

$$\underbrace{\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z}_{I(R)} = \underbrace{\int_{\partial R_1} f(z)\,\mathrm{d}z}_{I(R_1)} + \underbrace{\int_{\partial R_2} f(z)\,\mathrm{d}z}_{I(R_2)} + \underbrace{\int_{\partial R_3} f(z)\,\mathrm{d}z}_{I(R_3)} + \underbrace{\int_{\partial R_4} f(z)\,\mathrm{d}z}_{I(R_4)}$$

$$\begin{aligned} \exists \nu_1 \in \{1,\ldots,4\} : |I(R_{\nu_1})| &\geq \frac{1}{4}|I(R)| \\ \exists \nu_2 \in \{1,\ldots,4\} : |I(R_{\nu_1,\nu_2})| &\geq \frac{1}{4}|I(R_{\nu_1}| \geq \frac{1}{4^2}|I(R)| \\ \vdots \qquad & \qquad \vdots \\ \exists \nu_k \in \{1,\ldots,4\} : |I(R_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_k})| &\geq \frac{1}{4^k}|I(R)| \\ \vdots \qquad & \qquad \vdots \end{aligned}$$

$R_{\nu_1\ldots\nu_{k+1}} \subset R_{\nu_1\ldots\nu_k}$.

Der Durchmesser[38] einer Menge $A \subset \mathbb{C}$ ist definiert als

$$\operatorname{diam} A := \sup\left\{|z-w| \;\middle|\; z,w \in A\right\} \in \{-\infty\} \cup [0,\infty].$$

Man sieht leicht

$$\operatorname{diam} R_{\nu_1,\dots,\nu_k} \leq \frac{|a|+|b|}{2^k}$$

Wegen

$$\operatorname{diam} \bigcap_{\ell=1}^{\infty} R_{\nu_1\dots,\nu_\ell} \leq \operatorname{diam} R_{\nu_1,\dots,\nu_k} \leq \frac{|a|+|b|}{2^k} \overset{k\to\infty}{\to} 0$$

besitzt $\bigcap_{\ell=1}^{\infty} R_{\nu_1\dots,\nu_\ell}$ höchstens ein Element. Ist z_k die linke untere Ecke von $R_{\nu_1,\dots,\nu_k}$, dann ist (z_k) eine Cauchy-Folge, sei $z_0 := \lim_{k\to\infty} z_k$. Da alle Rechtecke $R_{\nu_1,\dots,\nu_k}$ abgeschlossen sind, und da $z_\ell \in R_{\nu_1,\dots,\nu_k}$ für $\ell \geq k$, gilt $z_0 \in \bigcap_{\ell=1}^{\infty} R_{\nu_1\dots,\nu_\ell}$, also

$$\bigcap_{\ell=1}^{\infty} R_{\nu_1\dots,\nu_\ell} = \{z_0\}.$$

Schreibe

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \varepsilon(z-z_0)|z-z_0|, \tag{3.2}$$

wobei $\varepsilon(z-z_0)$ eine im Punkt z_0 stetige Funktion ist mit $\varepsilon(z_0-z_0) = \epsilon(0) = 0$.[39]

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4^k}|I(R)| &\leq |I(R_{\nu_1,\dots,\nu_k})| \\
&= \Big|\int_{\partial R_{\nu_1,\dots,\nu_k}} f(z)\,\mathrm{d}z\Big| \\
&\leq \underbrace{\Big|\int_{\partial R_{\nu_1,\dots,\nu_k}} (f(z_0)+(z-z_0)f'(z_0))\,\mathrm{d}z\Big|}_{\overset{\text{Beispiel 3.2(3)}}{=} 0} + \Big|\int_{\partial R_{\nu_1,\dots,\nu_k}} \varepsilon(z-z_0)|z-z_0|\,\mathrm{d}z\Big| \\
&\leq \underbrace{\text{Länge}(\partial R_{\nu_1,\dots,\nu_k})}_{=(2|a|+2|b|)\cdot\frac{1}{2^k}} \cdot \underbrace{\sup_{z\in\partial R_{\nu_1,\dots,\nu_k}} |\varepsilon(z-z_0)|}_{\tau(k):=} \cdot \underbrace{\sup_{z\in\partial R_{\nu_1,\dots,\nu_k}} |z-z_0|}_{\leq(|a|+|b|)\cdot\frac{1}{2^k}} \\
&\leq 2(|a|+|b|)^2 \frac{1}{4^k}\tau(k)
\end{aligned}$$

und $\tau(k) \to 0$ für $k \to 0$. Also gilt:

$$|I(R)| \leq 2(|a|+|b|)^2\tau(k) \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

und damit folgt $|I(R)| = 0$, also $I(R) = 0$. ■

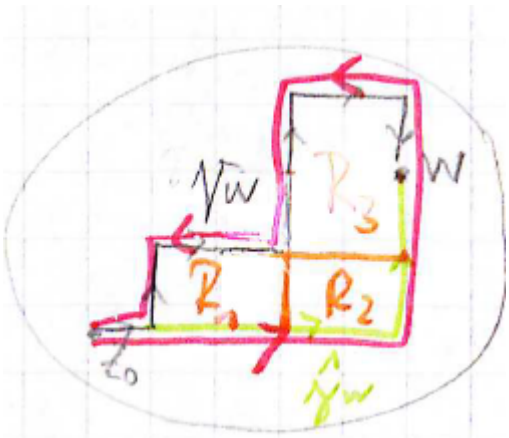


Abbildung 3.5: zum Beweis von Lemma 3.7.

3.4 Lokale Existenz von Stammfunktionen

Definition 3.6. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Wir sagen f hat* **lokal eine Stammfunktion**, *wenn für alle $z_0 \in \Omega$ ein $r > 0$ und eine holomorphe Funktion $F\colon B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ existiert mit $B_r(z_0) \subset \Omega$ und $F' = f|_{B_r(z_0)}$.*

Lemma 3.7. *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $f\colon B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Seien γ_w und $\hat{\gamma}_w$ stückweise achsenparallele Wege in $B_r(z_0)$ von z_0 nach w. Dann gilt*

$$\int_{\gamma_w} f(z)\,dz = \int_{\hat{\gamma}_w} f(z)\,dz\,.$$

Beweis: Es gibt Rechtecke $R_1, \dots, R_k$, so dass

- Zerschneiden von ∂R_k in die vier Seiten,
- Eliminierung von Paaren von Wegstücken, die die gleiche Strecke durchlaufen, aber mit anderer Orientierung.
- Neu-Zusammensetzen dieser Wege zu einem geschlossenen Pfad

den Weg $\hat{\gamma}_w \cdot (-\gamma_w)$ ergibt, wobei $\hat{\gamma}_w \cdot (-\gamma_w)$ den Weg bezeichnet, der zuerst $\hat{\gamma}_w$ durchläuft und dann γ_w in umgekehrter Richtung durchläuft.

$$0 \overset{\text{Satz 3.5}}{=} \int_{\partial R_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \dots + \int_{\partial R_k} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\hat{\gamma}_w} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_w} f(z)\,\mathrm{d}z$$

$\implies$ Behauptung ■

Satz 3.8. *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $f\colon B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $F\colon B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$.*

Beweis: Zu $w \in B_r(z_0)$ wähle einen achsenparallelen Weg γ_w von z_0 nach w. Dann hängt nach

[38] Englisch „diameter“, deswegen mit diam abgekürzt.
[39] Oder äquivalent: ϵ ist eine Funktion mit $\epsilon(z - z_0) \to 0$ für $z \to z_0$.

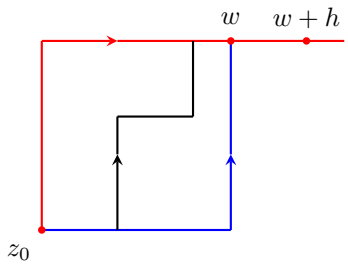


Abbildung 3.6: Zum alternativen Beweis von $F' = f$ in Satz 3.8.

Lemma 3.7

$$F(w) := \int_{\gamma_w} f(z)\,\mathrm{d}z$$

nicht von der Wahl des Weges ab. Wir erhalten eine wohldefinierte Funktion $F\colon B_r(z_0) \to \mathbb{C}$.

Es gilt dann

$$F(w) = \int_{\gamma_w} Y + i \int_{\gamma_w} Z$$

mit

$$\begin{aligned} Y : \Omega \to \mathbb{R}^2, &\quad Y(w) = (\operatorname{Re} f(w), -\operatorname{Im} f(w))^T\,, \\ Z : \Omega \to \mathbb{R}^2, &\quad Z(w) = (\operatorname{Im} f(w), \operatorname{Re} f(w))^T\,. \end{aligned}$$

Nun wollen wir zeigen, dass F holomorph ist mit $F'(w) = f(w)$ für alle $w \in \Omega$. Hierzu zeigt man genauso wie im Teil (3) $\Rightarrow$ (1) im Beweis von Satz 1.13, dass F im reellen Sinne differenzierbar ist und es gilt dann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Re} F(w)}{\partial x} &= \operatorname{Re} f \\ \frac{\partial \operatorname{Re} F(w)}{\partial y} &= -\operatorname{Im} f \\ \frac{\partial \operatorname{Im} F(w)}{\partial x} &= \operatorname{Im} f \\ \frac{\partial \operatorname{Im} F(w)}{\partial y} &= \operatorname{Re} f \end{aligned}$$

Dies sind die Cauchy-Riemann-Gleichungen. Also folgt, dass F holomorph ist mit $F' = f$. ■

Alternativer Beweis von $F' = f$:[40] Um diese Behauptung zu zeigen, wählen wir den Weg γ_w geschickt. Zunächst einmal einen achsenparallelen Weg, $\gamma : [0, 1+\epsilon) \to \Omega$, $\epsilon > 0$ so, dass wir zunächst den Imaginärteil von w erreichen und bewegen uns dann auf $(1-\epsilon, 1+\epsilon)$ nur noch in reeller Richtung. Wir können annehmen, dass $\gamma(1+h) = w+h$ für $h \in (-\epsilon, \epsilon)$.

$$\begin{aligned} F(w+h) - F(w) &= \int_{\gamma|_{[0,1+\epsilon]}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma|_{[0,1]}} f(z)\,dz \\ &= \int_{\gamma_{w,w+h}} f(z)\,\mathrm{d}z, \end{aligned}$$

[40] Hier wird im wesentlichen das Vorgehen in Satz 1.13 nochmals wiederholt.

wobei $\gamma_{w,w+h}(t) = w+t$, $\gamma_{w,w+h} : [0,h] \to \Omega$, falls $h \geq 0$ und $\gamma_{w,w+h}(t) = w-t$, $\gamma_{w,w+h} : [0,|h|] \to \Omega$, falls $h < 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{F(w+h)-F(w)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\int_{\gamma_{w,w+h}} f(z)\,\mathrm{d}z}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\int_0^h f(w+t)\cdot 1\,dt}{h} \\
&= \frac{d}{dh}|_{h=0} \int_0^h f(w+t)\,dt \\
&\overset{\text{HDI}}{=} f(w)
\end{aligned}$$

Also ist F in die reelle Richtung richtungsableitbar, und $\frac{\partial F}{\partial x}(w) = f(w)$.

Wähle nun einen Weg γ, der zuerst den Realteil von w annimmt und so dass $\gamma(1+h) = w+ih$ für $h \in (-\epsilon, \epsilon)$. Dann gilt $\dot{\gamma}(w+h) = i$ für diese h. Wir setzen $\gamma_{w,w+ih}(t) = w+it$, $\gamma_{w,w+ih} : [0,h] \to \Omega$, falls $h \geq 0$ und $\gamma_{w,w+ih}(t) = w-it$, $\gamma_{w,w+h} : [0,|h|] \to \Omega$, falls $h < 0$.

$$\begin{aligned}
F(w+ih) - F(w) &= \int_{\gamma_{w,w+ih}} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^h f(w+it)\cdot i\,dt, \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= i\frac{d}{dh}|_{h=0} \int_0^h f(w+it)\,dt \\
&\overset{\text{HDI}}{=} if(w)
\end{aligned}$$

Also ist F in die imaginäre Richtung richtungsableitbar und somit ist F partiell differenzierbar (im reellen Sinne). Die partiellen Ableitungen sind stetig, da f stetig ist

$F \in C^1$ im $\mathbb{R}$-Sinne.

$$JF(w) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(w) & -\operatorname{Im} f(w) \\ \operatorname{Im} f(w) & \operatorname{Re} f(w) \end{pmatrix}$$

Mit Cauchy-Riemann folgt: F ist komplex differenzierbar und $F' = f$. ■

Korollar 3.9. *Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann hat f lokal eine Stammfunktion.*

Bemerkung 3.10. Wir werden später sehen, dass gilt: f hat lokal eine Stammfunktion, dann ist f holomorph. (Bisher wissen wir noch nicht, dass eine Funktion mit einer lokalen Stammfunktion differenzierbar und sogar stetig differenzierbar ist. Sonst wäre auch diese Umkehrung uns bereits bekannt.)

Beispiel 3.11. $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $z \longmapsto \frac{1}{z}$ ist holomorph, hat also lokal eine Stammfunktion. Die Funktion besitzt aber keine (globale)[41] Stammfunktion. Siehe Aufgabe 2 b) auf Übungsblatt 3.

3.5 Homotopie

Definition 3.12. *Seien X und Y topologische Räume und $A \subset X$. Zwei stetige Abbildungen $\gamma, \tau\colon X \to Y$ mit $\gamma|_A = \tau|_A$ heißen* **homotop relativ zu** A*, falls es eine stetige Abbildung*

[41] global="lokal" steht nicht da ;-)

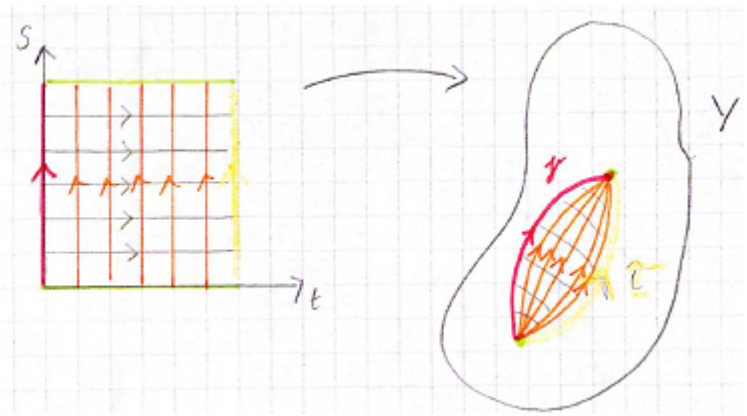


Abbildung 3.7: Beispiel einer Homotopie. Das rechte Bild sollte eigentlich im ca. 60 Grad im Uhrzeigersinn gedreht sein, damit es zum unten beschriebenen Unterbeispiel in passt.

$H\colon X \times [0,1] \to Y$ *gibt, mit*

$$(*)\begin{cases} H(x,0) = \gamma(x) & \text{für alle } x \in X \\ H(x,1) = \tau(x) & \text{für alle } x \in X \\ H(a,t) = \gamma(a) = \tau(a) & \text{für alle } a \in A \text{ und für alle } t \in [0,1] \end{cases}$$

Schreibe $\gamma \sim_A \tau$. Die Abbildung H heißt **Homotopie relativ zu A** *von γ nach τ.*

Beispiel 3.13. $X = [b,c]$, $A = \{b,c\}$ die Menge der Randpunkte. In diesem Fall sagt man **„homotop mit festen Endpunkten“** an Stelle von „homotop relativ zu A.“

Sei $Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Seien $\gamma, \tau\colon [b,c] \to Y$ stetige Kurven mit denselben Endpunkten. Eine Homotopie ist eine stetige Abbildung $H\colon [b,c] \times [0,1] \to Y$ mit den Eigenschaften $(*)$, wobei wieder $X = [b,c]$, $A = \{b,c\}$. Im folgenden gelte $s \in [b,c]$ und $t \in [0,1]$.

Unterbeispiel:

Sei $Y = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, $\gamma, \tau\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} s \\ \sin(s) \end{pmatrix},$$
$$\tau(s) = \begin{pmatrix} s \\ -\sin(s) \end{pmatrix},$$
$$H(s,t) = \begin{pmatrix} s \\ (1-2t)\sin(s) \end{pmatrix}$$

ist eine Homotopie von γ zu τ, denn es gilt

$$\begin{aligned}
H(s,0) &= \begin{pmatrix} s \\ \sin s \end{pmatrix} = \gamma(s) \\
H(s,1) &= \begin{pmatrix} s \\ -\sin s \end{pmatrix} = \tau(s) \\
H(0,t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
H(\pi,t) &= \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Proposition 3.14. *Sei $Y \subset \mathbb{R}^n$, Y sternförmig*[42] *bezüglich $y_0 \in Y$. Sei X ein topologischer Raum. $A \subset X$, $\gamma, \tau \colon X \to Y$ stetig mit $\gamma(A) = \tau(A) = \{y_0\}$. Dann sind γ und τ* homotop *relativ zu A. Es gilt also $\gamma \sim_A \tau$.*

Beweis: Spezialfall: $\tau(x) = y_0$ für alle $x \in X$.

$$\begin{aligned}
&H(x,t) = ty_0 + (1-t)\gamma(x) \quad \text{stetig} \\
&H(x,0) = \gamma(x) \\
&H(x,1) = y_0 = \tau(x) \\
&H(a,t) = ty_0 + (1-t)\underbrace{\gamma(a)}_{y_0} = y_0 \quad \text{für alle } a \in A \\
&\qquad \Longrightarrow \gamma \sim_A \tau
\end{aligned}$$

Der allgemeine Fall folgt aus dem folgenden Lemma. ■

$$C(X,Y) := \{f \colon X \to Y \mid f \text{ stetig } \}$$

Lemma 3.15. *Homotopie relativ zu A ist eine Äquivalenzrelation auf $C(X,Y)$.*

Beweis:

(1) Reflexivität. Sei $\gamma \in C(X,Y)$. Dann $\gamma \sim_A \gamma$.

(2) Symmetrie. Für alle $\gamma, \tau \in C(X,Y)$ gilt: $\gamma \sim_A \tau \Longrightarrow \tau \sim_A \gamma$

(3) Transitivität. Für alle $\gamma, \tau, \sigma \in C(X,Y)$ gilt: $\gamma \sim_A \tau$ und $\tau \sim_A \sigma \Longrightarrow \gamma \sim_A \sigma$.

zu (1): $H(x,t) = \gamma(x)$ ist eine Homotopie von γ nach γ.

zu (2): Sei $H \colon X \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie von γ nach τ. Dann ist

$$\hat{H}(x,t) := H(x, 1-t)$$

eine Homotopie von τ nach γ.

zu (3): Sei $H_1 \colon X \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie von γ nach τ. Sei $H_2 \colon X \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie

[42] Erinnerung: „sternförmig bezüglich y_0“ bedeutet: es gilt für alle $y \in Y$ und für alle $t \in [0,1]$: $ty + (1-t)y_0 \in Y$.

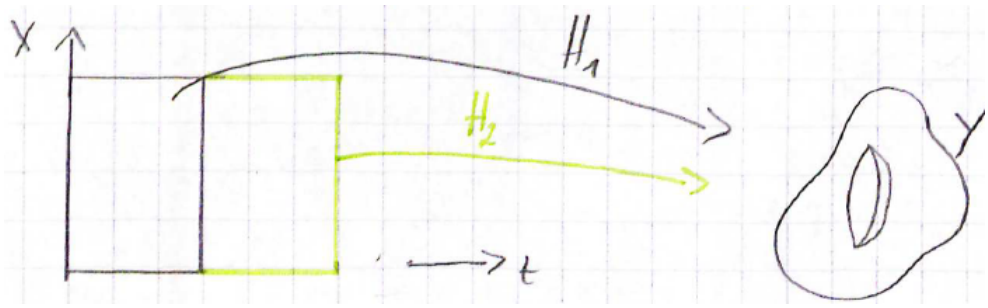


Abbildung 3.8: Zum Beweis von Lemma 3.15 (3). In der Zeichnung links ist leider die erste Variable x auf der zweiten Koordinaten-Achse und die zweite Variable t aud der ersten Koordinaten-Achse aufgetragen. Ich hoffe, dies verwirrt nicht. In der Vorlesung will ich dies ändern, ich kann aber leider die Zeichungen nicht einfach im Skript ändern.

von τ nach σ. Dann definieren wir

$$H(x,t) := \begin{cases} H_1(x,2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ H_2(x,2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Die Abbildung H ist wohldefiniert.[43] Offensichtlich sind $H|_{X\times[0,\frac{1}{2}]}$ und $H|_{X\times[\frac{1}{2},1]}$ stetig und es gilt $X \times [0,1] = X \times [0,\frac{1}{2}] \cup X \times [\frac{1}{2},1]$. H ist stetig, da die Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.[44] Man sieht leicht $H(x,0) = H_1(x,0) = \gamma(x)$ und $H(x,1) = H_2(x,1) = \sigma(x)$. ■

Definition 3.16. *Sei Y ein wegzusammenhängender topologischer Raum, $y_0 \in Y$, $\underline{y_0}\colon [0,1] \to Y$ mit $s \longmapsto y_0$. Dann heißt Y* **einfach zusammenhängend bezüglich** *y_0, falls jeder Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = y_0$ homotop mit festen Endpunkten zu $\underline{y_0}$ ist. Also $\gamma \sim_{[0,1]} \underline{y_0}$.*

Man zeigt leicht: ist ein wegzusammenhängender topologischer Raum Y einfach-zusammenhängend bezüglich $y_0 \in Y$, dann ist Y auch einfach-zusammenhängend bezüglich eines beliebigen Punktes $y_1 \in Y$. (Siehe evtl. Zentralübung am 26.11..)

Beispiel 3.17. (1) Sternförmige Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}$ sind einfach zusammenhängend.

(2) Beispiel eines einfach zusammenhängenden, aber nicht sternförmigen Gebiets:

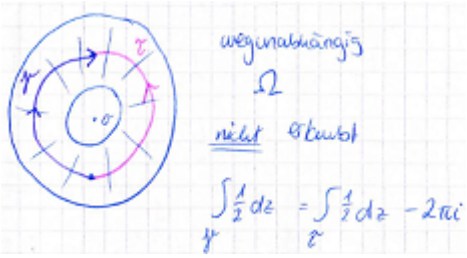
[43] Hier muss man prüfen, dass wir nicht $(x, 1/2)$ zwei verschiedene Werte zuordnen. Wir haben aber nur einen Wert, da $H_1(x,1) = H_2(x,0) = \tau(x)$.

[44] Man kann dies direkt zeigen, oder das folgende Lemma benutzen:

Lemma. *Angenommen A und B sind abgeschlossene Teilmengen des topologischen Raums X, $X = A \cup B$. Sei Y ein weiterer topologischer Raum. Sind $f|_A$ und $f|_B$ stetig, dann auch f.*

Beweis: Sei Z eine abgeschlossene Teilmenge von Y. Dann ist wegen der Stetigkeit von $f|_A$ die Menge $f^{-1}(Z) \cap A$ abgeschlossen in A und damit auch in X. Analog sieht man, dass auch $f^{-1}(Z) \cap B$ abgeschlossen ist. Damit ist auch $f^{-1}(Z) = f^{-1}(Z) \cap (A \cup B) = (f^{-1}(Z) \cap A) \cup (f^{-1}(Z) \cap B)$ abgeschlossen. Da also alle Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind, ist f stetig. ■

(3) Bild des Gebietes $B_2(0)\setminus\overline{B_1(0)}$ in $\mathbb{C}$, dass weder sternförmig, noch einfach zusammenhängend ist.



(4) In $\mathbb{R}^3$ ist $B_2(0)\setminus\overline{B_1(0)}$ einfach zusammenhängend.

Übung 3.18. *In einem einfach zusammenhängendem Gebiet Ω gilt: Sind $\gamma,\tau\colon[a,b]\to\Omega$ Kurven mit denselben Endpunkten, dann sind sie auch homotop mit festen Endpunkten.*

Lösung: Aufgabe auf Übungsblatt 6.

$$S^1 := \left\{ z\in\mathbb{C} \,\middle|\, |z|=1 \right\}$$

Proposition 3.19. *Sei Y ein wegzusammenhängender topologischer Raum, $y_0\in Y$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

(1) *Y ist einfach zusammenhängend (bezüglich y_0).*

(2) *Jede stetige Abbildung $f\colon S^1\to Y$ ist homotop relativ $\emptyset$ zu einer konstanten Abbildung.*

Die Proposition wird vorerst nicht gezeigt und nicht verwendet.[45] Der Beweis ist ebenfalls eine gute Übungsaufgabe, sobald Sie sich an den Begriff der Homotopie gewöhnt haben.

3.6 Cauchyscher Integralsatz für homotope Kurven

Fr 15.11.

Satz 3.20 (Cauchyscher Integralsatz (für homotope Kurven))**.** *Sei $\Omega\subset\mathbb{C}$ ein Gebiet, $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ holomorph. Seien $\gamma,\tau\colon[a,b]\to\Omega$ stückweise stetig differenzierbare Kurven, γ homotop zu τ mit festen Endpunkten. Dann gilt:*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\tau f(z)\,dz.$$

Man beachte: Die Homotopie von γ nach τ wird als stetig vorausgesetzt[46] und wir werden deswegen den Beweis so führen, dass wir nur die Stetigkeit und keine stetige Differenzierbarkeit oder

[45] Werde ich nicht verwenden und Sie nicht in den Übungsaufgaben.

[46] Viele Quellen fordern, dass die Homotopie stückweise stetig differenzierbar ist. Dann sind die Beweise ein einfacher, aber das Resultat schwächer; was wir nicht wollen.

Abbildung 3.9: Zum Beweis von Satz 3.20. Unterschied zu Vorlesung: links t- und s-Achse vertauscht.

dergleichen benutzen. [47]

Beweis: $H\colon [a,b]\times[0,1]\to\Omega$ sei eine Homotopie mit festen Endpunkten von γ nach τ. Zu jedem $s\in[a,b]$ und $t\in[0,1]$ gibt es ein $\delta_{s,t}>0$, so dass

- $B_{\delta_{s,t}}(H(s,t))\subset\Omega$.
- $f|_{B_{\delta_{s,t}}(H(s,t))}$ besitzt eine Stammfunktion, die bis auf eine Konstante eindeutig ist (Satz 3.8).

Da H stetig ist, ist $V_{s,t} := H^{-1}(B_{\delta_{s,t}}(H(s,t)))$ offen in $[a,b]\times[0,1]$. Dann ist $(V_{s,t})_{s\in[a,b],t\in[0,1]}$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge $[a,b]\times[0,1]$. Es gibt hierzu eine Lebesguesche Zahl $\varepsilon>0$ (Analysis II, Kapitel 8, Proposition 6.17), d.h.

$$\exists\varepsilon>0:\ \forall(s,t)\in[a,b]\times[0,1]:\ \exists(\tilde s,\tilde t)\in[a,b]\times[0,1]:\ B_\varepsilon((s,t))\cap([a,b]\times[0,1])\subset V_{\tilde s,\tilde t}\,.$$

Wähle ein $n\in\mathbb{N}^*$, so dass $\frac{1}{n^2}((b-a)^2+1)<\varepsilon^2$, $k,\ell\in\{0,1,\dots,n-1\}$

$$\begin{aligned}R_{n,k,\ell} &:= \Big[\frac{k(b-a)}{n},\frac{(k+1)(b-a)}{n}\Big]\times\Big[\frac{\ell}{n},\frac{\ell+1}{n}\Big]\\ &\subset B_\varepsilon\Big(\big(\frac{k(b-a)}{n},\frac{\ell}{n}\big)\Big)\cap([a,b]\times[0,1])\subset V_{\tilde s,\tilde t}\end{aligned}$$

für geeignete $\tilde s,\tilde t$.

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow H(R_{n,k,\ell})\subset B_{\delta_{\tilde s,\tilde t}}(H(\tilde s,\tilde t))\\ &\Longrightarrow f \text{ besitzt eine Stammfunktion } F_{k,\ell} \text{ auf einer offenen,}\\ &\qquad\text{zusammenhängenden Umgebung } U_{k,\ell} \text{ von } H(R_{n,k,\ell})\end{aligned}$$

Die auf benachbarten Rechtecken definierten Funktionen $F_{k,\ell}\circ H$ und $F_{k+1,\ell}\circ H$ (beziehungsweise $F_{k,\ell+1}\circ H$) stimmen bis auf eine Konstante überein.

Definiere nun induktiv über k und ℓ Konstante $c_{k,\ell}\in\mathbb{C}$, so dass sich die Funktionen $F_{k,\ell}\circ H+c_{k,\ell}$, $k,\ell\in\{0,\dots n-1\}$ zu einer auf

$$[a,b]\times[0,1]=\bigcup_{\substack{k=0\\ \ell=0}}^{n-1}R_{n,k,\ell}$$

definierten stetige Funktion $G\colon[a,b]\times[0,1]\to\mathbb{C}$ zusammensetzen. Genauer: für alle k,ℓ soll für

[47] Man kann übrigens auch zeigen: Sind γ und τ homotope, stückweise stetig differenzierbare Kurven im Gebiet Ω, so kann man auch eine stückweise stetig differenzierbare Homotopie erhalten.

die oben definierte Funktion $F_{k,\ell}\colon U_{k,\ell} \to \mathbb{C}$ gelten:

$$G|_{R_{n,k,\ell}} = F_{k,\ell} \circ H|_{R_{n,k,\ell}} + c_{k,\ell}\,.$$

Verhalten von G auf dem Rand:.

- $t \longmapsto H(a,t) = \gamma(a) = \tau(a)$ konstant. Also ist $t \longmapsto G(a,t)$ auch konstant. Es folgt $G(a,0) = G(a,1)$.
- Analog $G(b,0) = G(b,1)$.
- $\frac{\partial}{\partial s}(G(s,0)) = \underbrace{F'_{k,\ell}(H(s,0))}_{f(H(s,0))} \cdot \frac{\partial H}{\partial s}(s,0) = f(\underbrace{H(s,0)}_{=\gamma(s)}) \cdot \underbrace{\frac{\partial \gamma}{\partial s}(s)}_{(*)}$, wobei $(*)$ für alle $s \in [a,b]$ mit endlich vielen Ausnahmen existiert. Die obige Umformung liefert sowohl die Existenz der Richtungsableitung $\frac{\partial}{\partial s}\, G(s,0)$, als auch den Wert. Aus dieser Formel sehen wir, dass $s \longmapsto \frac{\partial}{\partial s} G(s,0)$ stückweise stetig ist. Somit ergibt der HDI (Analysis I, Kapitel 6, Sätze 5.1 und 5.4)

$$\begin{aligned} G(b,0) - G(a,0) &= \int_a^b \Big(\frac{\partial}{\partial s} G(s,0)\Big)\, ds \\ &= \int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\, ds \\ &= \int_\gamma f(z)\, dz. \end{aligned}$$

Analog für $t = 1$ an Stelle von $t = 0$.

$$\begin{aligned} G(b,0) - G(a,0) &= G(b,1) - G(a,1) \\ &= \int_a^b \Big(\frac{\partial}{\partial s} G(s,1)\Big)\, ds \\ &= \int_a^b f(\gamma(s))\tau'(s)\, ds \\ &= \int_\tau f(z)\, \mathrm{d}z \end{aligned}$$

■

Korollar 3.21. *Ist Ω ein bezüglich $z_0 \in \Omega$ einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ stückweise C^1. Dann hängt $\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z$ nur von f, $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ ab (also unabhängig von $\gamma|_{(a,b)}$). Wir sagen dann: $\int_\gamma f(z)\, dz$ ist wegunabhängig. Ist γ geschlossen, das heißt $\gamma(a) = \gamma(b)$, dann gilt $\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = 0$. Und f besitzt eine (globale) Stammfunktion $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$, nämlich $F(w) = \int_{\gamma_w} f(z)\, dz$, wobei γ_w ein Weg von z_0 nach w.*

Beweis Nr. 1: Die Behauptung von Korollar 3.21 ergibt sich nun direkt aus Übung 3.18 und Satz 3.20. ■

Beweis Nr. 2: Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $[a,b] = [0,1]$. Wähle $\sigma\colon [0,1] \to \Omega$ eine Kurve von z_0 nach $\gamma(0) = \tau(0)$. Betrachte den Weg $\alpha\colon [0,1] \to \Omega$ $\alpha := (\sigma \cdot \gamma) \cdot ((-\tau) \cdot (-\sigma))$, das

Abbildung 3.10: Zum Beweis von Korollar 3.21 (1).

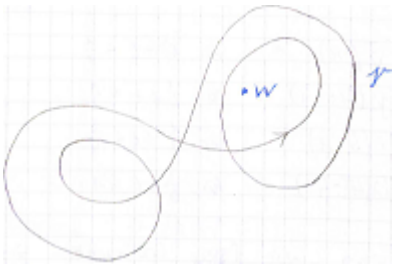


Abbildung 3.11: Beispiel für eine geschlossene Kurve mit Windungszahl $\mathcal{W}(\gamma, w) = 2$.

heißt

$$\alpha(t) := \begin{cases} \sigma(4t), & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ \gamma(4t-1), & \text{für } \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ \tau(3-4t), & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \\ \sigma(4-4t), & \text{für } \frac{3}{4} \le t \le 1 \end{cases}$$

Die Kurve α ist homotop mit festen Endpunkten zur konstanten Kurve $\underline{z_0}$ (, da Ω einfach zusammenhängend bezüglich z_0).

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\underline{z_0}} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &\overset{3.16}{=} \int_\alpha f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_\sigma f(z)\,\mathrm{d}z + \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \underbrace{\int_{-\tau} f(z)\,\mathrm{d}z}_{=-\int_\tau f(z)\,\mathrm{d}z} + \underbrace{\int_{-\sigma} f(z)\,\mathrm{d}z}_{=-\int_\sigma f(z)\,\mathrm{d}z} \\ &= \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \int_\tau f(z)\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

■

3.7 Die Windungszahl

Sei $w \in \mathbb{C}$ und γ eine geschlossene stückweise C^1-Kurve in $\mathbb{C} \setminus \{w\}$.

Wiederholung: $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ heißt geschlossen, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Spur von γ: $\mathrm{Spur}(\gamma) := \gamma([a,b])$ = Bild der Kurve.

Frage. *Wie oft wird w von γ umwindet?*

Definition 3.22. *Sei γ eine stückweise stetig differenzierbare und geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Spur}(\gamma)$.*

$$\mathcal{W}(\gamma, w) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-w} \, \mathrm{d}z$$

heißt **Windungszahl** *(oder* **Umlaufszahl***) von γ bezüglich w oder* **Index von w bezüglich γ**.[48]

Die Funktion $z \longmapsto \frac{1}{z-w}$ ist stetig auf $\mathbb{C} \setminus \{w\}$. Also existiert das Integral.

Beispiel 3.23. Sei $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ geschlossen und stückweise C^1, und sei $\Omega \Subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $w \notin \Omega$. Dann gilt

$$\mathcal{W}(\gamma, w) = 0$$

mit Korollar 3.21.

Proposition 3.24. *Die Windungszahl ist eine ganze Zahl, also $\mathcal{W}(\gamma, w) \in \mathbb{Z}$.*

Beweis: $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{w\}$
Für $t \in [a,b]$ definieren wir

$$\begin{aligned} h(t) &:= \int_{\gamma|_{[a,t]}} \frac{1}{z-w} \, \mathrm{d}z \\ &= \int_a^t \underbrace{\frac{1}{\gamma(\tilde{t}) - w} \gamma'(\tilde{t})}_{\substack{\text{stückweise stetig,} \\ \text{also integrierbar}}} \, d\tilde{t} \\ \overset{\text{HDI}}{\Longrightarrow} \quad & h \text{ stückweise } C^1 \text{ und } h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - w} \end{aligned}$$

$e^{-h(t)}(\gamma(t) - w)$ stetig und stückweise C^1. Bis auf endlich viele Punkte:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{-h(t)}(\gamma(t) - w)) &= -h'(t)e^{-h(t)}(\gamma(t) - w) + e^{-h(t)}\gamma'(t) \\ &= e^{-h(t)}(-\gamma'(t) + \gamma'(t)) \\ &= 0 \\ \Longrightarrow \quad & e^{-h(t)}(\gamma(t) - w) \text{ konstant} \\ \overset{\gamma(a)=\gamma(b)}{\Longrightarrow} \quad & e^{-h(a)} = e^{-h(b)} \\ \Longrightarrow \quad & \underbrace{h(a)}_{=0} - h(b) \in 2\pi i \mathbb{Z} \\ \Longrightarrow \quad \mathcal{W}(\gamma, w) &= \frac{1}{2\pi i} h(b) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

■

Lemma 3.25. *Sei γ stückweise C^1 und geschlossen. Die Abbildung $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Spur}(\gamma) \to \mathbb{Z}$ mit $w \longmapsto \mathcal{W}(\gamma, w)$ ist stetig.*

Beweis: Sei $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Spur}(\gamma)$. Da die $\operatorname{Spur}(\gamma)$ kompakt ist, ist $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Spur}(\gamma)$ offen. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $\overline{B_\varepsilon(w_0)} \subset \mathbb{C} \setminus \operatorname{Spur}(\gamma)$. Die Abbildung $f\colon \overline{B_\varepsilon(w_0)} \times \operatorname{Spur}(\gamma) \to \mathbb{C}$ mit $(w, z) \longmapsto \frac{1}{z-w}$ ist stetig,

[48] Bei der Windungszahl ist der Blickwinkel, dass w fixiert ist und es eine Funktion auf dem Raum aller stückweise stetig differenzierbaren Kurven ist.Hingegen ist beim Index der Blickwinkel, dass γ fixiert ist, und wir betrachten dann die Funktion $w \longmapsto \mathcal{W}(\gamma, w)$.

wobei der Definitionsbereich kompakt ist. Also ist die Abbildung f nach Analysis II, Kapitel 8, Lemma 6.14 sogar gleichmäßig stetig. Das bedeutet

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall w, \tilde{w} \in \overline{B_\varepsilon(w_0)} : \forall z, \tilde{z} \in \operatorname{Spur}(\gamma) :$$

$$|w - \tilde{w}| < \delta \wedge |z - \tilde{z}| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{1}{z-w} - \frac{1}{\tilde{z} - \tilde{w}} \right| < \varepsilon.$$

Wir interessieren uns nur für den Spezialfall $z = \tilde{z}$:

$$\begin{aligned} |\mathcal{W}(\gamma, \tilde{w}) - \mathcal{W}(\gamma, w)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\frac{1}{z - \tilde{w}} - \frac{1}{z - w} \right) \mathrm{d}z \right| \\ &\overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi} \text{Länge}(\gamma) \underbrace{\sup_{z \in \operatorname{Spur}(\gamma)} \left| \frac{1}{z - \tilde{w}} - \frac{1}{z - w} \right|}_{\leq \varepsilon} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \text{Länge}(\gamma) \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

An der Stelle $(*)$ haben wir hierbei (1.5) aus Abschnitt 1.4 benutzt. Die Stetigkeit ist also gezeigt. ■

Folgerung 3.26. *Sei $\Omega := \mathbb{C} \setminus \operatorname{Spur}(\gamma)$. Die Abbildung $\mathcal{W}(\gamma, \cdot\,) \colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $w \longmapsto \mathcal{W}(\gamma, w)$ ist lokal konstant, also konstant auf jeder Zusammenhangskomponente.*

Wiederholung.

Eine Funktion $f \colon X \to Y$ ist lokal konstant (X topologischer Raum), falls jedes $x \in X$ eine Umgebung besitzt auf der f konstant ist. Daraus folgt: f ist konstant auf jeder Zusammenhangskomponente. Man zeigt für $y \in Y$, dass $f^{-1}(\{y\})$ und $f^{-1}(Y \setminus \{y\})$ offen sind.

Ende der Wiederholung

Beweis der Folgerung: Sei $z \in \Omega$. Da $w \longmapsto \mathcal{W}(\gamma, w) =: f(w)$ stetig ist, existiert eine Umgebung U von z, so dass $f(U) \subset \left(n - \frac{1}{3}, n + \frac{1}{3}\right)$, falls $n = \mathcal{W}(\gamma, z)$. Da $f(U) \subset \mathbb{Z}$, dann folgt $f(U) = n$ ■

Mit einem im wesentlichen gleichen Beweis zeigt man allgemeiner:[49]

Lemma 3.27. *Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung von einem topologischen Raum in einen diskreten topologischen Raum, so ist f lokal konstant.*

Proposition 3.28. *Die offene Teilmenge $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Spur}(\gamma)$ von $\mathbb{C}$ besitzt genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente und hierauf ist $\mathcal{W}(\gamma, w) = 0$.*

Beweis: $\operatorname{Spur}(\gamma)$ ist kompakt, also beschränkt. Es existiert also ein $r > 0$ mit $\operatorname{Spur}(\gamma) \subset B_r(0)$. Nun ist $\mathbb{C} \setminus B_r(0)$ eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Spur}(\gamma)$, also ist $\mathbb{C} \setminus B_r(0)$ in einer Zusammenhangskomponente enthalten. Alle anderen Zusammenhangsomponenten liegen, also im Ball $B_r(0)$, sind also beschränkt. Wähle $w \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_r(0)}$. Dann ist $z \longmapsto \frac{1}{z-w}$ holomorph auf $B_r(0)$. Die Kurve γ ist in $B_r(0)$ homotop mit festen Endpunkten zu einer konstanten Kurve. Also gilt $\int_\gamma \frac{1}{z-w} \, \mathrm{d}z = 0$. Somit ist $\mathcal{W}(\gamma, \cdot\,)$ Null auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente. ■

[49] Wird derzeit nicht gebraucht, deswegen in der Vorlesung aus Zeitgründen übersprungen. Aber hilfreich für zukünftige Argumente.

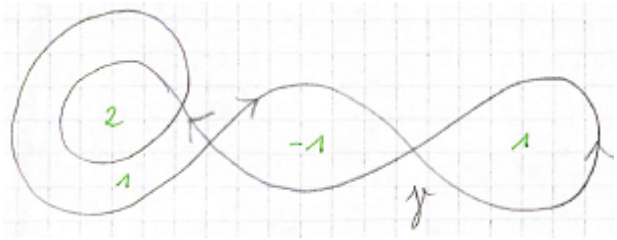


Abbildung 3.12: Beispiel für verschiedene Windungszahlen.

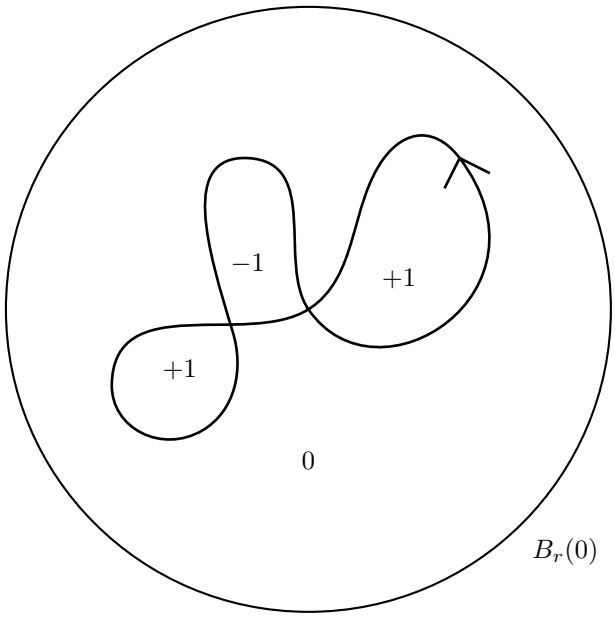


Abbildung 3.13: Zum Beweis von Satz 3.28.

Abbildung 4.1: Zum 1.Fall des Beweises von Satz 4.1.

4 Die Cauchysche Integralformel und Anwendungen

Di 19.11.

4.1 Die Cauchysche Integralformel

Satz 4.1 (Die Cauchysche Integralformel (CIF))**.** *Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ eine geschlossene Kurve und homotop mit festen Endpunkten zu einer konstanten Kurve. Sei $w \in \Omega \setminus \operatorname{Spur}(\gamma)$. Dann gilt*

$$f(w)\mathcal{W}(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta.$$

Bemerkung 4.2. Falls $\mathcal{W}(\gamma, w) \neq 0$, dann ist $f(w)$ durch $f|_{\operatorname{Spur}(\gamma)}$ bereits bestimmt.

Notation. $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $z \in \mathbb{C}$, $\partial B_r(z)$ sei die Kurve $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $t \longmapsto r \cdot e^{it} + z$. Für alle $w \in B_r(z)$ gilt $\mathcal{W}(\partial B_r(z), w) = 1$. Also dann

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta.$$

Beweis von Satz 4.1:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & \text{für } z \in \Omega \setminus \{w\} \\ f'(w) & \text{für } z = w, \end{cases}$$

Die Funktion $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ist stetig und $g|_{\Omega\setminus\{w\}}$ ist holomorph.

Behauptung: Ist $\tau\colon [a,b] \to \Omega$ der Rand eines achsenparallelen Rechtecks, dessen Abschluss in Ω enthalten ist[50], so gilt $\int_\tau g(z)dz = 0$.

Beweis der Behauptung:
1. Fall: w liegt außerhalb des Rechtecks, siehe Abbildung 4.1. Trivial, da $\tau \sim_{\text{E.P.}} \underline{\tau(a)}$, und g ist holomorph auf dem Rechteck.

2. Fall: w liegt auf dem Rand des Rechtecks, siehe Abbildung 4.2. Für kleine $\epsilon > 0$ definieren wir τ_ϵ wie in Abbildung 4.2 angedeutet. Genauer: wir erhalten τ_ϵ aus τ, indem wir eine der Seiten, die w enthalten um ϵ in Richtung des Rechteck-Inneren verschieben. Es gilt $\int_{\tau_\varepsilon} g(z)\, \mathrm{d}z = 0$ (1.Fall). Da das abgeschlossene Rechteck kompakt ist, ist g gleichmäßig stetig auf dem Rechteck, also

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0} \underbrace{\int_{\tau_\varepsilon} g(z)\, \mathrm{d}z}_{=0} = \int_\tau g(z)\, \mathrm{d}z.$$

[50] Gemeint ist hier also, dass sowohl das Innere des Rechtecks, als auch der Rand in Ω ist.

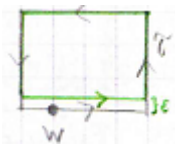


Abbildung 4.2: Zum 2. Fall des Beweises von Satz 4.1.

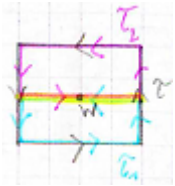


Abbildung 4.3: Zum 3. Fall des Beweises von Satz 4.1.

3. Fall: w liegt im Innern des Rechtecks. Wir unterteilen dann das Rechteck in zwei Teilrechtecke, so dass w auf dem Rand beider Teilrechtecke liegt liegt. Seien τ_1 und τ_2 die Ränder der Teilrechtecke, siehe Abbildung 4.3. Wir erhalten

$$\int_\tau g(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\tau_1} g(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\tau_2} g(z)\,\mathrm{d}z,$$

denn auf der rechten Seite der Gleichung über jede Seite von τ wird einmal integriert, und die Terme der neuen Seite, die sich im Innern des Gesamtrechtecks ergibt, heben sich gegenseitig weg.

Wir wissen nun bereits (siehe 2. Fall), dass $\int_{\tau_j} g(z)\,\mathrm{d}z = 0$ für $j = 1, 2$. Also erhalten wir die Behauptung auch in diesem Fall.

Die Behauptung ist somit gezeigt. ■

Weiter im Hauptbeweis:

Wie im Beweis von Satz 3.8 folgt, dass g lokal eine Stammfunktion besitzt. Dann folgt wie im Beweis vom Satz 3.20 (Cauchyscher Integralsatz für homotope Kurven)

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z$$

Mit der Definition von g ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{z-w}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-w}\,d\zeta - f(w)\mathcal{W}(\gamma, w). \end{aligned}$$

■

4.2 Holomorphie versus Analytizität

Proposition 4.3. *Sei Ω offen in $\mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f beliebig oft komplex differenzierbar.*

Beweis: Für $w \in B_r(z_0)$, $z_0 \in \Omega$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ haben wir die Cauchysche Integralformel:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta\,.$$

Wir wenden sie nun zunächst an für ein $w := z \in B_r(z_0)$ und dann für $w := z+h$, wobei $h \in B_\rho(0)$, $\rho := r - |z - z_0|$. Berechne den Differenzenquotienten

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} f(\zeta)\Big(\frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z}\Big)\frac{1}{h}\, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} f(\zeta)\frac{1}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}\, d\zeta.\end{aligned}$$

Der Integrand ist stetig für $h \in B_\rho(0)$, $\zeta \in \partial B_r(z_0)$. Somit ist $\overline{B_{\rho/2}(0)} \times \partial B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $(h, \zeta) \longmapsto f(\zeta)\frac{1}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}$ gleichmäßig stetig. Also

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \int_{\partial B_r(z_0)} f(\zeta)\frac{1}{(\zeta - z - h)(\zeta - h)}\, d\zeta &\overset{\text{glm stetig}}{=} \int_{\partial B_r(z_0)} \lim_{h\to 0} \Big(f(\zeta)\big(\frac{1}{\zeta - z - h} \cdot \frac{1}{\zeta - z}\big)\Big)\, d\zeta \\ &= \int_{\partial B_r(z_0)} f(\zeta)\frac{1}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta.\end{aligned}$$

Das heißt $f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)} f(\zeta)\frac{1}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta$. Wir rechnen weiter

$$\frac{f'(z+h) - f'(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} f(\zeta) \underbrace{\Big(\frac{1}{(\zeta - (z+h))^2} - \frac{1}{(\zeta - z)^2}\Big)}_{\xrightarrow{h\to 0} \frac{2}{(\zeta - z)^3}} \frac{1}{h}\, d\zeta\,,$$

wobei wir

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(\zeta - (z+h))^k} - \frac{1}{(\zeta - z)^k}\right) = \frac{d}{dz}\frac{1}{(\zeta - z)^k} = \frac{k}{(\zeta - z)^{k+1}} \tag{4.1}$$

für $k = 2$ genutzt haben. Analog zeigt man nun durch Induktion über k

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta\,. \tag{4.2}$$

Also existiert $f^{(k)}$ und ist durch die Formel gegeben. ∎

Satz 4.4 (Morera)**.** *Sei Ω offen in $\mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Dann besitzt f genau dann lokal eine Stammfunktion, wenn f holomorph ist.*

Beweis: Wir wissen bereits (Satz von Goursat und die daran anschließenden Aussagen), dass holomorphe Funktionen lokal eine Stammfunktion haben.

Sei nun umgekehrt F eine Stammfunktion von $f|_{B_r(z_0)} = F'$. Also existiert auch F'' und $F'' = f'|_{B_r(z_0)}$. Also ist f holomorph. ∎

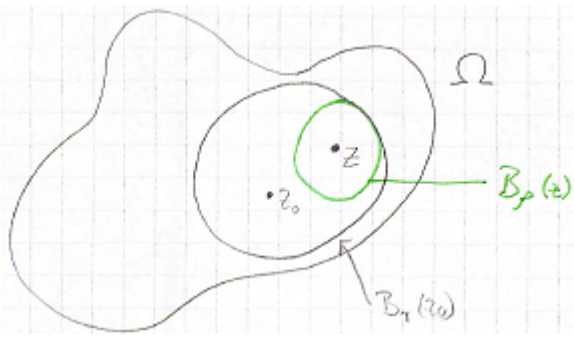


Abbildung 4.4: Zum Beweis von Propostion 4.3.

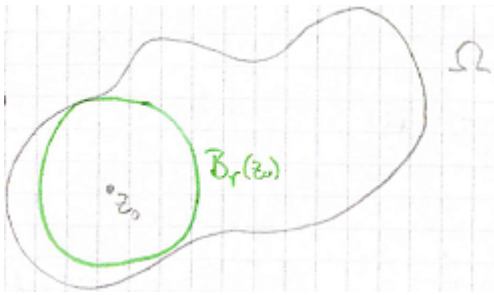


Abbildung 4.5: Bild zum Satz 4.5.

Satz 4.5 (Potenzreihenentwicklungssatz)**.** *Sei Ω offen in $\mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f analytisch. Für $z_0 \in \Omega$ gilt: Der Konvergenzradius der Taylorreihe von f in z_0 beträgt mindestens*

$$r := \sup\{\rho > 0 | B_\rho(z_0) \subset \Omega\}\,.$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $z_0 = 0$. Sei $0 < \rho < r$. Die Cauchysche Integralformel ergibt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

für $z \in B_\rho(0)$ falls $\overline{B_\rho(0)} \subset \Omega$. Insbesondere gilt dann $|\zeta| = \rho > |z|$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta}\frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} \\
&= \frac{1}{\zeta}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{\zeta^{j+1}} \\
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(0)} f(\zeta)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{\zeta^{j+1}}\, d\zeta
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(0)} \left(\sum_{j=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{z^j}{\zeta^{j+1}} \right) d\zeta.$$

Da $\partial B_\rho(0)$ kompakt ist, ist f auf $\partial B_\rho(0)$. Deswegen konvergiert die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{z^j}{\zeta^{j+1}}$$

gleichmäßig in $\zeta \in \partial B_\rho(0)$. Somit kann man Integral und die Reihenbildung vertauschen.

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \Bigg(\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}} \, d\zeta \right)}_{=:a_j} z^j \Bigg) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \\ &\Longrightarrow f|_{B_\rho(z_0)} \text{ ist analytisch.} \end{aligned}$$

Also ist f analytisch. ■

Zusatz 4.6. *Ist f holomorph auf einer Umgebung von $\overline{B_\rho(z_0)}$ (das heißt: es gibt eine offene Teilmenge Ω in $\mathbb{C}$, $\overline{B_\rho(z_0)} \subset \Omega$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph), dann gilt für alle $z \in B_\rho(z_0)$: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ mit $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta$. Hierbei ist $\partial B_\rho(z_0)$ die Kurve $\varphi(t) = z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.*

[51]

Der Zusatz folgt direkt aus dem Beweis von Satz 4.5.

Satz 4.7 (Cauchysche Abschätzungsformel)**.** *Unter den Voraussetzungen von Zusatz 4.6 gilt*

$$|a_n| \leq \frac{\sup_{z \in \partial B_\rho(z_0)} |f(z)|}{\rho^n}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} |a_n| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi(t))}{(\varphi(t) - z_0)^{n+1}} \varphi'(t) \, \mathrm{d}t \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(\varphi(t))}{\rho^{n+1}} \right| \underbrace{|\rho i e^{it}|}_{=\rho} \, dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi \rho^n} \sup_{z \in \partial B_\rho(z_0)} |f(z)| \underbrace{\int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}t}_{2\pi} \end{aligned}$$

[51] In der Vorlesung hatten z, z_0, w, R und ρ etwas andere Rollen, aber die Aussagen dort sind äquivalent zu den hier im Skript.

■

Schreibfehler: Ich meine mich zu erinnern, dass ich hier in der Vorlesung das Kürzen mit ρ bzw. r vergessen habe, deshalb stand hier wohl r^{n+1} statt r^n bzw. ρ^n.

4.3 Weitere Anwendungen

Fr 22.11.

Satz 4.8 (Satz von Liouville)**.**
f holomorph auf $\mathbb{C}$ und beschränkt $\Longrightarrow$ f konstant.

Beweis: Nach dem letzten Abschnitt haben wir dann also $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, Konvergenzradius ∞. Satz 4.7 gilt nun für alle $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \frac{\sup_{z \in \partial B_\rho(z_0)} |f(z)|}{\rho^n} \\ &\leq \frac{\text{const}}{\rho^n} \\ &\xrightarrow{n \geq 1,\, \rho \to \infty} 0 \end{aligned}$$

$a_n = 0$ für alle $n \geq 1$. Also ist $f(z) = a_0$ konstant. ■

Beispiele. Polynomfunktionen, Exponentialfunktion, Sinus,...
Der Konvergenzradius der Taylorreihe ist bei all diesen Beispielen ∞. Der Satz von Liouvielle besagt, dass diese Funktionen nicht beschränkt sind, was man auch leicht elementar überprüfen kann.

Beispiel. Der Satz von Liouville gilt nicht mehr für Funktionen, die auf $\mathbb{C} \setminus \overline{B_\rho(z_0)}$ holomorph sind. Denn $\frac{1}{z - z_0}$ ist holomorph und beschränkt, aber nicht konstant.

Bezeichnung. f nennt man eine **ganze Funktion** genau dann, wenn f auf $\mathbb{C}$, also "auf **ganz** $\mathbb{C}$" holomorph ist.

Der Satz von Liouville (Satz 4.8) besagt also:
Ist f eine ganze Funktion, dann gilt:

$$f \text{ ist beschränkt} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ ist konstant.}$$

Satz 4.9 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Sei $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion vom Grad $n > 0$. Dann besitzt p mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$, das heißt, es existiert ein $z \in \mathbb{C} : p(z) = 0$.*

Beweis: Angenommen für alle $z \in \mathbb{C}$, $p(z) \neq 0$. Dann ist $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = \frac{1}{p(z)}$ eine ganze Funktion.

Behauptung: g ist beschränkt.
Daraus folgt: g ist konstant, also p konstant, also $n = 0$. Widerspruch!

Beweis der Behauptung:

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$= z^n \underbrace{(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n})}_{\text{Idee:}\to a_n \text{ für } z\to\infty}$$

$$|p(z)| \geq |z|^n(|a_n| - |\frac{a_{n-1}}{z}| - |\frac{a_{n-1}}{z^2}| - \cdots - |\frac{a_0}{z^n}|)$$

$$\geq |z|^n(|a_n| - \frac{|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0|}{|z|})$$

für $r_1 := \max\{2\frac{|a_{n-1}|+\cdots+|a_0|}{|a_n|}, 1\} \in \mathbb{R}_{>0}$, $|z| \geq r_1 \geq 1$.

$$|a_n| - \frac{|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|}{|z|} \geq |a_n| - \frac{|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|}{2\frac{|a_{n-1}|+\cdots+|a_0|}{|a_n|}}$$

$$= |a_n| - \frac{1}{2}|a_n| = \frac{1}{2}|a_n|$$

$$\implies |p(z)| \geq |z|^n \frac{1}{2}|a_n| \text{ für } |z| \geq r_1$$

$$\implies |g(z)| \leq \frac{1}{|z|^n} \cdot 2\frac{1}{|a_n|} \text{ für } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{r_1}(0)}$$

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} |g(z)| \leq \max\{\frac{1}{r_1^n} \cdot \frac{2}{|a_n|}, \underbrace{\max_{z\in\overline{B_{r_1}(0)}} |g(z)|}_{(*)}\},$$

wobei $(*)$ existiert, $< \infty$, da $\overline{B_{r_1}(0)}$ kompakt und $|g|$ stetig. Also ist g beschränkt. ■

Folgerung 4.10. *Sei $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion vom Grad $n \geq 0$, dann gibt es $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$, so dass*

$$p(z) = b(z - a_1)(z - a_2)\ldots(z - a_n).$$

Beweis: Induktion über n und Polynomdivision, siehe Lineare Algebra. ■

Satz 4.11 (Satz von der Gebietstreue)**.** *Sei f holomorph auf einem Gebiet Ω, und sei f nicht konstant. Dann ist $f(\Omega)$ ein Gebiet.*

Daraus folgt f bildet offene Mengen auf offene Mengen ab.

$$U \text{ offen in } \Omega \implies f(U) \text{ offen}.$$

Also ist f ist eine offene Abbildung.

Beweis:

(1) Ω zusammenhängend, f stetig $\implies f(\Omega)$ zusammenhängend.

(2) $\Omega \neq \emptyset \implies f(\Omega) \neq \emptyset$.

(3) Wir zeigen für eine beliebige offene Teilmenge U von Ω, dass $f(U)$ offen ist:

Sei $z_0 \in U$.
Wir zeigen: es existiert ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(f(z_0)) \subset f(U)$.

Wir definieren $g(z) := f(z + z_0) - f(z_0)$. Dann ist $g\colon U_{z_0} \to \mathbb{C}$ analytisch mit $g(0) = 0$,

$U_{z_0} = \{z - z_0 \mid z \in U\}$. Es gibt ein $\rho > 0$, so dass $g(z) \neq 0$ für alle $z \in \overline{B_\rho(0)} \setminus \{0\}$, denn sonst wäre $g \equiv 0$ auf Grund des Identitätssatzes Satz 2.24.

Wir haben $\varepsilon := \inf_{z \in \partial B_\rho(0)} |g(z)| > 0$, denn wir haben $|g(z)| > 0$ und $B_\rho(0)$ ist kompakt.

Behauptung: $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) \subset g(U_{z_0})$.
Aus der Behauptung folgt dann

$$B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) \subset g(U_{z_0}) = f(U) - f(z_0) := \big\{q - f(z_0) \mid q \in f(U)\big\}$$

Das zu Zeigende gilt also für $\delta := \varepsilon/2$.

Angenonommen, die Behauptung gilt nicht, dann existiert ein $w \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$ mit $w \notin g(U_{z_0})$. Also ist $h(z) = \frac{1}{g(z)-w}$ holomorph auf U_{z_0}. Wende die Cauchysche Abschätzungsformel für $n = 0$ an

$$\begin{aligned}
|h(0)| &\leq \sup_{z \in \partial B_\rho(0)} |h(z)| \\
\frac{1}{|w|} &= |h(0)| \\
&\leq \sup_{z \in \partial B_\rho(0)} |h(z)| \\
&\leq \sup_{z \in \partial B_\rho(0)} \frac{1}{|g(z)| - |w|} \\
&= \frac{1}{(\inf_{z \in \partial B_\rho(0)} |g(z)|) - |w|} \\
&= \frac{1}{\varepsilon - |w|}
\end{aligned}$$

(Wir nutzten hierbei $\varepsilon - |w| > 0$.) Also ist $|w| \geq \varepsilon - |w|$ und somit $2 \cdot \frac{1}{2}\varepsilon > 2|w| \geq \varepsilon$, also erhalten wir den Widerspruch $\varepsilon > \varepsilon$. Die Behauptung ist somit gezeigt und damit der Satz ■

Satz 4.12 (Gleichmäßige Grenzwerte holomorpher Funktionen)**.** *Sei $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen. Es gebe eine Funktion $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$, so dass für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ gilt: $f_n|_K$ konvergiert gleichmäßig gegen $f|_K$. Dann ist f holomorph.*

Beweis: Sei γ eine geschlossene, stückweise C^1-Kurve, die homotop mit festen Endpunkten zu einer konstanten Kurve ist. Dann folgt mit dem Cauchyschen Integral-Satz $\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Nun ist $\mathrm{Spur}(\gamma)$ eine kompakte Menge, und somit konvergiert nach Voraussetzung $f_{n|_{\mathrm{Spur}(\gamma)}}$ gleichmäßig gegen $f|_{\mathrm{Spur}(\gamma)}$.

Wir haben also: $\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0$:

$$\sup_{z \in \mathrm{Spur}(\gamma)} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz\Big| = \Big|\underbrace{\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z}_{=0} - \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\Big|$$

$$\leq \varepsilon \cdot \text{ Länge } (\gamma) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Somit ist $\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = 0$ für alle geschlossenen, stückweise C^1-Kurven, die homotop (mit festen Endpunkten) zu einer konstanten Kurve sind. Insbesondere gilt dies, wenn γ der Rand eines Rechteckes in Ω ist. Wie in Satz 3.8 zeigt man, dass f lokal eine Stammfunktion besitzt. Daraus folgt mit Satz 4.4 von Morera, dass f holomorph ist. ■

Bemerkung 4.13. Mit einem ähnlichen Beweis kann man zeigen, dass unter den Voraussetzungen des vorhergehenden Satzes gilt: $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ konvergiert gleichmäßig auf allen kompakten Mengen $K \subset \Omega$.

4.4 Mittelwertgleichung und das Maximums-Prinzip

Sei f holomorph auf einer Umgebung von $\overline{B_\rho(z_0)}$. Wende die Cauchysche Integralformel an für $\gamma(t) = z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z_0}\dot\gamma(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{it})}{\rho e^{it}} i\rho e^{it}\ \mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it})\ \mathrm{d}t}_{\text{Mittelwert von } f \text{ über } \partial B_\rho(z_0)} \end{aligned}$$

Wir haben also die sogenannte **Mittelwertgleichung für holomorphe Funktionen** gezeigt:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it})\ \mathrm{d}t\,, \tag{4.3}$$

Angenommen $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ sei **harmonisch**, d.h. es gelte

$$0 = \Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Dann existiert auf jedem Ball $B_{\rho+\varepsilon}(z_0) \subset \Omega$ eine holomorphe Funktion $f\colon B_{\rho+\varepsilon}(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} f = u$. Damit folgt aus (4.3) (Realteil von (4.3))

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{it})\ \mathrm{d}t\,. \tag{4.4}$$

Diese Gleichung nennt man die **Mittelwertgleichung für harmonische Funktionen**.

Satz 4.14 (Maximumsprinzip für harmonische Funktionen)**.** *Sei u harmonisch auf einem Gebiet Ω, $z_0 \in \Omega$, $u(z) \leq u(z_0)$ für alle $z \in \Omega$. Dann folgt, dass u konstant ist.*

Beweis: Sei $\overline{B_\rho(z_0)} \subset \Omega$.

$$\begin{aligned} u(z_0) &\overset{(4.4)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+\rho e^{it})\,\mathrm{d}t \\ &\overset{\text{Max.}}{\leq} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0)\,\mathrm{d}t \\ &= u(z_0) \end{aligned}$$

"Max." bedeutet, dass wir an dieser Stelle benutzt haben, dass u in z_0 das Maximum annimmt. Aus dieser Ungleichungskette folgt also, dass an der mit "Max." gekennzeichneten Stelle Gleichheit gelten muss. Da $t \longmapsto u(z_0+\rho e^{it})$ stetig ist, folgt $u(z_0+\rho e^{it}) = u(z_0)$. Dies gilt für alle genügend kleinen $\rho > 0$. Also folgt $u(z) = u(z_0)$ für z in einer Umgebung von z_0. $G =: \{z \in \Omega | u(z) = u(z_0)\}$ ist offen in Ω (jedes $z_1 \in G$ besitzt eine Umgebung in G wie oben.). Es gilt:

- $G \neq \emptyset$, da $z_0 \in G$.
- $G = u^{-1}(\{u(z_0)\})$ ist abgeschlossen, dass $u(z_0)$ abgeschlossen ist,
- G ist offen, wie oben gezeigt.

Also ist G eine abgeschlossene, offene, nicht leere Teilmenge von Ω. Da Ω zusammenhängend ist, folgt $\Omega = G$. ■

Wie erhalten eine analoge Aussage, wenn wir $u(z) \leq u(z_0)$ durch $u(z) \geq u(z_0)$ ersetzen. Dies ist das **Minimumsprinzip für harmonische Funktionen**. Dieser Begriff ist aber weniger gebräuchlich, da das Minimumsprinzip für u letztendlich nichts anderes ist als das Maximumsprinzip für $-u$.

Satz 4.15 (Maximumsprinzip für holomorphe Funktionen)**.** *Sei f holomorph auf dem Gebiet Ω, $z_0 \in \Omega$, $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle $z \in \Omega$. Dann ist f bereits konstant.*

Beweis: Sei $\overline{B_\rho(z_0)} \subset \Omega$.

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \frac{1}{2\pi}\Big|\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{it})\,\mathrm{d}t\Big| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+\rho e^{it})|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|\,\mathrm{d}t \\ &= |f(z_0)| \end{aligned}$$

Also Gleichheit in den Ungleichungen. Da $t \longmapsto |f(z_0+\rho e^{it})|$ stetig ist, folgt, dass $|f(z_0)| = |f(z_0+\rho e^{it})|$ für genügend kleine $\rho > 0$ und alle $t \in [0, 2\pi]$. Somit ist

$$G := \Big\{z \in \Omega \mid |f(z)| = |f(z_0)|\Big\}$$

offen, abgeschlossen, nicht leer. Wir erhalten $G = \Omega$, und damit ist $z \longmapsto |f(z)|$ konstant. Mit Aufgabe 4 auf Übungsblatt 3 folgt, dass f konstant ist. ■

Analog zeigt man:

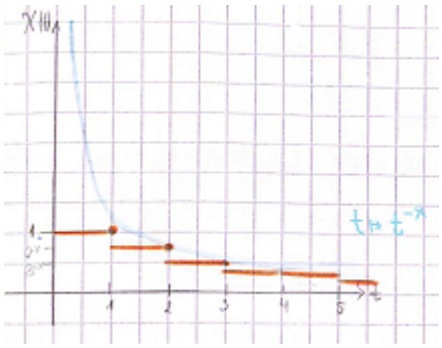


Abbildung 5.1: Zu Beispiel 5.1 (2), Behaupt.

$\operatorname{Re} f(z) \leq \operatorname{Re} f(z_0)$ auf einer Umgebung von z_0, dann ist f konstant.

$\operatorname{Im} f(z) \leq \operatorname{Im} f(z_0)$ auf einer Umgebung von z_0, dann ist f konstant.

$\operatorname{Re} f(z) \geq \operatorname{Re} f(z_0)$ auf einer Umgebung von z_0, dann ist f konstant.

$\operatorname{Im} f(z) \geq \operatorname{Im} f(r_0)$ auf einer Umgebung von z_0, dann ist f konstant.

$|\operatorname{Re} f(z)| \leq |\operatorname{Re} f(z_0)|$ auf einer Umgebung von z_0, dann ist f konstant.

$|\operatorname{Im} f(z)| \leq |\operatorname{Im} f(z_0)|$ auf einer Umgebung von z_0, dann ist f konstant.

Achtung das Analogon gilt nicht in den Versionen:

$|\operatorname{Re} f(z)| \geq |\operatorname{Re} f(z_0)|$, $|\operatorname{Im} f(z)| \geq |\operatorname{Im} f(z_0)|$, $|f(z)| \geq |f(z_0)|$.

Gegenbeispiel. $\Omega \subset \mathbb{C}$ sei ein Gebiet, $0 \in \Omega$, $f(z) = z$, $z_0 = 0$.

5 Holomorphe Fortsetzung

Di 26.11.

5.1 Motivation und Beispiele

Motivation. Seien $\Omega, \tilde{\Omega}$ Gebiete in $\mathbb{C}$ mit $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Angennommen wir kennen $f|_{\tilde{\Omega}}$. Wie kontrolliert man f auf $\Omega \setminus \tilde{\Omega}$?

Beispiele 5.1.

(1) $\operatorname{Log}\colon \underbrace{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}}_{=\Omega} \to \mathbb{C}$ ist der Hauptzweig der Logarithmusfunktion. Sei $\tilde{\Omega} := B_1(1)$. Auf diesem gilt

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n.$$

Verhalten von Log außerhalb $B_1(1)$? Es sind glücklicherweise Rechentricks möglich. Siehe Beispiel 2.32.

(2) **Riemannsche ζ-Funktion.** Seien $n \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{C}$.
Wiederholung Analysis I: $n^{-z} := \exp(-z \log n)$. Dann ist $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \longmapsto n^{-z}$ holomorph.

Schreibe $z = x + iy$

$$\begin{aligned} |n^{-z}| &= \exp(\operatorname{Re}(-z \log n)) \\ &= e^{-x \log n} \\ &= n^{-x} \end{aligned}$$

Behauptung: $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$ konvergiert absolut für $x > 1$

Beweis der Behauptung: Betrachte $\chi\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\chi(t) = \frac{1}{n^x}$, falls $n - 1 < t \leq n$. In anderen[52] Worten: $\chi(t) = \lceil t \rceil^{-x}$ Es gilt für $x > 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{k} n^{-x} &= \int_0^k \chi(t) \, \mathrm{d}t \\ &\leq 1 + \int_1^k t^{-x} \, \mathrm{d}t \\ &= 1 + \left[\frac{1}{-x+1} t^{-x+1} \right]_1^k \\ &= 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1} k^{-(x-1)} \xrightarrow{k \to \infty} 1 + \frac{1}{x-1} < \infty \end{aligned}$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$ ist monoton wachsend und beschränkt, $n^{-x} > 0$, also absolut konvergent. ■

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z \geq 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ wird $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ durch $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n^{-(1+\varepsilon)}}_{\in \mathbb{R}_{>0}}$ majorisiert.

Setze $\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 1$. Konvergenz ist gleichmäßig auf

$$K_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq 1 + \varepsilon\}$$

mit $\varepsilon > 0$. Weiter ist $z \longmapsto \sum_{n=1}^{k} n^{-z}$ holomorph auf K_ε. Außerdem gilt für jede kompakte Teilmenge K von $\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} z > 1\}$: Es gibt[53] ein $\epsilon > 0$, so dass $K \subset K_\varepsilon$. Also folgt mit Satz 4.12: ζ ist holomorph auf $\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} z > 1\}$.

Tatsache (ohne Beweis)**:** Man kann diese Funktion zu einer holomorphen Funktion $\zeta\colon \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ fortsetzen. Diese Fortsetzung ist eindeutig. Dies folgt aus dem Identitätssatz. Weiter ohne Beweis: ζ hat Nullstellen in $-2, -4, -6, \ldots$. Die Riemannsche Vermutung: alle anderen Nullstellen sind von der Form $\frac{1}{2} + iy$ mit $y \in \mathbb{R}$.

5.2 Funktionselemente und Funktionsketten

Definition 5.2. *Ein* **Funktionselement** (f, Ω) *besteht aus einem Gebiet* Ω *und einer holomorphen Funktion* $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. *Wir nennen* (f_2, Ω_2) *ist eine* **direkte Fortsetzung** *von* (f_1, Ω_1), *falls* $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ *und* $f_{1|\Omega_1 \cap \Omega_2} = f_{2|\Omega_1 \cap \Omega_2}$. *Wir schreiben dafür* $(f_1, \Omega_1) \sqcap (f_2, \Omega_2)$.

Der Identitätssatz impliziert: Zu gegebenem Ω_1, f_1, Ω_2 mit $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ gibt es höchstens ein f_2,

[52] Definition im Vergleich zur Vorlesung leicht vereinfacht.

[53] Man betrachte die stetige Funktion $K \to \mathbb{R}$, $x + iy \longmapsto x$. Sie nimmt ihr Minimum an, sagen wir in $x_0 + iy_0$, $x_0 > 1$. Dann gilt somit $K \subset K_\varepsilon$ mit $\varepsilon := x_0 - 1$.

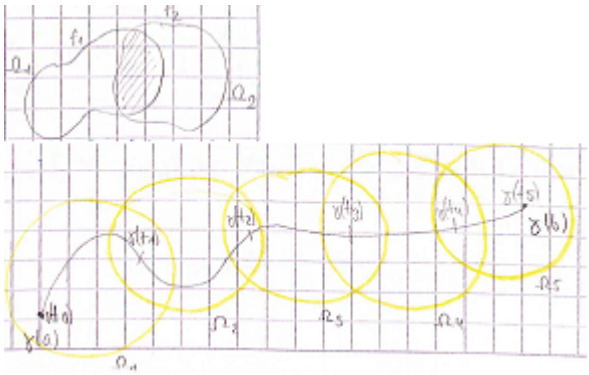


Abbildung 5.2: Zu Definitionen 5.2 und 5.5.

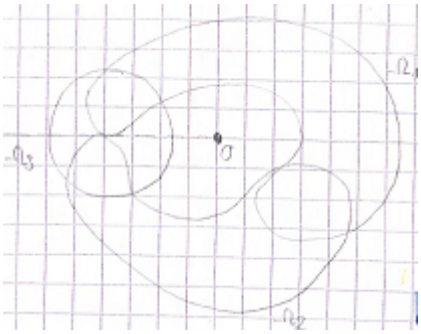


Abbildung 5.3: Zu Beispiel 5.3.

so dass

$$(f_1, \Omega_1) \sqcap (f_2, \Omega_2)\,.$$

Die Existenz ist aber unklar.

Die Relation $\sqcap$ ist reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv.

Beispiel 5.3. Seien Ω_1, Ω_2 und Ω_3 Gebiete in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ wie in Abbildung 5.3 angedeutet. Dann gilt $(\operatorname{Log}|_{\Omega_1}, \Omega_1) \sqcap (\operatorname{Log}|_{\Omega_2}, \Omega_2)$. Falls $\ell\colon \Omega_3 \to \mathbb{C}$ holomorph ist und falls gilt $\ell|_{\Omega_1 \cap \Omega_3} = \operatorname{Log}|_{\Omega_1 \cap \Omega_3}$, dann haben wir

$$\ell|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} = \operatorname{Log}|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} + 2\pi i.$$

$$\begin{aligned} (\ell, \Omega_3) &\sqcap (\operatorname{Log}, \Omega_1) \\ (\operatorname{Log}, \Omega_1) &\sqcap (\operatorname{Log}, \Omega_2) \\ \text{Aber: } (\ell, \Omega_3) &\not\sqcap (\operatorname{Log}, \Omega_2). \end{aligned}$$

Also keine Transitivität!

Beispiel 5.4. [54]

(1) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n, B_1(0)\right) \sqcap \left(\frac{1}{1-z}, \mathbb{C} \setminus \{1\}\right)$

[54] Beispiel nachträglich nach vorne geschoben im Skript. Entschuldigen Sie die andere Nummerierung in Skript und Vorlesung.

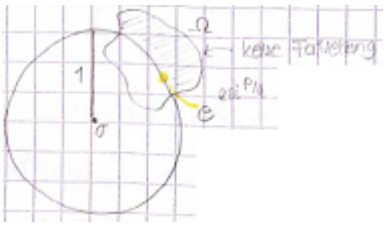


Abbildung 5.4: Zu Beispiel 5.4(2).

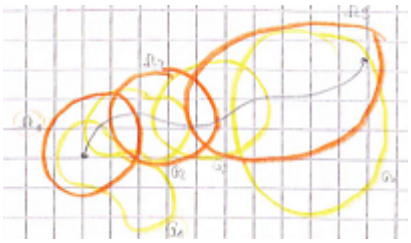


Abbildung 5.5: Zu Satz 5.7.

(2) Angenommen $\Omega \cap B_1(0) \neq \emptyset$ und $\Omega \not\subset B_1(0)$. Dann gibt es keine holomorphe Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ für $z \in B_1(0) \cap \Omega$. Denn seien $p, q \in \mathbb{Z}$,$q \neq 0$ und $z = te^{2\pi i \frac{p}{q}}$ $(0 \leq t \leq 1)$.

$$f\left(te^{2\pi i \frac{p}{q}}\right) = \underbrace{\sum_{n=0}^{q-1} t^{n!} e^{2\pi i \frac{p}{q} n!}}_{\text{beschränkt}} + \underbrace{\sum_{n=q}^{\infty} t^{n!} \cdot 1}_{\xrightarrow{t \to 1} \infty}$$

$$\Longrightarrow f \text{ kann man nicht in } e^{2\pi i \frac{p}{q}} \text{ stetig fortsetzen}$$

Also existiert keine Fortsetzung auf Ω.

Definition 5.5. *Eine* **Funktionskette** *besteht aus endlich vielen Funktionselemente* (f_1, Ω_1), (f_2, Ω_2), $\ldots$, (f_k, Ω_k) *mit* $(f_j, \Omega_j) \sqcap (f_{j+1}, \Omega_{j+1})$ *für alle* $j \in \{1, \ldots, k-1\}$. *Eine solche Funktionskette nennt man eine* **Funktionskette längs der Kurve** $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$, *falls es* $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k = b$ *gibt, so dass*

$$\operatorname{Spur}(\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}) \subset \Omega_j$$

für $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Bemerkung 5.6. Gegeben seien Gebiete $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ mit $\Omega_j \cap \Omega_{j+1} \neq \emptyset$, $f\colon \Omega_1 \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gibt es höchstens eine Funktionskette

$$(f_1, \Omega_1), (f_2, \Omega_2), \ldots, (f_k, \Omega_k)$$

mit $f_1 = f$ (Induktion über k.)

Satz 5.7. *Sei* $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ *eine Kurve. Seien* $(f_1, \Omega_1), \ldots, (f_k, \Omega_k)$ *und* $(g_1, G_1), \ldots, (g_\ell, G_\ell)$ *zwei Funktionsketten längs* γ *mit* $f_{1|_{\Omega_1 \cap G_1}} \equiv g_{1|_{\Omega_1 \cap G_1}}$. *Dann gibt es ein* $\varepsilon > 0$, *so dass*

$$f_k|_{B_\varepsilon(\gamma(b))} \equiv g_\ell|_{B_\varepsilon(\gamma(b))}.$$

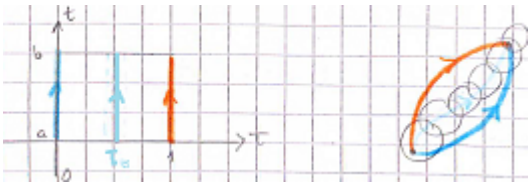


Abbildung 5.6: Zum Beweis von Satz 5.8.

Beweis: Man kann eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = b$ finden, so dass für alle $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ ein $s \in \{1, 2, \ldots, k\}$ und ein $t \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$ gibt mit $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subset \Omega_s \cap G_t$. Man zeige nun durch Induktion über j mit Hilfe des Identitätssatzes, dass f und g auf einer Umgebung von $\gamma(t_j)$ übereinstimmen. ■

5.3 Mondromiesatz

Satz 5.8 (Monodromiesatz)**.** *Angenommen $H\colon [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ ist eine Homotopie mit festen Endpunkten von $\gamma_0\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ nach $\gamma_1\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Sei (f, Ω) ein Funktionselement, $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) \in \Omega$, das längs jeder Kurve $t \longmapsto H(t,\tau)$ eine Funktionskette besitzt. Sei*

$$(f_1, \Omega_1), (f_2, \Omega_2), \ldots, (f_k, \Omega_k)$$

eine Funktionskette längs γ_0 mit $(f, \Omega) = (f_1, \Omega_1)$, und sei

$$(\tilde{f}_1, \tilde{\Omega}_1), \ldots, (\tilde{f}_\ell, \tilde{\Omega}_\ell)$$

eine Funktionskette längs γ_1 mit $(f, \Omega) = (\tilde{f}_1, \tilde{\Omega}_1)$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass

$$\tilde{f}_\ell|_{B_\varepsilon(\gamma_0(b))} \equiv f_k|_{B_\varepsilon(\gamma_0(b))}\,.$$

Beweis: Zu $\tau_0 \in [0,1]$ wähle eine Funktionskette längs τ_0. Es gibt ein offenes Intervall $I_{\tau_0} \ni \tau_0$, so dass für alle $\tau \in I_{\tau_0} \cap [0,1]$ dieselbe Funktionskette eine Funktionskette längs $t \longmapsto H(t,\tau)$ bildet.[55] Wähle endlich viele $\tau_1, \ldots, \tau_k$, so dass $[0,1] \subset I_{\tau_1} \cup \cdots \cup I_{\tau_k}$. Die Aussage folgt nun mit Induktion über k. ■

Falls eine Funktionskette längs γ_0 mit Anfang (f_1, Ω_1) existiert, dann haben wir f_1 auf einer Umgebung von $\mathrm{Spur}(\gamma_0)$ holomorph „fortgesetzt“ (falls γ_0 injektiv ist und falls Ω_1 genügend klein). Auf einer Umgebung von $\gamma_0(b)$ ist dann das Ergebnis eindeutig.

Wenn nun γ_1 homotop zu γ_0 mit festen Endpunkten ist und wenn Funktionsketten mit Anfang (f_1, Ω_1) längs aller Wege , die in Ω_1 beginnen, existieren, dann bekommen wir auf einer Umgebung von $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ dieselbe holomorphe Funktion, wenn wir längs γ_0 bzw. längs γ_1 holomorph fortsetzen (Monodromiesatz).

[55] Man erhält also nun eine offene Überdeckung $(I_\tau \cap [0,1])_{\tau \in [0,1]}$ von $[0,1]$ und nach der Heine-Borel-Eigenschaft existiert eine endliche Teilüberdeckung.

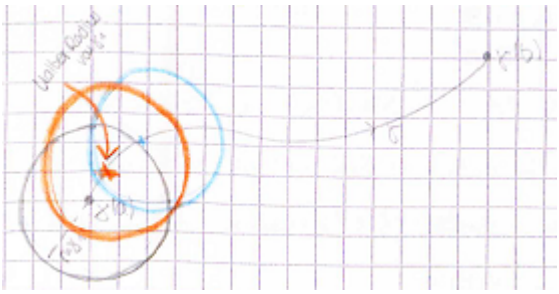


Abbildung 5.7: Zu Satz 5.10.

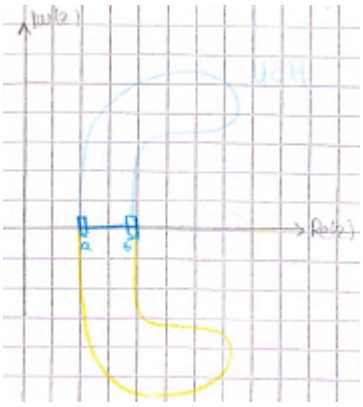


Abbildung 5.8: Zur Proposition 5.11.

Folgerung 5.9. *Sei Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Sei $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, $\tilde{\Omega}$ ein Gebiet. Das Funktionselement $(\tilde{f}, \tilde{\Omega})$ besitze längs jeder Kurve eine Funktionskette. Dann gibt es eine eindeutige holomorphe Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $f|_{\tilde{\Omega}} = \tilde{f}$.*

5.4 Technische Umsetzung der holomorphen Fortsetzung

Satz 5.10 (Kreiskettenverfahren)**.** *O.B.d.A. sei $\Omega_1 = B_{\tau_1}(\gamma(a))$. Wende iterativ den Satz 2.17 (Änderung des Entwicklungspunktes) und die zugehörige Koeefizientenformel (2.4) an. Wenn es eine Funktionskette längs γ gibt, dann liefert dieses Verfahren eine Funktionskette.*

Der Beweis der Aussage folgt unmittelbar aus dem bereits Gezeigten. Fr 29.11.

Proposition 5.11 (Schwarzsches Spiegelungsprinzip, benannt nach Hermann Amandus Schwarz)**.** *Sei U offen in der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$, so dass $U \cup (a,b)$ offen in $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$. Sei $f\colon U \cup (a,b) \to \mathbb{C}$ stetig, die auf U holomorph ist und für die gilt: $f((a,b)) \subset \mathbb{R}$. Dann ist*

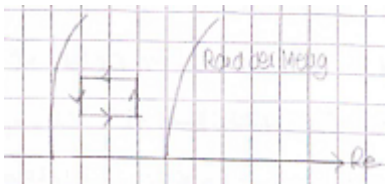
$$F(z) := \begin{cases} f(z), & \text{für } z \in U \cup (a,b) \\ \overline{f(\overline{z})}, & \text{für } \overline{z} \in U \end{cases}$$

eine holomorphe Funktion auf $U \cup (a,b) \cup \{\overline{z} \mid z \in U\}$.

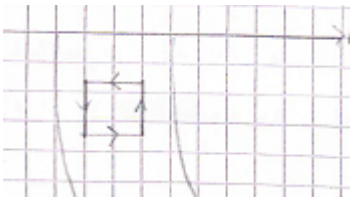
Beweisskizze: Zeige $\int_{\partial R} F(z)\,\mathrm{d}z = 0$, wobei ∂R der Rand achsenparalleler Rechtecke ist, welche

ganz in U liegen.[56]

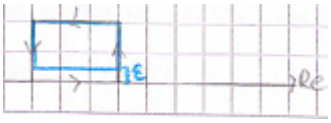
1. Fall: $R \subset U$. Ist klar, da f holomorph ist.



2. Fall: $R \subset \{\overline{z} \mid z \in U\}$. Ist klar, da $z \longmapsto \overline{f(\overline{z})}$ holomorph ist.[57]

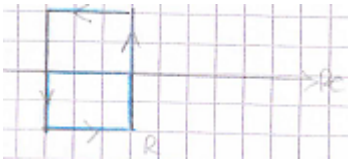


3. Fall: $R \subset U \cup (a,b)$, *aber* $R \not\subset U$.
$\int_{\partial R_\varepsilon} F(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Es folgt mit $\varepsilon \to 0$: $\int_{\partial R} F(z)\,\mathrm{d}z = 0$.



4. Fall: $R \subset (a,b) \cup \{\overline{z} \mid z \in U\}$, *aber* $R \not\subset \{\overline{z} \mid z \in U\}$.
Analog zum 3. Fall.

5. Fall: R hat Punkte mit positivem und Punkte mit negativem Imaginärteil. $\int_{\partial R} F(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial R_1} F(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\partial R_2} F(z)\,\mathrm{d}z = 0 + 0 = 0$.



■

[56] In der Zentralübung wurde gefragt: wieso impliziert dies, dass F holomorph ist. Wir beantworten dies in Satz 8.2.

[57] Dies sieht man mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Gleichungen durch Nachrechnen, oder damit, dass die Ableitung von $z \longmapsto \overline{f(\overline{z})}$ im reellen Sinn die Verkettung zweier komplex-antilinearen Abbildungen und somit komplex linear ist.

6 Isolierte Singularitäten

6.1 Drei Typen von isolierten Singularitäten

In diesem Abschnitt ist Ω immer eine offene, nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Definition 6.1. *Sei $A \subset \mathbb{C}$. Dann heißt $a \in \mathbb{C}$ ein* **isolierter Punkt von A**, *falls $a \in A$ gilt und a kein Häufungspunkt von A ist. In anderen Worten: falls es $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B_\varepsilon(a) \cap A = \{a\}$.*

Beispiel 6.2. U offen in $\mathbb{C}$, $a \in U$. Sei $A := (\mathbb{C} \setminus U) \cup \{a\} = \mathbb{C} \setminus (U \setminus \{a\})$. Dann ist a isolierter Punkt von A. Denn $B_\varepsilon(a) \subset U \Longrightarrow B_\varepsilon(a) \cap A = \{a\}$.

Definition 6.3. *Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wir sagen $z_0 \in \mathbb{C}$ ist eine* **isolierte Singularität** *von f, falls z_0 isolierter Punkt von $\mathbb{C} \setminus \Omega$ ist. In anderen Worten: $z_0 \notin \Omega$ und z_0 ist kein Häufungspunkt von $\mathbb{C} \setminus \Omega$.*

Beispiele 6.4.

(1) $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $z \longmapsto \frac{1}{z}$ hat eine isolierte Singularität in 0.

(2) $B_2(1) \setminus \{2\} \to \mathbb{C}$ mit $z \longmapsto z$ hat eine isolierte Singularität in 2.

Definition 6.5. *Sei z_0 eine isolierte Singularität von $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, wobei f holomorph ist. Dann heißt z_0*

(i) *eine* **hebbare Singularität**, *falls es eine holomorphe Funktion $\tilde{f}\colon \Omega \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$ gibt mit $\tilde{f}|_\Omega = f$.*

(ii) *ein* **Pol**, *falls z_0 nicht hebbar und falls es ein $n \in \mathbb{N}^*$ gibt, so dass $z \longmapsto (z - z_0)^n \cdot f(z)$ in z_0 eine hebbare Singularität besitzt. Das kleinste solche n heißt* **Ordnung des Pols**.

(iii) *eine* **wesentliche Singularität**, *falls z_0 weder hebbar noch ein Pol ist.*

Bemerkung 6.6. zu (i). Die Funktion $\tilde{f}$ ist dann eindeutig

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \Omega \\ \lim_{w \to z_0} f(w), & z = z_0 \end{cases}$$

Beispiele 6.7.

(1) Beispiel 6.4 (1) hat einen Pol 1. Ordnung in 0.

(2) Beispiel 6.4 (2) hat eine hebbare Singularität in 2.

(3) $\mathbb{C} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{5}{z-2} + z^4$ hat einen Pol 2. Ordnung in 1 und einen Pol 1. Ordnung in 2.

(4) $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$, $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$. Die isolierte Singularität in 0 ist hebbar, denn

$$\begin{aligned} \frac{\sin(z)}{z} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \frac{z^{2k+1}}{z} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}}_{\tilde{f}(z) \text{ holomorph auf } \mathbb{C}} \end{aligned}$$

(5) $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(\frac{1}{z})^j$.

$$\lim_{\substack{r \to 0 \\ r \in \mathbb{R}_{>0}}} e^{\frac{1}{r}} = \infty$$

$\Longrightarrow f$ ist in 0 nicht stetig fortsetzbar. Somit ist die Singularität nicht hebbar.

Zeige nun, dass 0 kein Pol ist.

$$z^n \cdot f(z) = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} z^{n-j}}_{(*)} + \underbrace{\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{1}{z}\right)^{j-n}}_{=:g(z)},$$

wobei $(*)$ holomorph auf $\mathbb{C}$ und beschränkt auf $B_1(0)$ ist. Für $r > 0$ ist

$$\begin{aligned} g(r) &\geq \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{r}\right)^{(n+1)-n} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{r} \\ &\xrightarrow{r \to 0} \infty \\ r^n \cdot f(r) &\to \infty \end{aligned}$$

Somit hat $z^n \cdot f(z)$ eine nicht hebbare Singularität in 0 und somit hat f keinen Pol in 0. Die Singularität ist also wesentlich.

6.2 Meromorphe Funktionen

In diesem Abschnitt ist wieder Ω immer eine offene, nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Wiederholung.

Sei $A \subset \Omega$.

A ist eine diskrete Teilmenge von Ω

- genau dann, wenn die induzierte Topologie auf A die diskrete ist (Definition).
- genau dann, wenn jeder Punkt von A ein isolierter Punkt von A ist.

Definition 6.8. *Wir nennen f eine* **meromorphe Funktion auf Ω**, *falls es eine diskrete Menge $A \subset \Omega$ gibt, so dass $f \colon \Omega \setminus A \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion ist und falls f in jedem $z_0 \in A$ einen Pol besitzt.*

Beispiel 6.9.

$$f(z) = e^{1/z} + \frac{1}{z-1} + \frac{i}{(z-2)^2}$$

ist meromorph auf $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ aber nicht meromorph auf $\mathbb{C}$.

Vorstellung.

$f(z_0) = \infty$, falls $z_0 \in A$. Elemente von A nennt man Polstellen von f.

Beispiel 6.10 (Möbiustransformation)**.** Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ und es gelte $\det \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{:=M} \neq 0$. Sei weiter $f_M \colon \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit

$$f_M(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & z \neq \infty, z \neq -\frac{d}{c}, c \neq 0 \\ \frac{az+b}{d} & z \neq \infty, c = 0. \\ \infty & z = -\frac{d}{c}, c \neq 0 \\ \frac{a}{c} & z = \infty, c \neq 0 \\ \infty & z = \infty, c = 0. \end{cases}$$

$f_M|_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist meromorph.

Es gilt $f_{M_1}(f_{M_2}(z)) = f_{M_1 \cdot M_2}(z)$.

Stereographische Projektion.

Identifiziere $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit der 2-Sphäre $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 | \|x\| = 1\}$ mittels $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \to S^2$ mit

$$z \longmapsto \sigma(z) := \begin{pmatrix} \frac{2z}{|z|^2+1} \\ \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3,$$

wobei der erste Eintrag in $\mathbb{C}$, der zweite in $\mathbb{R}$ und der gesamte Vektor in S^2 liegt. Man definiert $\sigma(\infty) := (0, 0, 1)^T$.

Geometrische Interpretation:

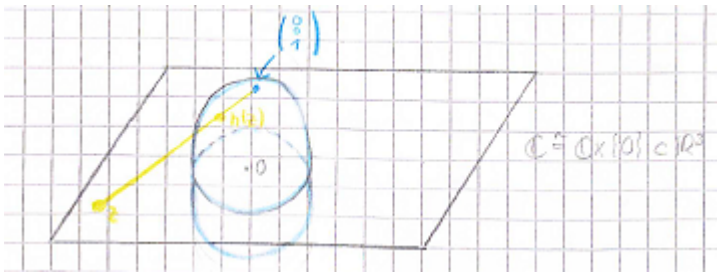


Abbildung 6.1: Zur geometrischen Veranschaulichung.

Für $z \in \mathbb{C}$ liegt $\sigma(z)$ auf der Geraden durch $(z, 0) \in \mathbb{R}^3$ und $(0, 0, 1)^T$ und auf S^2. Hierbei sei $\sigma(z) \neq (0, 0, 1)^T$.

Fakten: (leicht verifizierbar und Zentralübung in der 2. Vorlesungswoche)

- $\sigma|_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{(0, 0, 1)^T\}$ ist ein Diffeomorphismus[58], winkeltreu
- Versehen wir $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit der Alexandroff-Topologie,[59] dann ist $\sigma : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to S^2$ ein Homöomorphismus. Wenn man $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ als 2-Sphäre interpretiert[60], dann nennt man dies die **riemannsche Zahlensphäre**.

[58] im Sinne der Analysis II, indem wir $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)^T\}$ als Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ betrachten.
[59] siehe 3. Aufgabe von Übungsblatt 2
[60] Genauer: wir identifizieren $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit $\sigma(z) \in S^2$ und dann ist $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ gleich S^2.

- Ist f meromorph auf Ω, so ist

$$\Omega \to S^2, \quad z \longmapsto \begin{cases} \sigma(f(z)) & \text{kein Pol in } z \\ (1,0,0)^T & \text{Pol in } z \end{cases}$$

  eine glatte[61] Abbildung.[62]

- Ist f_M eine Möbius-Transformation, dann ist $\sigma \circ f_M \circ \sigma^{-1} : S^2 \to S^2$ ein winkeltreuer und orientierungserhaltender[63] Diffeomorphismus.

- Umgekehrt (etwas mehr Aufwand):
  Jeder konforme, orientierungserhaltende Diffeomorphismus $h : S^2 \to S^2$ kommt von einer Möbiustransformation, das heißt $h = \sigma \circ f_M \circ \sigma^{-1}$ für ein $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, $\det M \neq 0$.

Bemerkung. Was wir hier machen, ist auch in der speziellen Relativitätstheorie wichtig. Man identifiziert die Menge aller Lichtstrahlen, die zum Zeitpunkt $t = 0$ in $x = 0 \in \mathbb{R}^3$ starten, mit S^2. Möbius-Transformationen sind dann genau die „schönen“ Abbildungen, die Lichtstrahlen auf Lichtstrahlen abbilden. Es sind dann genau die Abbildungen, die sich zu (zeit- und raum-orientierungserhaltenden) Isometrien von $\mathbb{R}^{3,1}$ fortsetzen. Hierbei ist $\mathbb{R}^{3,1} := \mathbb{R}^4$, versehen mit dem “Skalarprodukt“

$$\left\langle \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{t} \\ \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} \right\rangle := -t\tilde{t} + x\tilde{x} + y\tilde{y} + z\tilde{z}\,.$$

Sie werden dies wahrscheinlich nicht alles verstehen, insbesondere ist die obige Abbildung ja gar nicht positiv definit, also eigentlich kein Skalarprodukt. Vielleicht erinnern Sie sich aber an diese Bemerkung, wenn Sie sich mal mit spezieller Relativitätsttheorie beschäftigen (sollten). Es lässt sich hieraus erklären, wieso $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) = \{M \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \mid \det M = 1\}$ so eine wichtige Rolle in der relativistischen Quantenmechanik hat.

Definition 6.11. *Sei $z_0 \in \Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Sei f holomorph auf Ω oder meromorph ohne Pol in z_0. Sei $f(z_0) = 0$ und $f \neq 0$. Die Nullstelle z_0 hat die Vielfachheit k genau dann, wenn $f(z_0) = 0, \ldots, f^{(k-1)}(z_0) = 0$ und $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.*

Jede Nullstelle hat eine Vielfachheit $k \in \mathbb{N}^*$ (Identitätssatz).

Lemma 6.12. *f besitzt eine Nullstelle der Vielfachheit $k \in \mathbb{N}^*$ in z_0. Dann hat $\frac{f(z)}{(z-z_0)^k}$ eine hebbare Singularität in z_0, aber $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$ hat einen Pol in z_0. Es gibt also eine auf einer offenen Umgebung $B_\epsilon(z_0)$ definierte holomorphe Funktion $g\colon B_\epsilon(z_0) \to \mathbb{C}$, so dass $f(z) = (z-z_0)^k \cdot g(z)$ für alle $z \in B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ und $g(z_0) \neq 0$.*

Beweis: Taylorreihe in z_0.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n$$

[61] In der Vorlesung nur gesagt „stetig“, die Aussage ist auch mit „glatt“ im reellen Sinn richtig, sowohl im Sinne von Abbildungen $\Omega \to \mathbb{R}^3$ als auch im Sinne $\Omega \to S^2$

[62] Mit Ausnahme der Polstellen und der Punkte z mit $f'(z) = 0$ ist sie auch winkeltreu

[63] $h : S^2 \to S^2$ orientierungserhaltend bedeutet: Für $p \in S^2$ und $q, r \in \mathbb{R}^3$, $q \perp p \perp r \perp q$ hat die Basis (p, q, r) die selbe Orientierung (siehe Lin. Alg.) wie $(h(p), Jh(p) \cdot q, Jh(p) \cdot r)$. Deiser Begriff wird eigentlich nur benützt, damit die folgende Umkehrung richtig ist.

$$= \underbrace{\Big(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^{n-k}\Big)}_{=g(z)} (z-z_0)^k$$

$$g(z_0) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) \neq 0$$

$$\Big|\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\Big| = \frac{|g(z)|}{|z-z_0|} \to \infty \text{ da } |g(z)| \to |g(z_0)| \neq 0,\ |z-z_0| \xrightarrow{z\to z_0} 0$$

Also ist $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$ nicht stetig fortsetzbar. ■

Definition 6.13. *Sei f meromorph auf Ω, $z_0 \in \Omega$. Wir definieren die* **Ordnung** *$\mathcal{O}_{z_0} f$ von f in z_0 durch*

$$\mathcal{O}_{z_0} f := \begin{cases} \infty, & \text{falls } f \equiv 0 \text{ auf einer Umgebung von } z_0 \\ \text{Vielfachheit der Nullstelle von } f \text{ in } z_0, & \text{falls } f(z_0) = 0 \\ 0, & \text{falls } z_0 \text{ kein Pol und keine Nullstelle von } f \text{ ist} \\ -\text{Ordnung des Pols}, & \text{falls } z_0 \text{ Pol von } f \end{cases}$$

Lemma 6.14. *Sei f wie in Definition 6.13. Sei $k := \mathcal{O}_{z_0} f \neq \infty$. Dann gibt es eine auf einer Umgebung U von z_0 definierten holomorphen Funktion $g\colon U \to \mathbb{C}$ mit*

$$g(z_0) \neq 0 \text{ und } g(z) \cdot (z-z_0)^k = f(z).$$

Beweis: *1. Fall: f habe eine Nullstelle in z_0.* Lemma 6.12.

2. Fall: z_0 ist weder Nullstelle noch Pol. $g := f$

3. Fall: z_0 ist ein Pol der Ordnung $|k|$.
Also hat $h(z) = (z-z_0)^{|k|} f(z)$ eine hebbare Singularität.

Sei o.B.d.A. $g\colon B_\varepsilon(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $g(z) = h(z)$ für alle $z \in B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$. Zu zeigen bleibt $g(z_0) \neq 0$.

Angenommen $g(z_0) = 0$. Dann hätte nach Lemma 6.12

$$\frac{g(z)}{z-z_0} = (z-z_0)^{|k|-1} f(z)$$

eine hebbare Singularität. Der Pol hätte also höchstens Ordnung $|k|-1$. Widerspruch. ■

Korollar 6.15. *Sind f_1, f_2 meromorph auf dem Gebiet Ω, $f_2 \not\equiv 0$. Dann sind $f_1 f_2$ und $\frac{f_1}{f_2}$ ebenfalls meromorph auf Ω. Es gilt für alle $z_0 \in \Omega$*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{z_0}\Big(\frac{f_1}{f_2}\Big) &= \mathcal{O}_{z_0} f_1 - \mathcal{O}_{z_0} f_2, \\ \mathcal{O}_{z_0}\Big(f_1 f_2\Big) &= \mathcal{O}_{z_0} f_1 + \mathcal{O}_{z_0} f_2, \end{aligned}$$

wobei $\infty \pm k := \infty$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Wir haben also gesehen:

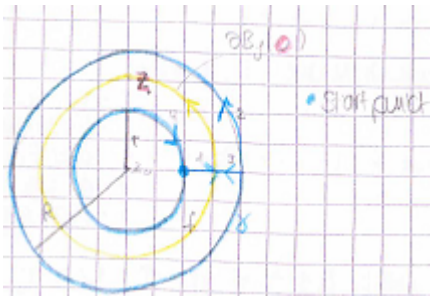


Abbildung 6.2: Zu Satz 6.16.

Bemerkung. $\{f$ meromorph auf $\Omega\}$ ist ein Körper, wenn Ω ein Gebiet ist.

Dies gibt viele interessante Beispiele von Körpern, wie zum Beispiel den nicht-archimedisch geordneten Körper, den wir in Analysis I, Kapitel 2, Beispiel 5.9 (d) betrachtet haben.

6.3 Laurent-Entwicklung

Di 3.12.

Notation.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n &:= \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} \\
\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n &:= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{k} a_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n
\end{aligned}$$

Satz 6.16 (Laurent-Entwicklung)**.** *Sei f holomorph auf dem* **Kreisring** $K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$, $0 < r < R < \infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$. *Dann existiert eine eindeutige Familie komplexer Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, so dass*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

für alle $z \in K_{r,R}(z_0)$. Die Koeffizienten a_n berechnen sich durch

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta$$

für $\rho \in [r, R]$.

Beweis: O. B. d. A. sei $z_0 = 0$. Wähle $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$ mit $r < \sigma < \tau < R$. Definiere γ wie die blaue Kurve in Zeichnung 6.2. Für $z \in K_{\sigma,\tau}(0)$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(\gamma, z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \Big(\int_{\partial B_\tau(0)} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{\partial B_\sigma(0)} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta \Big)
\end{aligned}$$

$$= \quad 1 - 0 = 1$$

und somit

$$\begin{aligned} \overset{\text{CIF}}{\Longrightarrow} f(z) \cdot \mathcal{W}(\gamma, z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} \, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\tau(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\sigma(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta. \end{aligned}$$

(1) Sei $\zeta \in \partial B_\tau(0)$ mit $\tau = |\zeta| > |z|$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} \\ &\overset{|z/\zeta|<1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} \end{aligned}$$

(2) Sei $\zeta \in \partial B_\sigma(0)$ mit $\sigma = |\zeta| < |z|$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}} \\ &= -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta^m}{z^{m+1}} \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}, \end{aligned}$$

wobei $n = -1 - m$.

Diese Reihen sind in ζ gleichmäßig konvergent auf $\partial K_{\sigma,\tau}(z_0) = \partial B_\sigma(z_0) \cup \partial B_\tau(z_0)$. Außerdem ist f gleichmäßig stetig auf $\partial K_{\sigma,\tau}(z_0)$. Somit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\tau(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \, d\zeta}_{=:a_n} \; z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\sigma(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \, d\zeta}_{=:a_n} \; z^n.$$

Es folgt mit Aufgabe 4 auf Übungsblatt 6 für alle $\rho \in [r, R]$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \, d\zeta,$$

insbesondere ist dieser Ausdruck von ρ unabhängig. Wir haben somit die Existenz der a_n gezeigt.

Zur Eindeutigkeit: Sei

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n \text{ auf } K_{r,R}(0).$$

Wir multiplizieren mit z^{-k-1} und erhalten

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{n-k-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^{n-k-1} \text{ auf } K_{r,R}(0).$$

Auf beide Seiten wenden wir $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(0)}$ an für ein $\rho \in (r, R)$. Das Integral kann mit der Reihe

vertauscht werden, denn die Reihen sind gleichmäßig konvergent. Nun hat z^ℓ eine Stammfunktion genau dann, wenn $\ell \neq -1$.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(0)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{n-k-1}\,\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(0)} z^{n-k-1}\,\mathrm{d}z = a_k \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(0)} z^{k-k-1}\,\mathrm{d}z = a_k$$

Damit folgt $a_k = b_k$. ■

Definition 6.17. *Man nennt Reihen der Form* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ **Laurent-Reihen um** z_0.

- *Hauptteil:* $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$.
- *Nebenteil:* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.
- *Residuum:* a_{-1}. *Im Fall* $r=0$ *schreiben wir* $\operatorname{Res}_{z_0} f$ *für das Residuum der Laurent-Reihe von* f *auf* $K_{0,R}(z_0) = B_R(z_0)\setminus\{z_0\}$

Bemerkungen 6.18.

(1) Der Konvergenzradius $\rho_{\max}$ des Nebenteils:

$$\rho_{\max} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0,\infty]\,,$$

wobei $\frac{1}{\infty} := 0$, $\frac{1}{0} := \infty$. Wir haben also Konvergenz für $|z-z_0| < \rho_{\max}$ und Divergenz für $|z-z_0| > \rho_{\max}$.

(2) Der Hauptteil $\sum_{m=1}^{\infty} a_{-m}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)^m$ konvergiert für

$$\left|\frac{1}{z-z_0}\right| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}}\,.$$

Wir haben also Konvergenz für $|z-z_0| > \rho_{\min} := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$ und Divergenz für $|z-z_0| < \rho_{\min}$.

(3) Falls f wie in Satz 6.16 ist, dann konvergiert es für $|z-z_0| \in (r,R)$, das heißt $\rho_{\min} \leq r$, $R \leq \rho_{\max}$.

(4) Der Grenzwert der Laurent-Reihe ist holomorph auf dem Konvergenz-Gebiet:

$$K_{\rho_{\min},\rho_{\max}}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho_{\min} < |z-z_0| < \rho_{\max}\}.$$

(5) $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konvergiert gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $K_{\rho_{\min},\rho_{\max}}(z_0)$.

(6) Ableitung: $f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\cdot a_n(z-z_0)^{n-1}$

(7) Falls $a_{-1} = 0$, dann hat f eine Stammfunktion

$$F(z) = \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq -1}}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}.$$

Außerdem gilt: f' und F haben dasselbe Konvergenz-Gebiet wie f.

Satz 6.19 (Cauchy-Abschätzungen für Laurentreihen)**.** *Sei* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *konvergent für alle* $|z - z_0| = \rho$. *Definiere* $M := \sup_{z\in\partial B_\rho(z_0)} |f(z)| < \infty$. *Dann gilt die Cauchy-Abschätzung:*

$$|a_n| \leq \frac{M}{\rho^n}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq |\frac{1}{2\pi i}| \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + \rho e^{it})|}{|\rho e^{it}|^{n+1}} |\rho i e^{it}|\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot M\rho^{-n} \end{aligned}$$

■

6.4 Laurententwicklung für isolierte Singularitäten

Sei z_0 eine isolierte Singularität von $f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, Ω Gebiet, $z_0 \in \Omega$. Bilde die Laurentreihe in z_0:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \tag{6.1}$$

konvergiert für $0 < |z - z_0| < \rho_{\max}$. Der Hauptteil konvergiert für alle $z \neq z_0$.

Die Gleichung (6.1) gilt für $z \in B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$, $\epsilon > 0$ genügend klein.

Satz 6.20 (Riemannscher Hebbarkeitssatz)**.** *Notation wie oben. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) *Die Singularität von* f *in* z_0 *ist hebbar.*

(2) f *ist beschränkt auf einer Umgebung von* z_0*, das heißt es existiert ein* $\varepsilon > 0$*:* $M_\varepsilon := \sup\left\{|f(z)| \,\middle|\, z \in B_\varepsilon(z_0)\right\} < \infty$.

(3) $a_n = 0$ *für alle* $n < 0$.

Beweis:
„(1) $\iff$ (3)“: bereits klar.

„(1) $\implies$ (2)“: Setze f zu einer holomorphen Funktion $\tilde{f}\colon \Omega \to \mathbb{C}$ fort. Also $\tilde{f}|_{\overline{B_\varepsilon(z_0)}}$ stetig. Damit folgt $\tilde{f}(\overline{B_\varepsilon(z_0)}) \supset f(B_\varepsilon(z_0))$ kompakt, falls $\overline{B_\varepsilon(z_0)} \subset \Omega$. Also ist $M_\varepsilon < \infty$.

„(2) $\implies$ (3)“: Für $n < 0$ gilt $|a_n| \leq M_\varepsilon \rho^{|n|}$ für $0 < \rho < \varepsilon$. Wir haben $\rho^{|n|} \to 0$ für $\rho > 0$. Wir erhalten $a_n = 0$. ■

Korollar 6.21. *Notation wie oben. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) f *hat einen Pol der Ordnung* $\leq k$ *in* z_0 *oder eine hebbare Singularität*

(2) $\exists \varepsilon > 0\, \exists M_\varepsilon > 0$ *mit* $|f(z)| \leq \frac{M_\varepsilon}{|z-z_0|^k}$ *für* $z \in B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$.

(3) $a_n = 0$ *für* $n < -k$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
(1) &\iff (z-z_0)^k f(z) \text{ hat eine hebbare Singularität in} z_0 \\
&\overset{\text{Satz 6.20}}{\iff} \exists \varepsilon > 0 : \exists M_\varepsilon \in \mathbb{R} : \forall z \in B_\varepsilon(z_0)\ |f(z)||z-z_0|^k \leq M_\varepsilon \\
&\iff (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1) &\iff (z-z_0)^k f(z) \text{ hat eine hebbare Singularität in} z_0 \\
&\overset{\text{Satz 6.20}}{\iff} (3)\,.
\end{aligned}$$

■

Satz 6.20 und Korollar 6.21 ergeben:

Korollar 6.22. *Notation wie oben. f hat eine wesentliche Singularität in $z_0 \iff \{n \in \mathbb{Z} | a_n \neq 0\}$ nicht nach unten beschränkt ist.*

Satz 6.23 (Casorati-Weierstraß)**.** *Sei z_0 eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion f. Dann hat f eine wesentliche Singularität in z_0 genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$ gilt: $f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$ ist dicht in $\mathbb{C}$.*

Wiederholung: $M \subset \mathbb{C}$ ist dicht in $\mathbb{C}$ genau dann, wenn $\overline{M} = \mathbb{C}$.

Beweis: „$\Longleftarrow$“:
1. Fall: Hebbare Singularität, dann $f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$ beschränkt für alle $\varepsilon > 0$ mit $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset \Omega$. Dann folgt daraus, dass $f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$ nicht dicht.

2. Fall: Pol der Ordnung k. Wir schreiben $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$ für eine holomorphe Funktion $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $g(z_0) \neq 0$. Wähle ein $\varepsilon > 0$ mit $|g(z)| \geq \frac{|g(z_0)|}{2} =: \delta > 0$ für alle $z \in B_\varepsilon(z_0)$. Also ist $|f(z)| \geq \frac{\delta}{|z-z_0|^k} \geq \frac{\delta}{\varepsilon^k} > 0$ für alle $z \in B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$.

$$\begin{aligned}
&B_{\frac{\delta}{\varepsilon^k}}(0) \cap f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}) = \emptyset \\
&\Longrightarrow 0 \notin \overline{f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})} \Longrightarrow \text{ nicht dicht.}
\end{aligned}$$

Wir haben – anschaulich ausgedrückt – gezeigt, dass $f(z) \to \infty$ für $z \to z_0$.

„$\Longrightarrow$“: Sei $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$, so dass $f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$ nicht dicht. Es existiert ein $w \in \mathbb{C}$ und ein $r > 0$, so dass $B_r(w) \cap f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}) = \emptyset$.

$$h(z) = \frac{1}{f(z) - w},$$

$h\colon B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Wir haben

$$|h(z)| \leq \frac{1}{r}$$

und somit

$$\overset{\text{Satz 6.20}}{\Longrightarrow} \text{ Singularität von } h \text{ ist hebbar.}$$

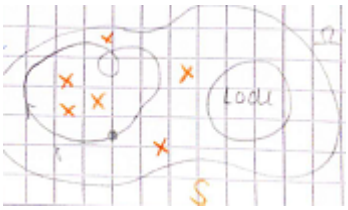


Abbildung 6.3: Zum Residuensatz.

Das heißt, es gibt eine holomorphe Funktion $\tilde{h}\colon B_\varepsilon(z_0) \to \mathbb{C}$, die $h|_{B_\varepsilon(z_0)\setminus\{z_0\}}$ fortsetzt. Somit ist

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{h(z)}}_{\text{meromorph}} + w$$

meromorph auf $B_\varepsilon(z_0)$, also ist entweder in z_0 ein Pol oder die Singularität ist hebbar. Also ist es keine wesentliche Singularität. ■

6.5 Residuensatz und Anwendungen

Fr 6.12.

Satz 6.24 (Residuensatz)**.** *Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $S = \{p_1, \dots, p_\mu\} \subset \Omega$ eine endliche Teilmenge, f holomorph auf $\Omega \setminus S$. Sei γ eine geschlossene, stückweise C^1-Kurve mit* $\operatorname{Spur}(\gamma) \cap S = \emptyset$ *und γ homotop in Ω (relativ zu den Endpunkte) zu einer konstanten Kurve. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{\ell=1}^{\mu} \mathcal{W}(\gamma, p_\ell)\operatorname{Res}_{p_\ell} f.$$

Bemerkung 6.25.

(1) Im Spezialfall $S = \emptyset$ ist die Aussage des Residuensatzes:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Dies ist der Cauchysche Integralsatz 3.20.

(2) Sei $S = \{p_1\}$ und $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Definiere $f(z) := \frac{g(z)}{z-p_1}$. Dann ist f holomorph auf $\Omega \setminus \{p_1\}$ und es gilt $\operatorname{Res}_{p_1} f = g(p_1)$. Der Residuensatz besagt dann

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - p_1}\,d\zeta = \mathcal{W}(\gamma, p_1)\cdot g(p_1)$$

Dies ist die Cauchysche Integralformel 4.1.

(3) Der Residuensatz 6.24 gilt auch dann, wenn wir die Menge S durch eine beliebige abgeschlossene und diskrete Teilmenge S von Ω ersetzen. Wdh: diskrete Mengen sind nicht immer endlich. Wenn S eine abgeschlossene und diskrete Teilmenge von Ω ist, dann hat S im Innern von Ω keine Häufungspunkt, am Rand aber evtl. schon. Es gibt dann aber nur endlich viele

Punkte p in S mit $\mathcal{W}(\gamma, p) \neq 0$.

Beweis von Satz 6.24: Sei $h_\ell(z)$ der Hauptteil der Laurentreihe von f in p_ℓ, das heißt um p_ℓ:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n,\ell}(z - p_\ell)^n$$
$$h_\ell(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{n,\ell}(z - p_\ell)^n$$

$h_\ell(z)$ konvergiert und ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{p_\ell\}$.

$$h(z) := f(z) - \sum_{\ell=1}^{k} h_\ell(z)$$

holomorph auf Ω (holomorph auf $\Omega \setminus S$ klar. Um p_ℓ herum $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,\ell}(z-p_\ell)^n - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq\ell}}^{\mu} h_k(z)$ holomorph.)

Mit dem Cauchy-Integral-Satz folgt $\int_\gamma h(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta &= \sum_{\ell=1}^{\mu} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h_\ell(\zeta)\,d\zeta \\
\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h_\ell(\zeta)\,d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{n,\ell}(\zeta - p_\ell)^n\,d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{-1} a_{n,\ell}\int_\gamma (\zeta - p_\ell)^n\,d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\cdot a_{-1,\ell}\int_\gamma \frac{1}{\zeta - p_\ell}\,d\zeta \\
&= \underbrace{a_{-1,\ell}}_{\operatorname{Res}_{p_\ell} f}\,\mathcal{W}(\gamma, p_\ell),
\end{aligned}$$

denn $\zeta \longmapsto \frac{(\zeta-p_\ell)^{n+1}}{n+1}$ ist Stammfunktion von $(\zeta - p_\ell)^n$, falls $n \neq -1$. Also

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{\ell=1}^{\mu}(\operatorname{Res}_{p_\ell} f)\mathcal{W}(\gamma, p_\ell).$$

■

Proposition 6.26. *Seien P, Q Polynomfunktionen mit $Q \not\equiv 0$. Sei $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, Q habe keine Nullstellen auf $\mathbb{R}$. Es gelte $\deg Q \geq \deg P + 2$. Dann folgt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{p\in S_+} \operatorname{Res}_p R,$$

wobei $S_+ := \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0 \wedge \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Beweis: Seien $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$, mit $a_n \neq 0$, $a_j \in \mathbb{C}$, $Q(z) = b_m z^m + \cdots + b_0$, mit $b_m \neq 0$, $b_j \in \mathbb{C}$ und $m \geq n + 2$.

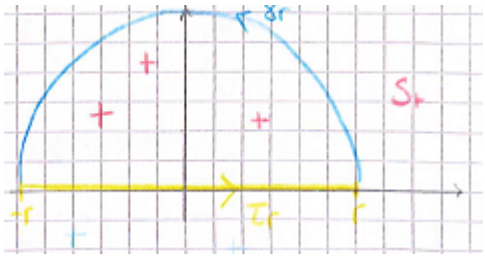


Abbildung 6.4: Zur Proposition 6.26.

1. Schritt: $\forall \varepsilon > 0\, \exists r_0 > 0\, \forall z \in \mathbb{C} \setminus B_{r_0}(0)$:

$$\Big|\frac{P(z)}{Q(z)} z^{m-n} - \frac{a_n}{b_m}\Big| < \varepsilon$$

Prüfe: sei $w = \frac{1}{z}$, dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{P(\frac{1}{w})}{Q(\frac{1}{w})}\frac{w^n}{w^m} &= \frac{a_n w^0 + a_{n-1} w^1 + \cdots + a_0 w^n}{b_m w^0 + \cdots + b_0 w^m} \\ &\xrightarrow{w \to 0} \frac{a_n}{b_m}\end{aligned}$$

2. Schritt:

$$|R(z)| \leq \underbrace{\Big(\big|\frac{a_n}{b_m}\big| + \varepsilon\Big)}_{=:c} \frac{1}{|z|^{m-n}}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus B_{r_0}(0)$.

3. Schritt: Für $r > 0$ definiere $\gamma_r(t) = re^{it}$, $\gamma_r \colon [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $\tau_r \colon [-r, r] \to \mathbb{C}$, $t \longmapsto t$. Wähle $r_1 > 0$ so groß, dass $B_{r_1}(0) \supset S_+$ und $r_1 \geq r_0$. Für alle $r \geq r_1$ gilt dann:

R ist holomorph auf $\{z \in \mathbb{C} \mid z \notin S_+, \operatorname{Im}(z) \geq -\varepsilon\}$ für ein kleines ε.

Der Residuensatz liefert:

$$\underbrace{\int_{\tau_r} R(z)\, dz}_{\int_{-r}^{r} R(x)\, dx} + \int_{\gamma_r} R(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{p \in S_+} \operatorname{Res}_p R$$

Die Konvergenz von $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, dx$ folgt aus dem 2. Schritt, da $|R(x)| \leq \frac{c}{x^2}$ für $|x| \geq \max\{r_1, 1\}$.

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\gamma_r} R(z)\, dz\Big| &= \Big|\int_0^{\pi} R(re^{it}) rie^{it}\, \mathrm{d}t\Big| \\ &\leq \int_0^{\pi} \underbrace{|R(re^{it})|}_{\leq \frac{c}{r^2} \text{ für } r \geq \max\{r_1, 1\}} r\, dt \\ &\leq \pi \frac{c}{r} \\ &\xrightarrow{r \to \infty} 0.\end{aligned}$$

■

Lemma 6.27. *Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $P, Q : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, $Q \not\equiv 0$, $z_0 \in \Omega$ eine einfache Nullstelle von Q. Dann gilt*

$$\operatorname{Res}_{z_0}\left(\frac{P}{Q}\right) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

Beweis: $\mathcal{O}_{z_0}\left(\frac{P}{Q}\right) = \mathcal{O}_{z_0}P - \mathcal{O}_{z_0}Q = \underbrace{\mathcal{O}_{z_0}P}_{\geq 0} - 1 \geq -1.$

Also Pol 1. Ordnung oder hebbar.

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

$$\frac{P(z)}{Q(z)}(z - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1}(z - z_0)^n$$

ist holomorph als Potenzreihe. Es gilt

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \lim_{z \to z_0} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \cdot (z - z_0)\right) \\ &= \lim_{z \to z_0} P(z) \cdot \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{Q(z) - Q(z_0)} \\ &= P(z_0) \cdot \frac{1}{Q'(z_0)} \end{aligned}$$

■

Beispiel 6.28. $R(z) = \frac{1}{1+z^4}$, $S_+ = \{e^{\frac{\pi i}{4}}, e^{\frac{3\pi i}{4}}\}$. Berechne das Residuum:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_p R &= \frac{1}{4p^3} \text{ für } p \in S_+ \\ \operatorname{Res}_{e^{\frac{\pi i}{4}}} R &= \frac{1}{4} e^{-\frac{3\pi i}{4}} \\ \operatorname{Res}_{e^{\frac{3\pi i}{4}}} R &= \frac{1}{4} e^{-\frac{9\pi i}{4}} = \frac{1}{4} e^{-\frac{\pi i}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^4}\, dx &= 2\pi i \underbrace{(\operatorname{Res}_{e^{\frac{\pi i}{4}}} R + \operatorname{Res}_{e^{\frac{3\pi i}{4}}} R)}_{= -\frac{\sqrt{2} i}{4}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Lemma 6.29. *Sei f eine meromorphe Funktion auf Ω, wobei Ω offen in $\mathbb{C}$ ist. Sei S die Menge der Pole. Die Ableitung $f' \colon \Omega \setminus S \to \mathbb{C}$ ist auch eine meromorphe Funktion auf Ω und für alle $z_0 \in \Omega$ gilt:*

$$\mathcal{O}_{z_0}(f') = \begin{cases} \mathcal{O}_{z_0}(f) - 1, & \textit{falls } \mathcal{O}_{z_0}(f) \neq 0 \\ \geq 0, & \textit{falls } \mathcal{O}_{z_0}(f) = 0. \end{cases}$$

Wir definieren hier: $\infty - 1 := \infty$.

Beweis: Sei $z_0 \in \Omega$. $k := \mathcal{O}_{z_0}(f) \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$.

Die Fälle $k = 0$ und $k = \infty$ sind klar.
Sei $k \in \mathbb{Z}$: nach Lemma 6.14 existiert eine offene Umgebung U von z_0 und eine holomorphe Funktion $g\colon U \to \mathbb{C}$, so dass für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$

$$f(z) = g(z)(z - z_0)^k$$

und $g(z_0) \neq 0$.

$$\begin{aligned} f'(z) &= g'(z)(z - z_0)^k + g(z)k(z - z_0)^{k-1} \\ &= \underbrace{(g'(z)(z - z_0) + kg(z))}_{G(z)}(z - z_0)^{k-1} \end{aligned}$$

mit $G\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter ist $G(z_0) = kg(z_0) \neq 0$, falls $k \neq 0$. Also für $k \neq 0$ gilt: $\mathcal{O}_{z_0} f' = k - 1$. ∎

Folgerung 6.30. *Sei f meromorph auf Ω, Ω ein Gebiet und $f \not\equiv 0$. Dann ist $\frac{f'}{f}$ meromorph auf Ω. Weiter gilt für alle $z_0 \in \Omega$*

$$\mathcal{O}_{z_0}\left(\frac{f'}{f}\right) := \begin{cases} \geq 0, & \textit{falls } \mathcal{O}_{z_0} f = 0 \\ -1, & \textit{falls } \mathcal{O}_{z_0} f \neq 0, \end{cases}$$

$$\operatorname{Res}_{z_0} \frac{f'}{f} = \mathcal{O}_{z_0} f\,. \tag{6.2}$$

Beweis von (6.2): $G(z), g(z)$ wie in Lemma 6.29

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{G(z)}{g(z)} \frac{(z - z_0)^{k-1}}{(z - z_0)^k} \\ &= \frac{G(z)}{g(z)} \cdot \frac{1}{z - z_0} \end{aligned}$$

Pol 1. Ordnung oder hebbar.

$$\operatorname{Res}_{z_0} \frac{f'}{f} = \frac{G(z_0)}{g(z_0)} = k = \mathcal{O}_{z_0} f.$$ ∎

Satz 6.31 (Nullstellen und Polstellen zählende Integrale)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f meromorph auf Ω mit nur endlich vielen Nullstellen und Polen. Sei γ eine geschlossene stückweise C^1-Kurve, die homotop (relativ der Endpunkte)*[64] *zu einer konstanten Kurve (γ homotop Null) in Ω ist. Auf* $\operatorname{Spur}(\gamma)$ *sollen keine Pole und Nullstellen liegen. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{z_0 \in \Omega} \mathcal{W}(\gamma, z_0) \mathcal{O}_{z_0} f,$$

wobei die rechte Seite eine endliche Summe ist, da $\mathcal{O}_{z_0} f \neq 0$ nur für endlich viele z_0.

Beweis von Satz 6.31: Wende Residuensatz auf $\frac{f'}{f}$ an. ∎

[64] oft lässt man „relativ zu den Endpunkten“ weg, dies meint dann aber dasselbe.

Bemerkung 6.32. Der Satz gilt auch, wenn $f \not\equiv 0$ unendlich viele Pole oder unendlich viele Nullstellen hat. Dann gibt es nur endlich viele $z_0 \in \Omega$ für die $\mathcal{W}(\gamma, z_0) \neq 0$ und $\mathcal{O}_{z_0} f \neq 0$. Diese Version folgt im wesentlichen aus der in Bemerkung 6.25 (3) erwähnten Verallgemeinerung des Residuensatzes.

Beispiel 6.33. Sei p eine Polynomfunktion, $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ mit $a_n \neq 0$.

$$\begin{aligned} z \cdot \frac{p'(z)}{p(z)} &= \frac{n a_n z^{n-1} + \cdots + a_1}{a_n z^n + \cdots + a_0} \cdot z \\ &\xrightarrow{|z| \to \infty} n. \end{aligned}$$

$\gamma_R(t) = Re^{it}$, $\gamma_R \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $(\Omega = \mathbb{C})$.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{p'(z)}{p(z)} \, \mathrm{d}z = \sum_{z_0 \in \mathbb{C}} \mathcal{W}(\gamma_R, z_0) \mathcal{O}_{z_0} p,$$

wobei $\mathcal{W}(\gamma_R, z_0) = \begin{cases} 0, & \text{falls } z_0 \notin \overline{B_R(0)} \\ 1, & \text{falls } z_0 \in B_R(0). \end{cases}$

Wähle R so groß, dass alle Nullstellen von p in $B_R(0)$ liegen. Dann ist $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{p'(z)}{p(z)} \, dz$ die Anzahl der Nullstellen von p mit Vielfachheiten gezählt. Sei $n := \deg P$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{p'(z)}{p(z)} \, \mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{p'(Re^{it})}{p(Re^{it})} Rie^{it} \, \mathrm{d}t \\ &\xrightarrow{R \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} in \, \mathrm{d}t = n, \end{aligned}$$

somit hat p genau n Nullstellen mit Vielfachheit gezählt.

Dies ist ein alternativer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

Satz 6.34 (Satz von Rouché)**.** *Seien Ω, γ wie in Satz 6.31. Sei f meromorph auf Ω mit endlich vielen Nullstellen und Polen, keine Nullstellen und keine Pole auf* $\operatorname{Spur}(\gamma)$*. Sei g meromorph auf Ω mit endlich vielen Nullstellen und Polen, und keine Pole auf* $\operatorname{Spur}(\gamma)$*. Es gelte $|g| < |f|$ auf* $\operatorname{Spur}(\gamma)$*. Dann gilt*

$$\sum_{z \in \Omega} \mathcal{W}(\gamma, z) \mathcal{O}_z(f + g) = \sum_{z \in \Omega} \mathcal{W}(\gamma, z) \mathcal{O}_z(f).$$

Die Voraussetzungen des Satzes implizieren, dass $f + g$ meromorph auf Ω ist und keine Nullstellen und Polstellen auf $\operatorname{Spur}(\gamma)$ hat. Deswegen sind auch in der Summe auf der linken Seite nur endlich viele Summanden ungleich Null.

Beweis: $F(c) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f' + cg'}{f + cg}(z) \, \mathrm{d}z$, mit $c \in [0, 1]$, $f(z) + cg(z) \neq 0$ auf $\operatorname{Spur}(\gamma)$.

$c \longmapsto F(c)$ mit $[0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig. $F(c) \in \mathbb{Z}$ nach Satz 6.31. Somit ist F konstant, also $F(0) = F(1)$. Also folgt die Behauptung. ∎

Beispiel 6.35. $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$, $a_n \neq 0$ und γ_R wie in Satz 6.31. Sei $f(z) = a_n z^n$ und $g(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$. Dann gilt $|g| < |f|$ auf $\operatorname{Spur}(\gamma_R)$, falls R groß ist. Also ist die Anzahl der Nullstellen von p gleich der Anzahl der Nullstellen von f, also gleich n.

Dies ist ein weiterer alternativer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

7 Der riemannsche Abbildungssatz

Di 7.12.

Definition 7.1. *Sei Ω_1, Ω_2 offen in $\mathbb{C}$. Eine Abbildung von $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ heißt* **biholomorph**, *falls*

(1) *f bijektiv*

(2) *f holomorph*

(3) *f^{-1} holomorph.*

Proposition 7.2. *Eine Abbildung $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ ist biholomorph genau dann, wenn f holomorph, f bijektiv und für alle $z \in \Omega_1$: $f'(z) \neq 0$.*

Beweis: Folgt aus Aufgabe 3 von Übungsblatt 4. ∎

Wiederholung: f biholomorph genau dann, wenn f (reeller) Diffeomorphismus von Ω_1 und Ω_2 und f ist winkeltreu (=konform) und orientierungserhaltend.

Dann ist Ω_1 einfach zusammenhängend bzw. wegzusammenhängend bzw. zusammenhängend genau dann, wenn Ω_2 einfach zusammenhängend bzw. wegzusammenhängend bzw. zusammenhängend ist.

Beispiel. (a) (Nach Vorlesung hinzugefügt) Betrachte die ganze Funktion $f_k(z) = z^k$ für $k \in \mathbb{N}^*$. Wir haben $f_k'(1) = k$ und deswegen folgt aus dem lokalen Umkehrsatz, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $f_k(B_\epsilon(1))$ offen in $\mathbb{C}$ ist und so dass die Einschränkung von f_k ein Diffeomorphismus $B_\epsilon(1) \to f_k(B_\epsilon(1))$ ist. Die Stetigkeit von f' impliziert: Ist ϵ klein genug, so haben wir $f_k'(z) \neq 0$ für alle $z \in B_\epsilon(1)$. Also besitzt $f_k|_{B_\epsilon(1)}$ eine holomorphe Umkehrfunktion $w_k\colon U \to B_\epsilon(1)$, die auf einer offenen Umgebung U von 1 definiert ist. $f_k|_{B_\epsilon(1)}\colon B_\epsilon(1) \to f_k(B_\epsilon(1))$ ist also biholomorph.

(b) Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$, mit $f'(z_0) = 0$ für ein $z_0 0 \in \Omega$, dann ist für jedes $\epsilon > 0$ die Funktion $f|_{B_\epsilon(z_0)\cap\Omega}$ nicht injektiv. Insbesondere ist dann f auf keiner Umgebung von z_0 biholomorph.

Denn dann hat $g(z) := f(z) - f(z_0)$ eine Nullstelle der Ordnung $k \geq 2$ in z_0. Schreibe

$$g(z) = a^k (z - z_0)^k h(z)$$

für $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und eine holomorphe Funktion $h : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ mit $h(z_0) = 1$. Dann folgt für alle z in einer kleinen Umgebung $U_0 \subset B_\epsilon(z_0) \cap \Omega$ von z_0

$$g(z) = \Big(a(z - z_0) w_k(h(z))\Big)^k.$$

Auf Grund des Satz von der offenen Abbildung gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(0) \subset \{a(z - z_0) w_k(h(z)) \mid z \in U_0\}$, sei

$$a(z_j - z_0) w_k(h(z_1)) = \frac{\delta}{2} e^{2\pi i j/k}$$

für $z_j \in U_0$, $j = \{1, 2, \dots, k\}$. Dann folgt

$$g(z_j) = \left(\frac{\delta}{2} e^{2\pi i j/k}\right)^k = \frac{\delta^k}{2^k}.$$

Also ist g nicht injektiv auf U_0 und somit auch nicht f.

Bemerkung. (Nach Vorlesung hinzugefügt) Bedingung (3) ergibt sich aus aus den anderen beiden, kann also weggelassen werden. Denn sei $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ bijektiv und holomorph. Dann muss $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$ gelten, denn sonst würde obiges Beispiel (b) zeigen, dass f nicht injektiv sein kann. Mit obiger Proposition folgt dann die Holomorphie von f^{-1}.

Beispiel 7.3.

(a)

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \cup \{\infty\} &\to \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ z &\longmapsto \frac{z-i}{z+i} \\ -i &\longmapsto \infty \\ \infty &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

Möbiustransformation zu $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Biholomorphe Abbildung von $\mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

(b)

$$\begin{aligned} \left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1 \quad &\iff \quad |z-i| < |z+i| \\ &\impliedby \quad (z-i)(\overline{z}+i) < (z+i)(\overline{z}-i) \\ &\iff \quad \underbrace{iz - i\overline{z}}_{-2\operatorname{Im} z} < \underbrace{-zi + i\overline{z}}_{2\operatorname{Im} z} \\ &\iff \quad \operatorname{Im} z > 0. \end{aligned}$$

Also $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\} \to B_1(0)$ mit $z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$ biholomorph.

(c) Der Kreisring $B_R(0) \setminus \overline{B_r(0)}$ für $0 <\leq r < R < \infty$ ist nicht biholomorph zu $B_\rho(0)$ in $\mathbb{C}$, da $\overline{B_r(0)}$ nicht einfach zusammenhängend ist, aber $B_\rho(0)$ ist einfach zusammenhängend. Genauso sieht man, dass dieser Kreisring nicht zu $\mathbb{C}$ biholomorph ist.

(d) $B_r(0)$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ist nicht biholomoph zu $\mathbb{C}$. Denn jede holomorphe Funktion $\mathbb{C} \to B_r(0) \subset \mathbb{C}$ ist beschränkt und ganz, also nach dem Satz von Liouville konstant. Eine konstante Funktion kann aber nicht biholomorph sein.

Satz 7.4 (Der riemannsche Abbildungssatz)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Sei $\Omega \neq \mathbb{C}$. Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung $\Omega \to B_1(0)$.*

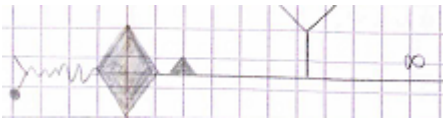


Abbildung 7.1: Menge des Beispiels 7.7.

Beweis: [9, Kapitel 10] Jänich, Kapitel 10. ∎

Die biholomorphe Abbildung ist nicht eindeutig!

Folgerung 7.5. *Angenommen Ω_1, Ω_2 sind zwei von $\mathbb{C}$ verschiedene einfach zusammenhängende Gebiete. Dann existiert eine biholomorphe Abbildung von Ω_1 nach Ω_2.*

Beweis:

$$\Omega_1 \overset{\cong}{\to} B_1(0) \overset{\cong}{\to} \Omega_2 \,.$$

∎

Biholomorph zu sein ist eine Äquivalenzrelation.

Beispiel 7.6. $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ und sei $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ wieder die obere Halbebene. Wir haben oben gesehen, dass

$$\begin{aligned} f : \mathbb{H} &\to B_1(0) \\ z &\longmapsto \frac{z-i}{z+i} \end{aligned}$$

biholomorph ist. Außerdem ist

$$\begin{aligned} g : \mathbb{H} &\to \Omega \\ z &\longmapsto z^2 \end{aligned}$$

bihomorph. Also auch die Komposition $g \circ f^{-1} : B_1(0) \to \Omega$.

Beispiel 7.7. Das Komplement der grauen Menge in Abbildung 7.1 besitzt eine biholomorphe Abbildung nach $B_1(0)$.

Beispiel 7.8. Allgemeiner gilt[65]: Sei A eine nicht-leere abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$, so dass $A \cup \{\infty\}$ zusammenhängend in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist. Dann besitzt jede Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus A$ eine biholomorphe Abbildung auf $B_1(0)$.

Bemerkung 7.9. Wir sagen Ω_1 und Ω_2 sind biholomorph, wenn es eine biholomorphe Abbildung $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ gibt. Wir haben oben gesehen, dass Biholomorphie eine Äquivalenzrelation auf dem Raum der Gebiete in $\mathbb{C}$ ist.

[65] ohne detailierten Beweis: man muss letztendlich zeigen, dass jede Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus A$ einfach zusammenhängend ist. Ich kenne keine Referenz, kann es aber mit einer verstärkten Version des riemannschen Abbildungssatzes zeigen, siehe Korollar 8.6.

8 Nachträge

Die folgenden Aussagen sind nicht mehr in der Vorlesung behandelt worden.

8.1 Zum Schwarzschen Spiegelungsprinzip

In diesem Abschnitt beantworten wir eine Frage aus der Zentralübung, die evtl. von allgemeinem Interesse ist.

Frage 8.1. *Wieso ist es im Beweis des Schwarzschen Spiegelungsprinzip Proposition 5.11 ausreichend, $\int_{\partial R} F(z)\,\mathrm{d}z = 0$ für alle achsenparallelen Rechtecke $R \subset \Omega$ zu prüfen?*

Wir formulieren die Antwort als kleinen Satz, der sich recht direkt aus dem bereits Gezeigten ergibt, mit nahezu identischen Beweisen:

Satz 8.2. *Sei $\Omega \Subset \mathbb{C}$ und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Es gelte*

$$\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

für alle achsenparallelen Rechtecke $R \subset \Omega$. Dann ist f holomorph.

Beweis: Gegeben sei $z_0 \in \Omega$. Wähle ein $r > 0$ mit $B_r(z_0) \subset \Omega$. Genau wie im Beweis von Lemma 3.7 kann man zeigen: Seien γ_w und $\hat{\gamma}_w$ stückweise achsenparallele Wege in $B_r(z_0)$ von z_0 nach w. Dann gilt

$$\int_{\gamma_w} f(z)\,dz = \int_{\hat{\gamma}_w} f(z)\,dz\,.$$

Genau wie im Beweis von Satz 3.8 erhalten wir eine holomorphe Funktion $F\colon B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $F' = f|_{B_r(z_0)}$. Da z_0 ein beliebiger Punkt von Ω war, hat somit f lokal eine Stammfunktion. Nach dem Satz von Morera (Satz 4.4) folgt, dass f holomorph ist. ■

8.2 Stärkere Version des riemannschen Abbildungssatzes.

Definition 8.3. *Wir nennen ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$* **homolog einfach zusammenhängend**, *wenn für jede geschlossene stückweise C^1-Kurve γ in Ω und jeden Punkt $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ gilt: $\mathcal{W}(\gamma, a) = 0$.*

Einfach zusammenhängende Gebiete in $\mathbb{C}$ sind homolog einfach zusammenhägend, und wir werden unten begründen, wieso die Umkehrung auch richtig ist.

Lemma 8.4. *Die Menge $A \subset \mathbb{C}$ sei abgeschlossen, nicht-leer und $A \cup \{\infty\}$ sei zusammenhängend in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Dann sind alle Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus A$ homolog einfach zusammenhängend.*

Beweis: Sei eine geschlossene stückweise C^1-Kurve γ in einer Zusammenhangskomponente Ω von $\mathbb{C} \setminus A$ gegeben. Bestimme $R > 0$ mit $\mathrm{Spur}(\gamma) \subset B_R(0)$. Die Voraussetzungen an A ergeben direkt, dass es ein $a \in A$ mit $|a| > R$ gibt. Somit $\mathcal{W}(\gamma, a) = 0$. Die Windungszahl-Funktion

$z \longmapsto w(z) := \mathcal{W}(\gamma, z)$ ist auf $A \cup (\mathbb{C} \setminus B_R(0))$ definiert und lokal-konstant. Da $A \cup (\mathbb{C} \setminus B_R(0))$ zusammenhängend ist, folgt $w \equiv 0$ und somit die Behauptung. ■

Satz 8.5 (Der riemannsche Abbildungssatz (starke Version))**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein homolog einfach zusammenhängendes Gebiet, $\Omega \neq \mathbb{C}$.*

(1) *Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung $f\colon \Omega \to B_1(0)$.*

(2) *Zu jedem $z_0 \in \Omega$ kann man obiges f so wählen, dass $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) > 0$.*

(3) *f ist durch (1) und(2) eindeutig bestimmt.*

Kommentare zum Beweis: Sobald wir (1) gezeigt haben, folgen die anderen Teile durch Studium der biholomorphen Abbildungen $B_1(0) \to B_1(0)$, siehe Zentralübung vom 10.12.2019.

Der Beweis des riemannschen Abbildungssatzes, den ich als Student in einer Vorlesung von Helmut Klingen kennengelernt habe, beweist Aussage (1) unter diesen schwächeren Voraussetzungen. Auf Nachfrage gebe ich mein Skript der Vorlesung gerne als pdf weiter. Weitere Referenzen sind mir nicht bekannt. ■

Korollar 8.6. *Jedes homolog einfach zusammenhängende Gebiet ist einfach zusammenhängend.*

Beweis der Aussage von Beispiel 7.7:, Erfüllt A die Voraussetzungen in Beispiel 7.7), so ist jede Zusammenhangskomponente Ω von $\mathbb{C} \setminus A$ nach Lemma 8.4 homolog einfach zusammenhängend. Das Gebiet Ω ist nach obigem Korollar also sogar einfach zusammenhängend,das heißt der riemannsche Abbildungssatz liefert eine biholomorphe Abbildung $\Omega \to B_1(0)$. ■

II Maß- und Integrationstheorie

Notationswechsel.

Bisher haben wir die Menge aller natürlichen Zahlen einfach mit $\mathbb{N}$ bezeichnet, und wir schrieben $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Da wir in der Maßtheorie sehr häufig Index-Menge haben, die üblicherweise mit 1 beginnen, schreiben wir ab sofort $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}$ für die Menge der **positiven** natürlichen Zahlen und $\mathbb{N}_0$ für die Menge aller natürlichen Zahlen (inklusive Null).

Literatur für diesen Teil.

Allgemeine Analysis-Bücher:

- Th. Bröcker, Analysis II [15, Kap. III und IV]
- H. Amann, J. Escher, Analysis III [12]

Spezielle Maßtheorie-Bücher:

- H. Bauer, Maß- und Integrationstheorie [13]
- J. Elstrodt, Maß- und Integrationstheorie [16]

Bücher, die eine Einführung in Maßtheorie geben und dann mit Wahrscheinlichkeitetheorie weitermachen:

- D. Meintrup, S. Schäffler, Stochastik [18]
- A. Klenke, Wahrscheinlichkeitstheorie [19]

1 Motivation

(1) Betrachte $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich, $\mathbb{R}$ ist überabzählbar unendlich. Die Funktion $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ ist nicht Riemann-integrierbar (R-integrierbar). Wir hätten gerne einen Integralbegriff, für den $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ integrierbar ist.

(2)

$$\mathcal{R}[a,b] = \{f \colon [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist Riemann-integrierbar}\}.$$

$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx$ ist eine Norm auf der Menge $W := \mathcal{R}([a,b])/_V$ mit $V := \{f \in$

$\mathcal{R}[a,b] | \|f\|_1 = 0\}$.

Problem: $(W, \|.\|_1)$ ist nicht vollständig.

Lösung: Vergrößere $\mathcal{R}[a,b]$ zu den Lebesgue-integrierbaren Funktionen.

(3) Definiere

- Flächeninhalt von Teilmengen von $\mathbb{R}^2$.
- Volumina von Teilmengen von $\mathbb{R}^3$.
- Höher-dimensionale „Volumina“ von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Damit verbunden sind Integrale über Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, denn man hätte gerne

$$\mathrm{vol}(U) = \int_U 1\, dx.$$

auch hierfür nutzen wir das Lebesgue-Integral.

(4) Wahrscheinlichkeitstheorie.

2 Messräume

Wir nutzen im folgenden die Notation $\infty + a := a + \infty := \infty$ für $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Inhaltsproblem (oder Maßproblem).

Kann man eine Volumenfunktion $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\mathrm{vol}} [0, \infty]$ mit

(a) $\mathrm{vol}(A \cup B) = \mathrm{vol}(A) + \mathrm{vol}(B)$, falls $A \cap B = \emptyset$. *(Additivität)*

(b) $0 < \mathrm{vol}(B_1(0)) < \infty$.

(c) Invariant unter Verschiebungen, Spiegelungen, Drehungen.

finden?

Antwort.

NEIN,[1] falls $n \geq 3$.[2]

Banach-Tarski-Paradoxon: Es gibt Mengen $A_1, \ldots, A_\ell \subset \mathbb{R}^n$, $k, \ell \in \mathbb{N}$, $0 < k < \ell$, so dass

(1) $B_1(0) = \bigcup_{i=1}^{\ell} A_i$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

(2) Durch Verschieben, Drehen und Spiegeln lassen sich $A_1, \ldots, A_k$ zu $B_1(0)$ zusammensetzen.

(3) Durch Verschieben, Drehen und Spiegeln lassen sich $A_{k+1}, \ldots, A_\ell$ zu $B_1(0)$ zusammensetzen.

Angenommen, es gibt nun eine Volumenfunktion $\mathrm{vol} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ mit den obigen Eigenschaf-

[1] Referenz: erklärt in [18, 1.1 Maßproblem], für einen Beweis verweisen wir auf S. Wagon: The Banach-Tarski paradox. Encyclopedia of Mathematics and its applications, vol. 24, Cambridge University Press.

[2] Im Fall $n = 1, 2$ gibt es zwar solch eine Funktion, sie ist aber durch $\mathrm{vol}(B_1(0))$ nicht eindeutig festgelegt.

ten. Dann haben wir

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(B_1(0)) &= \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{vol}(A_i) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \operatorname{vol}(A_i)}_{\operatorname{vol}(B_1(0))} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{\ell} \operatorname{vol}(A_i)}_{\operatorname{vol}(B_1(0))} .\end{aligned}$$

Also ist $\operatorname{vol}(B_1(0)) \in \{0, \infty\}$.

Lösungsansatz.

Definiere $\mathcal{M} \xrightarrow{\operatorname{vol}} [0, \infty]$ mit $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Definition 2.1. *Ein* **Messraum** *besteht aus einer Menge X und einer σ-Algebra auf X. Eine* **σ-Algebra auf X** *ist eine Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ mit*

(i) $\emptyset \in \mathcal{M}$.

(ii) $A \in \mathcal{M}$, *dann ist auch* $X \setminus A \in \mathcal{M}$.

(iii) *Gilt* $A_i \in \mathcal{M}$ *für alle* $i \in \mathbb{N}$, *dann gilt auch* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$.

Elemente von X heißen **Punkte**, *Elemente von $\mathcal{M}$ heißen* **messbare Teilmengen** *von X.*

Sind $(X, \mathcal{M})$ und $(Y, \mathcal{N})$ Messräume, dann nennt man eine Abbildung von $f\colon X \to Y$ **messbar**, *falls für alle $B \in \mathcal{N}$ gilt: $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$.*

Es folgt in einer σ-Algebra, dass endliche Vereinigungen und endliche Durchschnitte messbarer Teilmengen wieder messbar sind und auch dass abzählbar unendliche Durchschnitte messbarer Teilmengen auch wiederum messbar sind.

Bemerkung 2.2. Man kann in Definition 2.1 (iii) durch (iii') und (iv') ersetzen.

(iii') Gilt $B_i \in \mathcal{M}$ für $i \in \mathbb{N}$ und $B_i \cap B_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$, dann gilt $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{M}$.

(iv') Sind $B_1 \in \mathcal{M}$ und $B_2 \in \mathcal{M}$, dann gilt auch $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{M}$

Beweis: „(iii) $\Longrightarrow$ (iii') und (iv')“: Klar.

„ (iii') und (iv') $\Longrightarrow$ (iii)“: Aus (iv') folgt, dass endliche Vereinigungen von Mengen in $\mathcal{M}$ wieder Elemente von $\mathcal{M}$ sind. Seien $A_i \in \mathcal{M}$ gegeben, $i \in \mathbb{N}$. Wir definieren $B_1 := A_1$, $B_k := A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$ für $k \geq 2$. Man sieht sofort, dass $B_i \cap B_j = \emptyset$, für alle $i \neq j$. Die Menge

$$B_k = A_k \cap \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \right) = X \setminus \left((X \setminus A_k) \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \right)$$

ist nach (ii) und (iv') ebenfalls in $\mathcal{M}$.

Aus (iii') folgt somit: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{M}$. ∎

Beispiele 2.3.

(1) $(X, \{\emptyset, X\})$ ist ein Messraum, das heißt $\{\emptyset, X\}$ ist eine σ-Algebra auf X. Wenn wir die Menge aller σ-Algebren auf X mit der Relation $\subset$ partiell ordnen, dann ist $\{\emptyset, X\}$ das Minimum dieser Menge. In diesem Sinne ist es „die kleinste σ-Algebra auf X“.

(2) $(X, \mathcal{P}(X))$ ist ein Messraum. Dies ist die größte σ-Algebra auf X, im analogen Sinne wie oben: es ist das Maximum bezüglich $\subset$ auf der Menge aller σ-Algebren auf X.

(3) Sei $f\colon X \to Y$ gegeben. Sei $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra auf X.

$$f_*(\mathcal{M}) := \{N \subset Y \mid f^{-1}(N) \in \mathcal{M}\}$$

ist eine σ-Algebra auf Y. Wir nennen $f_*(\mathcal{M})$ das **direkte Bild von $\mathcal{M}$ unter f**. Es ist die größte σ-Algebra auf Y, so dass f messbar ist.

Fr 13.12.

(4) Ist $(\mathcal{M}_j)j \in J$ eine Familie von σ-Algebren auf X, $J \neq \emptyset$. Dann ist

$$\mathcal{M} := \bigcap_{j \in J} \mathcal{M}_j$$

ebenfalls eine σ-Algebra auf X.

(5) Sei $S \subset \mathcal{P}(X)$. Definiere

$$\mathcal{M}(S, X) := \bigcap \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra auf } X \text{ und } S \subset \mathcal{M}\}.$$

Da $\mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra auf X ist, die S enthält, ist die Indexmenge des Durchschnitts nicht die leere Menge.[3] Die Menge $\mathcal{M}(S, X)$ ist eine σ-Algebra auf X, insbesondere ist es die kleinste σ-Algebra auf X, die S enthält. Man nennt $\mathcal{M}(S, X)$ die von **S erzeugte σ-Algebra auf X.**

(6)

$$\begin{aligned} & f\colon (Y, \mathcal{N}) \to (X, \mathcal{M}(S, X)) \text{ ist messbar} && (*) \\ \iff \quad & \text{für alle } A \in S: \ f^{-1}(A) \in \mathcal{N} && (+). \end{aligned}$$

Begründung.

$$\begin{aligned} (+) \quad & \iff \quad \forall A \in S: \ A \in f_*(\mathcal{N}) \\ & \iff \quad S \subset f_*(\mathcal{N}) \\ & \iff \quad \mathcal{M}(S, X) \subset f_*(\mathcal{N}) \\ & \iff \quad \forall A \in \mathcal{M}(S, X): \ A \in f_*(\mathcal{N}) \\ & \iff \quad \forall A \in \mathcal{M}(S, X): \ f^{-1}(A) \in \mathcal{N} \\ & \iff \quad (*) \end{aligned}$$

(7) Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, das heißt $\mathcal{O}_X$ ist eine Topologie auf X. Dann nennt

[3] Man beachte hier $\bigcap\{C_i \mid i \in \emptyset\}$ haben wir nicht definiert. Deswegen sollte solch ein Durchschnitt immer über mindestens eine Menge gehen.

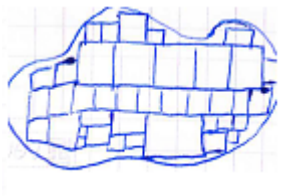


Abbildung 2.1: Zu Beispiele 2.3 (7) (a)

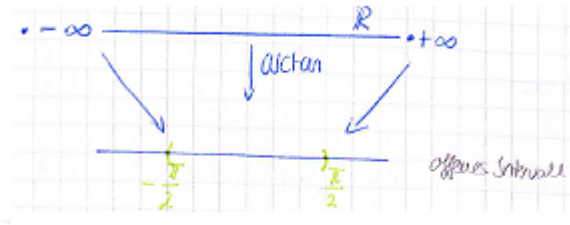


Abbildung 2.2: Zu Beispiel 2.3 (7) (b)

man $\mathcal{B}_X := \mathcal{M}(\mathcal{O}_X, X)$ die **Borel-Algebra** auf X. Dann sind alle stetigen Abbildungen $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ messbar.

Begründung.

Prüfe, ob $f\colon (X, \mathcal{B}_X) \to (Y, \mathcal{B}_Y)$ mit $\mathcal{B}_Y := \mathcal{M}(\mathcal{O}_Y, Y)$ messbar ist. Nach (6) ist zu prüfen, ob für alle $U \in \mathcal{O}_Y$: $\underbrace{f^{-1}(U)}_{\text{offen}} \in \mathcal{M}(\mathcal{O}_X, X)$. Aus der Stetigkeit von f folgt $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X \subset \mathcal{M}(\mathcal{O}_X, X)$.

Wir betrachten nun einige Spezialfälle von (7).

(a) Sei nun $X = \mathbb{R}^n$. Wir definieren den Elementarwürfel

$$\mathcal{E}_{z,k} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \frac{z_j}{2^k} \leq x < \frac{z_j + 1}{2^k} \text{ für alle } j \in \{1, \ldots, n\} \right\},$$

$z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Jede offene Menge in $\mathbb{R}^n$ ist eine abzählbare Vereinigung von Elementarwürfeln.[4] Also ist $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{M}(\{\mathcal{E}_{z,k} | z \in \mathbb{Z}^n, k \in \mathbb{N}\}, \mathbb{R}^n)$.

(b) $X = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (vgl. Analysis I, Kapitel 3, vor Proposition 1.30 und die Fortführung in Analysis I, Kapitel 4, Bemerkung 5.14). Die offenen Mengen von $\overline{\mathbb{R}}$ sind die Mengen der Form U, $[-\infty, b) \cup U$, $(a, +\infty] \cup U$ und $U \cup [-\infty, b) \cup (a, +\infty]$, wobei U offen in $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Funktionen $f\colon Y \to \overline{\mathbb{R}}$ heißen **numerische Funktionen**. Nun definiere

$$S := \left\{ (a, +\infty] \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}.$$

[4] Urspünglich stand in der Vorlesung hier ein $\leq$ an Stelle von $<$. Die Aussage ist in beiden Formen richtig (ganz ähnlicher Beweis), aber so, wie sie jetzt steht, ist es etwas einfach später nutzbar.

Alle Intervalle in $\mathbb{R}$ sind Elemente von $\mathcal{M}(S,\overline{\mathbb{R}})$, z.B.

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbb{R}} \setminus (a,+\infty] &= [-\infty,a] \in \mathcal{M}(S,\overline{\mathbb{R}}) \\
\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{[-\infty, a-\frac{1}{n}]}_{\in\mathcal{M}(S,\overline{\mathbb{R}})} &= [-\infty,a) \in \mathcal{M}(S,\overline{\mathbb{R}}) \\
\implies \quad [a,+\infty] &\in \mathcal{M}(S,\overline{\mathbb{R}}) \\
\implies \quad (a,b) &= [-\infty,b)\cap(a,+\infty] \in \mathcal{M}(S,\overline{\mathbb{R}})
\end{aligned}$$

Also sind auch alle offene Mengen von $\overline{\mathbb{R}}$ in $\mathcal{M}(S,\overline{\mathbb{R}})$ enthalten.[5] Somit gilt: $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} \subset \mathcal{M}(S,\overline{\mathbb{R}})$. Offensichtlich haben wir $S \subset \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{R}}} \subset \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$. Also gilt insgesamt:

$$B_{\overline{\mathbb{R}}} = \mathcal{M}(S,\overline{\mathbb{R}})\,.$$

Wir haben somit gezeigt, d.h. es folgt aus (6) und(7) (b) des vorangehenden Beispiels 2.3:

Lemma 2.4. *Sei $(X,\mathcal{M})$ ein Messraum, $f\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$ oder $f\colon X\to\mathbb{R}$ ist messbar*

$$\begin{aligned}
&\iff \forall a\in\mathbb{R}: \underbrace{\{f>a\}}_{=f^{-1}((a,+\infty])} \in \mathcal{M}. \\
&\iff \forall a\in\mathbb{R}: \{f<a\}\in\mathcal{M} \\
&\iff \forall a\in\mathbb{R}: \{f\geq a\}\in\mathcal{M} \\
&\iff \forall a\in\mathbb{R}: \{f\leq a\}\in\mathcal{M},
\end{aligned}$$

wobei $\{f>a\} := \{x\in X | f(x)>a\}$ und analog.

Ab sofort oft schreiben wir zumeist X statt $(X,\mathcal{M})$, es sei denn, $\mathcal{M}$ ist nicht aus dem Kontext heraus klar. Wir gehen von nun an bis auf weiteres auch davon aus, dass $\mathbb{R},\mathbb{R}^n,\overline{\mathbb{R}},\mathbb{C},\mathbb{C}^n$ immer die Borel-Algebra (der Standard-Topologie) trägt, es sei denn, wir sagen explizit etwas anderes.

Bemerkungen 2.5.

(1) $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to Z$ messbar, dann ist auch $g\circ f\colon X\to Z$ messbar, denn $(g\circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$.

(2) Sei $f\colon X\to\mathbb{R}^n$ messbar.
$X \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi_k} \mathbb{R}$, mit $(y_1,\dots,y_n)^T \longmapsto y_k$ mit π_k stetig, also messbar. Also ist $\pi_k\circ f$ messbar. Schreibe $f(x) = (f_1(x),\dots,f_n(x))^T$. Dann ist also $\pi_k\circ f = f_k$ messbar.

(3) Umgekehrt: Sind $f_1,\dots,f_n\colon X\to\mathbb{R}$ messbar, dann ist auch $f=(f_1,\dots,f_n)^T\colon X\to\mathbb{R}^n$ messbar, denn:
$$f^{-1}(\varepsilon_{z,k}) = \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}\Big([\frac{z_i}{2^k},\frac{z_i+1}{2^k}]\Big)$$
mit $z\in\mathbb{Z}^n$, $k\in\mathbb{N}$ is messbar.

(4) Sei ein Homömorphismus $\varphi:[-1,1]\to\overline{\mathbb{R}}$ mit $\varphi(\pm1)=\pm\infty$ gegeben, z.B. entweder wie in

[5] Hier wird die Tatsache benutzt, dass jede offene Menge in $\mathbb{R}$ die Vereinigung von *abzählbar* vielen offenen Intervallen ist. Überlegen Sie sich kurz, wieso das so ist.

Analysis I, Kapitel 3, vor Proposition 1.30 oder

$$\varphi(x) := \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{für } x \in (-1,1), \\ \pm\infty & \text{für } x = \pm 1, \end{cases}$$

Dann ist $f = (f_1, \dots, f_n)\colon X \to \overline{\mathbb{R}}^n$ genau dann messbar, wenn $(\varphi^{-1} \circ f_1, \dots, \varphi^{-1} \circ f_n)\colon X \to \mathbb{R}^n$ messbar ist.

(5) Es folgt aus (2), (3) und (4):
$f = (f_1, \dots, f_n)\colon X \to \overline{\mathbb{R}}^n$ ist genau dann messbar, wenn alle $f_1, \dots, f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar sind.

Konventionen zum Rechnen in $\overline{\mathbb{R}}$.

$$\begin{aligned} (+\infty) + a := a + (+\infty) := +\infty \quad & \forall a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ (-\infty) + a := a + (-\infty) := -\infty \quad & \forall a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \end{aligned}$$

Nicht definiert sind $(+\infty) + (-\infty)$ und $(-\infty) + (+\infty)$

$$\begin{aligned} (\pm\infty) \cdot a := a \cdot (\pm\infty) := \pm\infty \quad & \forall a \in (0, \infty] \\ (\pm\infty) \cdot a := a \cdot (\pm\infty) := \mp\infty \quad & \forall a \in [-\infty, 0) \\ (\pm\infty) \cdot 0 := 0 \cdot (\pm\infty) := 0 & \end{aligned}$$

Wir schreiben auch ∞ für $+\infty$.
Die Addition ist auf ihrem Definitionsbereich stetig und somit messbar.
Die Multiplikation $\mu : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ ist aber nicht stetig.

Für $f_1, f_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$, sagen wir: $f_1 \pm f_2$ ist definiert, falls $f_1(x) \pm f_2(x)$ für alle $x \in X$ definiert ist.

Lemma 2.6. *Die Multiplikation $\mu : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ ist messbar.*

Beweis: Wir zeigen, dass für $a \in \mathbb{R}$ die Menge $\{\mu > a\}$ messbar ist. Wir haben im Fall $a \geq 0$:

$$\begin{aligned} \{\mu > a\} &= \{(x,y) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \mid x \cdot y > a\} \\ &= (0,\infty] \times \{\infty\} \cup [-\infty, 0) \times \{-\infty\} \\ &\quad \cup \{\infty\} \times (0,\infty] \cup \{-\infty\} \times [-\infty, 0) \\ &\quad \cup \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \cdot y > a\} \end{aligned}$$

und im Fall $a < 0$:

$$\begin{aligned} \{\mu > a\} &= \{(x,y) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \mid x \cdot y > a\} \\ &= (0,\infty] \times \{\infty\} \cup [-\infty, 0) \times \{-\infty\} \\ &\quad \cup \{\infty\} \times (0,\infty] \cup \{-\infty\} \times [-\infty, 0) \\ &\quad \cup \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \cdot y > a\} \end{aligned}$$

$$\cup\, \overline{\mathbb{R}} \times \{0\} \cup \{0\} \times \overline{\mathbb{R}}\,.$$

All diese Mengen sind messbar, zum Beispiel ist

$$(0,\infty] \times \{\infty\} = \underbrace{\Big((0,\infty] \times \overline{\mathbb{R}}\Big)}_{\text{offen}} \cap \underbrace{\Big(\overline{\mathbb{R}} \times \{\infty\}\Big)}_{\text{abgeschlossen}}$$

messbar; und $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \cdot y > a\}$ ist offen und dadurch messbar in $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$. ■

Sei $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann ist $i_\lambda : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$, $x \longmapsto (\lambda, x)$ stetig, also messbar. Somit ist $\mu \circ i_\lambda : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \longmapsto \lambda x$ auch messbar.

Proposition 2.7. *Sei X ein Messraum. Sind $f_1, f_2, f_3, \ldots : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, $\mu, \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann gilt*

(1) *$\lambda f_1 + \mu f_2$ ist messbar, falls definiert*

Di 17.12. (2) *$f_1 \cdot f_2$ ist messbar.*

(3) *$|f_1|$ ist messbar.*

(4) *$\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j$ ist messbar.*
Hierbei definieren wir $(\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j)(x) := \sup\{f_j(x) \mid j \in \mathbb{N}\}$.

(5) *Genauso $\inf_{j\in\mathbb{N}} f_j$ messbar, $\limsup_{j\to\infty} f_j$, $\liminf_{j\to\infty} f_j$ messbar.*

(6) *Wenn f_j punktweise gegen f konvergiert, dann ist auch f messbar.*

(7) *Ist $f_2(X) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so ist*
$$\frac{f_1}{f_2} := f_1 \cdot \frac{1}{f_2}$$
messbar.

Beweis:

(1) Sei $g(y_1, y_2) := \lambda y_1 + \mu y_2$ und $\operatorname{dom}(g)$ der maximale Definitionsbereich in $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ von g. Zum Beispiel im Fall $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}$ haben wir dann $\operatorname{dom}(g) = \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \setminus \{(-\infty, +\infty), (+\infty, -\infty)\}$.
$X \xrightarrow{f=(f_1,f_2)^T} \operatorname{dom}(g) \xrightarrow{g} \overline{\mathbb{R}}$.
Da g messbar ist, ist auch $g \circ f = \lambda f_1 + \mu f_2$ messbar.

(2) $g : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, $g(y_1, y_2) := y_1 \cdot y_2$ ist messbar, also auch $g \circ f = f_1 \cdot f_2$.

(3) Die Betrags-Funktion $\overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \longmapsto |x|$, $\pm\infty \longmapsto \infty$ ist stetig und somit messbar.
$X \xrightarrow{f_1} \overline{\mathbb{R}} \xrightarrow{|\cdot|} \overline{\mathbb{R}}$ messbar

(4)
$$\{\sup_{j\in\mathbb{N}}(f_j) > a\} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \underbrace{\{f_j > a\}}_{\text{messbar}} \text{ messbar}$$

(5)
$$\inf_{j\in\mathbb{N}} f_j = -\sup_{j\in\mathbb{N}}(-f_j)$$
$$\limsup_{j\to\infty} f_j = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\sup_{j\in\mathbb{N}_{\geq k}} f_j}_{\text{monoton fallend in } k}$$

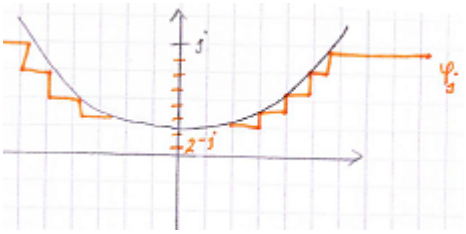


Abbildung 2.3: Zum Beweis von Satz 2.9.

$$= \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}_{\geq k}} f_j$$

$$\Longrightarrow \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} f_j = \limsup_{j\to\infty} f_j \text{ messbar}$$

$$\liminf_{j\to\infty} f_j = -\limsup_{j\to\infty}(-f_j) \text{ messbar.}$$

(6) folgt direkt aus (5).

(7) $X \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}\setminus\{0\} \xrightarrow{y\longmapsto 1/y} \overline{\mathbb{R}}$ ist als Verkettung messbarer Funktionen messbar. Mit (2) folgt die Messbarkeit von $f_1 \cdot (1/f_2)$. ■

Definition 2.8.
$f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt **Treppenfunktion** *oder* **numerische Treppenfunktion**,

$:\Longleftrightarrow$ *f ist messbar und $f(X)$ ist endlich.*

$\Longleftrightarrow$ *Es existieren messbare, paarweise disjunkte Mengen $M_1, \dots, M_k$, so dass $X = \dot{\bigcup}_{i=1}^k M_i$, so dass $f|_{M_i}$ konstant.*

Eine Treppenfunktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ (also eine Funktion, die die Werte $\pm\infty$ nicht annimmt) nennt man eine **reelle Treppenfunktion**.

Satz 2.9. *$f\colon X \to [0,\infty]$ ist genau dann messbar, wenn es eine Folge $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen gibt, so dass $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots \leq \varphi_n \leq \dots \leq f$, $f = \sup \varphi_j$. Man kann hier sogar reelle Treppenfunktionen wählen.*

Beweis:
„$\Longleftarrow$“ bekannt, siehe Proposition 2.7 (6).

„$\Longrightarrow$“:

$$\varphi_j(x) := \begin{cases} j, & \text{falls } f(x) \geq j \\ \lfloor 2^j f(x) \rfloor / 2^j, & f(x) < j. \end{cases}$$

φ_j Treppenfunktion, insbesondere messbar
$\varphi_j \to f$ für $j \to \infty$ punktweise,
$\varphi_{j+1} \geq \varphi_j \geq 0$.
Die so erhaltenen Treppenfunktionen sind reell. ■

3 Maße

3.1 Maßräume

Definition 3.1. *Ein* **Maß** *auf einem Messraum* $(X, \mathcal{M})$ *ist eine Abbildung*

$$\mu \colon \mathcal{M} \to [0, \infty]$$

mit den folgenden Eigenschaften

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) *Ist* $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *eine Familie von messbaren, paarweise disjunkten Mengen, so gilt:*

$$\mu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j\Big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(B_j)$$

Diese Eigenschaft nennt man σ-Additivität.

Man nennt $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *einen* **Maßraum**. *Das Maß* μ *heißt* **endliches Maß**, *falls* $\mu(X) < \infty$. *Das Maß* μ *wird* **σ-endlich** *genannt, wenn es ein Familie messbarer Mengen* $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *gibt mit* $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = X$ *und* $\forall j \in \mathbb{N} : \mu(A_j) < \infty$. *Das Maß* μ *heißt* **Wahrscheinlichkeitsmaß**, *falls* $\mu(X) = 1$.

Wdh: Konvention.

$$\infty + a = a + \infty = \infty \quad \forall a \geq 0$$

Jede Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *mit* $a_j \in [0, \infty]$ *konvergiert in* $[0, \infty]$, *und der Wert ändert sich nicht unter beliebigen Umordnungen oder Doppelreihenbildungen. Es gilt* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \infty$ *genau dann, wenn* $a_j = \infty$ *für mindestens ein* $j \in \mathbb{N}$ *oder wenn die Reihe* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$, *mit* $a_j \in [0, \infty)$ *nicht in* $\mathbb{R}$ *konvergiert.*

Beispiele 3.2.

(1) $p \in X$. Für $A \in \mathcal{M}$ definiere das **Diracmaß** als

$$\delta_p(A) = \begin{cases} 1, & \text{falls } p \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(2) Das Zählmaß ζ. Sei $A \in \mathcal{M}$

$$\zeta(A) = \begin{cases} \#A, & \text{falls } A \text{ endlich,} \\ \infty, & \text{falls } A \text{ unendlich.} \end{cases}$$

Eigenschaften 3.3.

(1) *Additivität:* Sei $B_1, B_2 \in \mathcal{M}$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

$$\mu(B_1 \cup B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2)\,.$$

Setze $B_n := \emptyset$ für $n \geq 3$ in der σ-Additivität (b).

(2) Für $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ gilt:

$$\begin{aligned}\mu(A_1 \cup A_2) &= \mu(A_1 \setminus A_2) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \mu(A_1 \cap A_2) \\ &= \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2)\,.\end{aligned}$$

Begründung: Wende Additivität auf $A_1 \cup A_2 = A_1 \dot{\cup} (A_2 \setminus A_1)$ und auf $A_1 = (A_1 \setminus A_2) \dot{\cup} (A_1 \cap A_2)$ an.

(3) *Monotonie:* $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$, denn

$$\mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq \mu(A).$$

(4) *σ-Subadditivität:* Seien $A_i \in \mathcal{M}, i \in \mathbb{N}$, dann

$$\mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i),$$

denn $B_1 := A_1$, $B_n := A_n \setminus \big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\big)$, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, B_i paarweise disjunkt.

$$\mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) = \mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\Big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{\mu(B_i)}_{\leq \mu(A_i)} \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i).$$

(5) Sind $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \ldots X$ messbar. Dann

$$\mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j),$$

wobei $B_1 := A_1$; $B_n := A_n \setminus \big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\big)$. Wende (b) an.

3.2 Äußere Maße

Definition 3.4. *Sei $\mathcal{N}$ eine σ-Algebra auf X.*
Ein **äußeres Maß** *auf $(X, \mathcal{N})$ ist eine Funktion $\mu^* : \mathcal{N} \to [0, \infty]$, so dass*

(a) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(b) (Monotonie.) *Wenn $A, B \in \mathcal{N}$ mit $A \subset B$, dann $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,*

(c) (σ-Subadditivität.) *Sei $A_i \in \mathcal{N}$ für $i \in \mathbb{N}$, dann*

$$\mu^*\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu^*(A_i).$$

Jedes Maß ist ein äußeres Maß.

Im folgenden wird vor allem $\mathcal{N} = \mathcal{P}(X)$ wichtig sein.

Wir nennen $A \in \mathcal{N}$ **μ^*-messbar**, falls für alle $Z \in \mathcal{N}$ gilt:

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \setminus A) + \mu^*(Z \cap A) \tag{3.1}$$

Lemma 3.5 (Carathéodory)**.** *Ist μ^* ein äußeres Maß auf $(X, \mathcal{N})$. Definiere*

$$\mathcal{M} := \{A \in \mathcal{N} \mid A \text{ ist } \mu^*\text{-messbar}\}.$$

Dann ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra auf X und μ^* ist ein Maß auf $\mathcal{M}$.

Beweis:

(1) Sei $A = \emptyset$. Für alle $Z \in \mathcal{N}$ gilt: $\mu^*(\underbrace{Z \setminus A}_{Z}) + \mu^*(\underbrace{Z \cap A}_{\emptyset}) = \mu^*(Z)$. Hieraus folgt $\emptyset \in \mathcal{M}$.

(2) Sei $A = X$. Für alle $Z \in \mathcal{N}$ gilt: $\underbrace{\mu^*(\underbrace{Z \setminus X}_{\emptyset})}_{=0} + \mu^*(\underbrace{Z \cap X}_{Z}) = \mu^*(Z)$. Hieraus folgt $X \in \mathcal{M}$.

(3) Sei $A \in \mathcal{M}$, $B := X \setminus A$. Für alle $Z \in \mathcal{N}$ gilt

$$\mu^*(Z) = \mu^*(\underbrace{Z \cap A}_{Z \setminus B}) + \mu^*(\underbrace{Z \setminus A}_{Z \cap B}).$$

Hieraus folgt $B \in \mathcal{M}$.

(4) Seien $A, B \in \mathcal{M}$. Wir zeigen $A \cap B \in \mathcal{M}$. Gegeben sei $W \in \mathcal{N}$. Da A μ^*-messbar ist, gilt

$$\mu^*(W) = \mu^*(W \cap A) + \mu^*(W \setminus A).$$

Ersetze hierzu Z durch W in (3.1). Da B μ^*-messbar ist, gilt

$$\mu^*(W \cap A) = \mu^*(W \cap A \cap B) + \mu^*((W \cap A) \setminus B).$$

Ersetze hierzu A durch B und Z durch $W \cap A$ in (3.1). Es folgt

$$\mu^*(W) = \mu^*(W \setminus A) + \mu^*(W \cap A \cap B) + \mu^*((W \cap A) \setminus B).$$

Da A μ^*-messbar, gilt

$$\mu^*(W \setminus (A \cap B)) = \mu^*(\underbrace{(W \setminus (A \cap B)) \cap A}_{(W \cap A) \setminus B}) + \mu^*((\underbrace{(W \setminus (A \cap B)) \setminus A}_{W \setminus A}).$$

Ersetze hierzu Z durch $W \setminus (A \cap B)$ in (3.1).

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \mu^*(W) = \mu^*(W \cap A \cap B) + \mu^*(W \setminus (A \cap B)) \quad \forall W \in \mathcal{N} \\ &\Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

(5) Aus $A, B \in \mathcal{M}$ folgt $A \cup B \in \mathcal{M}$. Denn $A \cup B = X \setminus ((X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

(6) Seien $A, B \in \mathcal{M}$ mit $A \cap B = \emptyset$. Da A μ^*-messbar ist, folgt für alle $Z \in \mathcal{N}$:

$$\mu^*(Z \cap (A \cup B)) = \mu^*(\underbrace{(Z \cap (A \cup B)) \setminus A}_{Z \cap B}) + \mu^*(\underbrace{Z \cap (A \cup B) \cap A}_{Z \cap A}).$$

(7) Durch Induktion folgt nun: Sind $B_1, \dots, B_n$ paarweise disjunkte Mengen in $\mathcal{M}$, so haben wir $B_1 \cup \dots \cup B_n \in \mathcal{M}$, und es gilt für alle $Z \in \mathcal{N}$:

$$\mu^*(Z \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i)) = \mu^*(Z \cap B_1) + \dots + \mu^*(Z \cap B_n). \tag{3.2}$$

Fr 20.12.

(8) Sei nun $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Familie paarweiser disjunkter Mengen in $\mathcal{M}$. Definiere $B := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$. Es gilt dann wegen (7) inklusive Gleichung (3.2) und der Monotonie für alle $Z \in \mathcal{N}$:

$$\begin{aligned}
\mu^*(Z) &\overset{(7)}{=} \mu^*(Z \cap (B_1 \cup \dots \cup B_n)) + \mu^*(Z \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_n)) \\
&\overset{(3.2)}{=} \mu^*(Z \cap B_1) + \dots + \mu^*(Z \cap B_n) + \mu^*(Z \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_n)) \\
&\overset{\text{Mon.}}{\geq} \mu^*(Z \cap B_1) + \dots + \mu^*(Z \cap B_n) + \mu^*(Z \setminus B)\,.
\end{aligned}$$

Es folgt im Limes $n \to \infty$:

$$\mu^*(Z) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap B_i) + \mu^*(Z \setminus B)\,. \tag{3.3}$$

Wir wenden nun[6] die σ-Subadditivität für $A_1 := Z \cap B$, $A_2 := Z \setminus B$, und $A_n := \emptyset$ für $n \geq 3$ an und erhalten:

$$\mu^*(Z) = \mu^*\big((Z \cap B) \cup (Z \setminus B)\big) \leq \mu^*(Z \cap B) + \mu^*(Z \setminus B)$$

Nun wenden wir die σ-Subadditivität für $A_n := Z \cap B_n$ für $n \geq 1$ an und erhalten:

$$\mu^*(Z \cap B) = \mu^*\Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (Z \cap B_i)\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap B_i)\,.$$

Es folgt insgesamt

$$\begin{aligned}
\mu^*(Z) &\leq \mu^*(Z \cap B) + \mu^*(Z \setminus B) \\
&\leq \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap B_i)\Big) + \mu^*(Z \setminus B) \\
&\overset{3.3}{\leq} \mu^*(Z)
\end{aligned}$$

Also gilt überall Gleichheit, insbesondere:

$$\mu^*(Z) = \mu^*(B \cap Z) + \mu^*(Z \setminus B)\,.$$

Somit ist $B \in \mathcal{M}$ gezeigt. Also folgt mit Bemerkung 2.2, dass $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra ist.

[6] An dieser Stelle wollte ich das Argument in der Vorlesung vereinfachen, was aber leider das Gegenteil bewirkte.

(9) Gegeben seien paarweise disjunkte $B_i \in \mathcal{M}$, $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \mu^*(B_i) &\overset{(7)\text{ für } Z=X}{=} \mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\Big) \\ &\leq \mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i)\end{aligned}$$

Im Grenzwert $n \to \infty$ gilt dann:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i) \leq \mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i).$$

Wir haben also die σ-Additivität gezeigt. ■

3.3 Der Satz von Hahn über Maßerweiterungen

Definition 3.6. *Ein* **Ring** *oder* **Mengenring** $\mathcal{R}$ *auf* X *ist eine Teilmenge* $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$*, falls*

(i) $\emptyset \in \mathcal{R}$

(ii) *Wenn* $A, B \in \mathcal{R}$*, dann* $A \setminus B \in \mathcal{R}$

(iii) *Wenn* $A, B \in \mathcal{R}$*, dann* $A \cup B \in \mathcal{R}$

Man nennt $\mathcal{R}$ *eine* **Algebra** *oder* **Mengenalgebra** *auf* X*, falls zusätzlich* $X \in \mathcal{R}$ *gilt. Dies bedeutet:* $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ *ist eine Algebra, wenn* (i), (iii) *und folgendes* (Alg-ii) *gilt:*

(Alg-ii) *Wenn* $B \in \mathcal{R}$*, dann* $X \setminus B \in \mathcal{R}$.

Ist $\mathcal{R}$ *ein Ring auf* X*, so heißt* $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ *ein* **Prämaß** *auf* X*, falls*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$

(b) (σ-Additivität.) *Ist* $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *eine Familie paarweise disjunkter Elemente von* $\mathcal{R}$ *und ist* $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \in \mathcal{R}$*, dann gilt auch*

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i).$$

Ein Prämaß μ *auf* X *heißt* **σ-endlich**, *falls es eine Folge* $S_i \in \mathcal{R}$ *gibt mit* $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ *und* $\mu(S_i) < \infty$.

$A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$.

$\mathcal{M}$ σ-Algebra $\Longrightarrow$ $\mathcal{M}$ Algebra $\Longrightarrow$ $\mathcal{M}$ Ring.

$\mathcal{M}$ Ring $\not\Longrightarrow$ $\mathcal{M}$ Algebra $\not\Longrightarrow$ $\mathcal{M}$ σ-Algebra.

Jedes Maß ist ein Prämaß.

Beispiele 3.7.

(1) Sei $\mathcal{R} = \{A \subset \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : \exists I_1, \dots, I_k, ; A = \bigcup_{i=1}^k I_i\}$, wobei $I_1, \dots, I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ beschränkte Intervalle sind. Dann ist $\mathcal{R}$ ein Ring, aber keine Algebra, weil $\mathbb{R} \notin \mathcal{R}$.

(2) Für $\mathcal{R}$ aus (1) gilt $\mathcal{M}(\mathcal{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Für $A \in \mathcal{R}$ definiere

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

χ_A ist (uneigentlich) Riemann-integrierbar, $\mu(A) := \int_{-\infty}^{\infty} \chi_A(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \chi_A(x)\,dx$ für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $A \subset [-a, a]$. Wir erhalten eine Funktion $\mu \colon \mathcal{R} \to [0, \infty)$ mit

(a) $\mu(\emptyset) = 0\,,$

(b_2) *(endliche bzw. binäre Additivität.)* Seien $A, B \in \mathcal{R}$, $A \cap B = \emptyset\,.$

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$$

$$\Longrightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Es folgt: $A, C \in \mathcal{R}, A \subset C$, impliziert

$$\mu(C) = \mu(A) + \underbrace{\mu(C \setminus A)}_{\geq 0} \geq \mu(A)\,.$$

(Begründung: Setze $B := C \setminus A$ und wende obiges an).

(b) *(σ-Additivität[7].)* Sei $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Familie paarweiser disjunkter Teilmengen auf X, mit $\forall i \in \mathbb{N} : B_i \in \mathcal{R}$. Sei $B := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \mathcal{R}$. Wir definieren

$$C_k := \bigcup_{i=k+1}^{\infty} B_i = B \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B_i \in \mathcal{R}\,.$$

Dann haben wir $C_{k+1} \subset C_k$ und

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = B \setminus \Big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{k} B_i \Big) = B \setminus B = \emptyset\,.$$

Durch mehrfaches Anwenden von (b_2) erhalten wir

$$\mu(B) = \mu(C_k \cup \bigcup_{i=1}^{k} B_i) = \mu(C_k) + \sum_{i=1}^{k} \mu(B_i)\,.$$

Wir wollen die σ-Additivität

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \mu(B)$$

zeigen und dies ist dann äquivalent zu $\lim_{k \to \infty} \mu(C_k) = 0$.

[7] Dieser Teil wurde nach der Vorlesung etwas vereinfacht.

Um dies zu zeigen, sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu C_k wähle nun eine kompakte Menge $D_k \subset C_k$ mit $D_k \in \mathcal{R}$ und $\mu(C_k \setminus D_k) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$. Um solch ein D_k zu erhalten, kann man endliche Vereinigungen kompakter Intervalle in C_k wählen.[8] Für

$$E_k := D_1 \cap \cdots \cap D_k \subset C_k\,.$$

haben wir

$$\begin{aligned} E_{k+1} &\subset E_k \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k &\subset \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \emptyset \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_1 \setminus E_k) &= E_1 \setminus \emptyset = E_1\,. \end{aligned}$$

wobei $E_1 \setminus E_k$ offen in E_1. Also ist $(E_1 \setminus E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von E_1. Da $E_1 = D_1$ kompakt ist, gibt es wegen der Heine-Borel-Eigenschaft ein $\ell \in \mathbb{N}$, so dass

$$(E_1 \setminus E_1) \cup \underbrace{(E_1 \setminus E_2)}_{\subset E_1 \setminus E_\ell} \cup \cdots \cup (E_1 \setminus E_\ell) = E_1$$

Es folgt $E_1 = E_1 \setminus E_\ell$ und schließlich $E_\ell = \emptyset$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} C_k \setminus E_k &= \bigcup_{i=1}^{k} (C_k \setminus D_i) \subset \bigcup_{i=1}^{k} (C_i \setminus D_i) \\ \mu(C_k \setminus E_k) &\leq \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{k} (C_i \setminus D_i)\Big) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\mu(C_i \setminus D_i)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2^i}} \leq \varepsilon \cdot 1 \end{aligned}$$

Für das obige ℓ erhalten wir somit $\mu(C_\ell) \leq \varepsilon$. Hierdurch ist $\lim_{k\to\infty} \mu(C_k) = 0$ gezeigt.

Also ist μ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$, genannt das (1-dimensionale) **Lebesguesche Prämaß.** Das Prämaß μ ist σ-endlich, $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,\infty]$ hat nur endliche Werte (in anderen Worten: $\mu(\mathcal{R}) \subset \mathbb{R}$), ist aber nicht beschränkt.

Lemma 3.8. *Sei μ ein Prämaß auf $(X, \mathcal{R})$, wobei $\mathcal{R}$ ein Ring auf X ist. Zu $Y \in \mathcal{P}(X)$ definiere*

$$\mu^*(Y) := \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \mid (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \textit{ Familie in } \mathcal{R} \textit{ mit } \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \supset Y \Big\}.$$

Dann ist $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ ein äußeres Maß auf $(X, \mathcal{P}(X))$ und $\mu^*(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{R}$.

Di 7.1.

Beweis:

[8] Man muss dazu folgendes überlegen: Sei I ein offenes oder halboffenes nichtleeres Intervall, das beschränkt ist, also $I = (a,b)$ oder $I = [a,b)$ oder $I = (a,b]$ mit $a < b$. Für $\delta < (b-a)/2$ kann man die kompakte Menge $K = [a+\delta, b-\delta]$ wählen und es gilt dann $\mu(I \setminus K) = 2\delta$. Dies löst den Fall, dass C_k ein Intervall ist, falls wir $\delta = \epsilon/2^{k+1}$ setzen. Im allgemeinen ist C_k eine endliche Vereinigung von Intervallen $I_1, \ldots, I_\ell$, denn es gilt ja $C_k \in \mathcal{R}$. Wähle in diesem Fall wie oben $K_i \subset I_i$ mit $\mu(I_i \setminus K_i) < \epsilon/(\ell 2^k)$.

(1) Für $Y \in \mathcal{R}$ gilt

$$Y \subset Y \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots \cup \cdots = Y,$$

wobei $A_1 := Y$, $A_2 := \emptyset$, $\ldots A_i := \emptyset$, $\ldots$. Dann folgt

$$\mu^*(Y) \leq \mu(Y).$$

Es gelte nun $Y \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ mit $Y, A_i \in \mathcal{R}$ beliebig mit

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i) \leq \mu^*(Y) + \varepsilon,$$

mit $\varepsilon > 0$. Wegen $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{(Y \cap A_i)}_{\in\mathcal{R}} \in \mathcal{R}$, folgt

$$\begin{aligned}
\mu(Y) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(Y \cap A_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \\
&\leq \mu^*(Y) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Im Limes $\varepsilon \to 0$ folgt $\mu(Y) \leq \mu^*(Y)$.

Also $\mu^*(Y) = \mu(Y)$ für alle $Y \in \mathcal{R}$.

(2) (a) $\mu^*(\emptyset) = 0$ klar.

(b) $A \subset B \Longrightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ klar.

(c) Seien $C_k \in \mathcal{P}(X)$, $k \in \mathbb{N}$ gegeben und $\varepsilon > 0$. Wähle $A_{k,i} \in \mathcal{R}$ mit $C_k \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_{k,i}$ mit

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_{k,i}) \leq \mu^*(C_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\,.$$

Wähle Bijektion $r\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Also

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_{k,i} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_{r(j)}\,.$$

Auf Grund der Definition von $\mu^*(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k)$ als Infimum gilt:

$$\begin{aligned}
\mu^*\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\Big) &\leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_{r(j)}) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_{k,i})\Big) \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \big(\mu^*(C_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\big) \\
&= \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(C_k)\Big) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Im Limes $\varepsilon \to 0$ erhalten wir

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\Big) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(C_k)\,.$$

Also ist μ^* ein äußeres Maß. ■

Satz 3.9. *[Über die Fortsetzung von Prämaßen zu Maßen, Satz von Hahn] Sei $\mathcal{R}$ ein Ring auf X und $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,\infty]$ ein Prämaß auf $(X,\mathcal{R})$.*

(1) *Dann gibt es mindestens ein Maß auf $\tilde{\mu}\colon \mathcal{M}(\mathcal{R},X) \to [0,\infty]$ mit*

$$\tilde{\mu}|_{\mathcal{R}} = \mu.$$

(2) *Ist μ σ-endlich, dann gibt es genau ein solches Maß.*

Beweis:

(1) Definiere das äußere Maß $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ wie in Lemma 3.8. Definiere $\mathcal{M} := \mathcal{M}_{\mu^*}$ wie in Lemma 3.5 von Carathéodory. Dann ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra. Es folgt, dass

$$\mu^*|_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{M} \to [0,\infty]$$

ein Maß ist.

Wir zeigen nun: $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$.

Sobald dies gezeigt ist, haben wir $\mathcal{M}(\mathcal{R},X) \subset \mathcal{M}$, und daraus folgt, dass

$$\tilde{\mu} := \mu^*|_{\mathcal{M}(\mathcal{R},X)} = (\mu^*|_{\mathcal{M}})|_{\mathcal{M}(\mathcal{R},X)}$$

ein Maß ist.

Sei $A \in \mathcal{R}$, $Z \in \mathcal{P}(X)$. Zu prüfen ist

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \setminus A) + \mu^*(Z \cap A)\,.$$

(a) Zunächst haben wir

$$\mu^*(Z) \leq \mu^*(Z \setminus A) + \mu^*(Z \cap A) \tag{3.4}$$

wegen der σ-Subadditivität.

(b) Wähle $A_i \in \mathcal{R}$ mit $Z \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ mit

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu^*(Z) + \varepsilon.$$

Es gilt dann $Z \setminus A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(A_i \setminus A)$ und $Z \cap A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(A \cap A_i)$.

$$\mu^*(Z \setminus A) + \mu^*(Z \cap A) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i \setminus A) + \sum_{i\in\mathbb{N}}(A_i \cap A)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{(\mu(A_i \setminus A) + \mu(A_i \cap A))}_{\mu(A_i)} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i) \\
&\leq \mu^*(Z) + \varepsilon
\end{aligned}
$$

Im Limes $\varepsilon > 0$ folgt

$$\mu^*(Z \setminus A) + \mu^*(Z \cap A) \leq \mu^*(Z)\,.$$

Also folgt mit (3.4), dass A μ^*-messbar ist. In anderen Worten $A \in \mathcal{M}$. Somit $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$, und $\tilde{\mu} := \mu^*$ hat die geforderten Eigenschaften.

(2) Sei $\tilde{\mu} = \mu^*|_{\mathcal{M}(\mathcal{R},X)}$ das in Teil (1) definierte Maß, und sei ν ein weiteres Maß auf $\mathcal{M}(\mathcal{R}, X)$ mit $\nu|_{\mathcal{R}} = \mu$.

Sei $S_i \in \mathcal{R}$ mit $\tilde{\mu}(S_i) < \infty$ und $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i$. O. B. d. A. können wir $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \cdots$ annehmen. Sei nun $Y \in \mathcal{M}(\mathcal{R}, X)$.

(a) Fixiere $i \in \mathbb{N}$, $B = Y \cap S_i \subset \mathcal{M}(\mathcal{R}, X)$.

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mu}(B) \quad &:= \quad \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \mid A_i \in \mathcal{R}, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset B \Big\} \\
&= \quad \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) \mid A_i \in \mathcal{R}, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset B \Big\} \\
&\overset{\sigma\text{-Subaddit.}}{\geq} \quad \inf\Big\{ \nu\big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\big) \mid A_i \in \mathcal{R}, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset B \Big\} \\
&\overset{\nu \text{ monoton}}{\geq} \quad \nu(B)
\end{aligned}
$$

$$\implies \quad \nu(B) \quad \leq \quad \tilde{\mu}(B)$$

Definiere $C := S_i \setminus Y$. Analog zeigt man, dass $\nu(C) \leq \tilde{\mu}(C)$.

$$
\begin{aligned}
\mu(S_i) &= \nu(S_i) \\
&= \nu(B) + \nu(C) \\
&\leq \tilde{\mu}(B) + \nu(C) \\
&\leq \tilde{\mu}(B) + \tilde{\mu}(C) \\
&= \tilde{\mu}(S_i) \\
&= \mu(S_i) < \infty
\end{aligned}
$$

Überall Gleichheit und alle Terme sind endlich. Also

$$\nu(B) = \tilde{\mu}(B)\,.$$

(b) $Y = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(Y \cap S_i)$.

$$\nu(Y) \overset{\text{Eig. 3.3 (5)}}{=} \lim_{i\to\infty} \underbrace{\nu(Y \cap S_i)}_{\tilde{\mu}(Y\cap S_i)} \overset{\text{Eig. 3.3 (5)}}{=} \tilde{\mu}(Y).$$

■

Zusammenfassung 3.10.

Wie bekomme ich ein Maß?

(1) Definiere Prämaß μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ auf X.

(2) Bilde das äußere Maß $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$.

$A \subset X$ heißt μ^*-messbar, falls

$$\forall Z \in \mathcal{P}(X) : \mu^*(Z) = \mu^*(Z \setminus A) + \mu^*(Z \cap A).$$

(3) $\mathcal{M}_{\mu^*} = \{A \subset X \mid A\ \mu^*\text{-messbar}\}$ ist eine σ-Algebra, $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$. Weiter ist $\mu^*|_{\mu^*}$ ein Maß auf $(X, \mathcal{M}_{\mu^*})$; $\mu^*|_{\mathcal{R}} = \mu$.
!ACHTUNG!. *Oft gilt*

$$\mathcal{M}(\mathcal{R}, X) \subsetneqq \mathcal{M}_{\mu^*},$$

es gilt aber immer: $\mathcal{M}(\mathcal{R}, X) \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$.

3.4 Der Lebesgue-Borelsche Maßraum

Definition 3.11.

(1) *Auf* $\mathbb{R}$ *definieren wir wie in Beispiele 3.7* $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,\infty]$ *das Lebesguesche Prämaß, wobei*

$$\mathcal{R} = \{\text{ endliche Vereinigung von beschränkten Intervallen}\}$$

ein Ring ist. Wir erhalten ein Maß auf $\mathcal{M}(\mathcal{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. *Es heißt das* **1-dimensionale Lebesgue-Borelsche Maß** $\lambda_1^B\colon \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,\infty]$.
Andererseits gilt folgendes (ohne Beweis:) Es gibt Mengen $A \subset \mathbb{R}$, $(\lambda_1^B)^*(A) = 0$, *aber* $A \notin \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
Dann für $Z \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}(\lambda_1^B)^*(Z) &\le \underbrace{(\lambda_1^B)^*(Z \setminus A)}_{\le(\lambda_1^B)^*(Z)} + \underbrace{(\lambda_1^B)^*(Z \cap A)}_{\le(\lambda_1^B)^*(A)=0} \\ &\le (\lambda_1^B)^*(Z).\end{aligned}$$

Also ist A $(\lambda_1^B)^*$*-messbar,* $A \in \mathcal{M}_{(\lambda_1^B)^*} \setminus \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

(2) *Auf* $\mathbb{R}^n$ *kann man das Volumen von (achsenparallelen, endlichen) Quadern definiere*

$$\lambda_n(I_1 \times \cdots \times I_n) = \lambda_1(I_1) \cdot \dots \cdot \lambda_1(I_n),$$

$I_1, \dots, I_n$ *beschreiben beschränkte Intervalle.*

Sei $\mathcal{R}$ der Ring der endlichen Vereinigungen von solchen Quadern. Dann ist λ_n ein Prämaß auf $\mathcal{R}$. Somit setzt sich λ_n eindeutig zu einem Maß auf $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ fort, dem sogenannten **n-dimensionalen Lebesgue-Borelschen Maß** $\lambda_n^B \colon \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \to [0,\infty]$.
Man sieht mit Übungsblatt 11: die σ-Algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ ist das n-fache Produkt von $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ wie in Aufgabe 3 (a) und Aufgabe 4 (c) dieses Übungsblatts beschrieben[9].

Fr 10.1.

3.5 Nullmengen und Vollständigkeit

Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, μ^* das zugehörige äußere Maß.

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &\overset{\text{(def)}}{=} \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in \mathcal{M}\Big\} \\
&= \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in \mathcal{M} \text{ paarw. disj.}\Big\} \\
&= \inf\Big\{\mu\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in \mathcal{M} \text{ paarw. disj.}\Big\} \\
&= \inf\{\mu(B) \mid A \subset B, B \in \mathcal{M}\}
\end{aligned}$$

Dieses Infimum wird angenommen. Denn sei $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{M}$ mit $A \subset B_i$ und $\lim_{i\to\infty} \mu(B_i) = \mu^*(A)$. Dann gilt auch

$$A \subset C := \bigcap_{j\in\mathbb{N}} B_j \subset B_i \text{ und } C \in \mathcal{M}\,.$$

Es folgt $\mu^*(A) \le \mu(C) \le \mu(B_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und somit $\mu^*(A) = \mu(C)$. Wir haben also

$$\mu^*(A) \quad = \quad \min\{\mu(B) \mid A \subset B, B \in \mathcal{M}\}\,.$$

Ein $B \in \mathcal{M}$ mit $A \subset B$ und $\mu^*(A) = \mu(B)$ nennt sich eine **messbare Hülle** von A. Sie ist im allgemeinen nicht eindeutig. Im Fall $A \in \mathcal{M}$ ist A eine messbare Hülle von sich selbst.

Definition 3.12. *Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, μ^* das zugehörige äußere Maß.*

(1) *Wir nennen*

$$\begin{aligned}
& N \subset X \text{ eine } \textbf{Nullmenge} \text{ von } (X, \mathcal{M}, \mu) \text{ oder } \mu\textbf{-Nullmenge} \\
:\Longleftrightarrow\ & \mu^*(N) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \exists B \in \mathcal{M},\ \mu(B) = 0,\ N \subset B\,.
\end{aligned}$$

(2) *Ein Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ heißt* **vollständig**, *falls alle Nullmengen messbar sind.*

Jede Nullmenge N ist μ^*-messbar, denn es gilt für beliebiges $Z \subset X$:

$$\mu^*(Z) \le \underbrace{\mu^*(Z \cap N)}_{=0} + \mu^*(Z \setminus N) \le \mu^*(Z)$$

[9] Genauer: Man wende Aufgabe 4 (c) für $X_i := \mathbb{R}$, $I := \{1, 2, \ldots, n\}$ und $\mathcal{M}_i := \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ an, dann ist $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{M}_X$.

und somit gilt überall Gleichheit. Nullmengen sind also immer μ^*-messbar. Sie sind aber nicht immer messbar[10].

Beispiele 3.13.

(1) $p \in X$, $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra auf X, $\mu = \delta_p$ das Diracmaß wie in Beispiel 3.2 (1).

Dann ist $A \subset X$ Nullmenge genau dann, wenn $p \notin A$. Jede Teilmenge A von X ist also entweder eine Teilmenge (nämlich, wenn $p \notin A$) oder das Komplement einer Nullmenge (nämlich, wenn $p \in A$).

(2) Offensichtlich gilt: Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen. Endliche oder abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.

(3) Abzählbare Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, sind Nullmengen bzgl. des Lebesgue-Borelschen Maßes λ_n^B. Denn: Für $P = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\{p\} = [p_1, p_1] \times \cdots \times [p_n, p_n], \qquad \lambda_n^B(\{p\}) = 0.$$

Die Behauptung folgt nun aus der σ-Additivität.

(4) $\mathbb{R}^d \times \{0\}$, $d < n$ ist eine Nullmenge in $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \lambda_n^B)$: hierzu schreiben wir

$$\mathbb{R}^d \times \{0\} = \bigcup_{n_1 \in \mathbb{Z}} \cdots \bigcup_{n_d \in \mathbb{Z}} [n_1, n_1 + 1) \times \cdots \times [n_d, n_d + 1) \times \{0\}\,.$$

Aus $\lambda_n^B([n_1, n_1+1) \times \cdots \times [n_d, n_d+1) \times \{0\}) = 1^d \cdot 0^{n-d} = 0$ und der σ-Additivität folgt, dass $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ eine Nullmenge ist. Analoges gilt für andere achsenparallele echte Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$.[11]

(5) Ist V ein echter[12] Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$, dann ist V eine Nullmenge bzgl. λ_n^B.
Dies folgt aus dem obigen Beispiel zusammen mit Satz 3.21.

Proposition 3.14. *Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, μ^* das zugehörige äußere Maß. Für $A \subset X$ sind äquivalent:*

(1) *es gibt ein $B \in \mathcal{M}$ und eine Nullmenge N, so dass $A = B \cup N$,*

(2) *es gibt ein $B \in \mathcal{M}$ und eine Nullmenge N, so dass $A = B \setminus N$,*

(3) *es gibt ein $B \in \mathcal{M}$ und Nullmengen N_1, N_2, so dass $A \cup N_1 = B \cup N_2$.*

Aus jeder dieser Bedinungen folgt

(4) *A ist μ^*-messbar.*

Beweis:
„(1)$\Longrightarrow$(3)“ und „(2)$\Longrightarrow$‘(3)“ sind trivial ($N_1 := \emptyset$ und $N_2 := N$ bzw. $N_1 := N \cap B$ und $N_2 := \emptyset$.
„(3)$\Longrightarrow$(1)“: Bestimme eine Menge $Y \in \mathcal{M}$ mit $N_1 \subset Y$ und $\mu(Y) = 0$. Sei $N_1' := N_1 \setminus A$. Es folgt

[10] Erinnerung: „A messbar„ ohne Zusatz bedeutet „$A \in \mathcal{M}$“
[11] „Echt“ bedeutet hier: „von $\mathbb{R}^n$ verschieden“.
[12] $V \neq \mathbb{R}^n$

$A \cup N_1' = B \cup N_2$ und somit

$$A = \underbrace{(B \setminus Y)}_{\in \mathcal{M}} \cup \underbrace{\big((N_2 \cup (Y \cap A)) \setminus N_1'\big)}_{\text{Nullmenge}} .$$

„(3)$\Longrightarrow$(2)“: Bestimme eine Menge $Y \in \mathcal{M}$ mit $N_2 \subset Y$ und $\mu(Y) = 0$. Sei $N_1' := N_1 \setminus A$ und wir erhalten

$$A = \underbrace{(B \cup Y)}_{\in \mathcal{M}} \setminus \underbrace{\Big(\big(Y \setminus (B \cup N_2)\big) \cup N_1'\Big)}_{\text{Nullmenge}} .$$

„(1)$\Longrightarrow$(4)“: Alle Mengen in $\mathcal{M}$ sind μ^*-messbar. Wie bereits argumentiert, sind Nullmengen immer μ^*-messbar. Da die μ^*-messbaren Mengen eine σ-Algebra bilden, sind dann auch Mengen der Form $B \cup N$ wie in (1) μ^*-messbar. ■

Bemerkung 3.15. Die Implikation „(4)$\Longrightarrow$(1)“ ist richtig, falls μ σ-endlich. Andernfalls gibt es Gegenbeispiele, siehe `https://math.stackexchange.com/questions/1210752/the-completion-of-the-borel-sigma-rq=1`. Achtung: in der Quelle [15, III§ 2, Seite 72 letzte Zeile] wird fälschlicherweise behauptet, dass „(4)$\Longrightarrow$(1)“ immer gilt.

Lemma 3.16. *Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, μ^* das zugehörige äußere Maß.*

$$\mathcal{M}_{\mu^*} := \{\mu^*\text{-messbare Mengen in } X\} .$$

Dann ist $(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \tilde{\mu} := \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}})$ ist ein vollständiger Maßraum.

Beweis: Das Lemma 3.5 von Carathéodory besagt, dass $(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \tilde{\mu})$ ein Maßraum ist. Er ist vollständig, da wir bereits wissen, dass alle μ-Nullmengen μ^*-messbar sind. ■

Definition 3.17. *Sei wieder $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Wir sagen $A \subset X$ ist* **μ-messbar**, *falls (1) in Proposition 3.14 gilt.*

A μ-messbar $\Longrightarrow$ A μ^*-messbar

Die Umkehrung gilt dann, wenn μ σ-endlich ist (siehe obige Bemerkung).

Lemma 3.18. *Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum.*

(1) *Dann ist*

$$\overline{\mathcal{M}} := \{\mu\text{-messbare Mengen in } (X, \mathcal{M})\} .$$

eine σ-Algebra.

(2) *Wir erhalten ein wohldefiniertes Maß $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{M}} \to [0, \infty]$, indem wir für $A = B \cup N$, $B \in \mathcal{M}$, N eine μ-Nullmenge definieren:*

$$\overline{\mu}(A) := \mu(B) .$$

(3) *$(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ ist vollständig*

(4) *Ist $(X, \mathcal{M}_0, \mu_0)$ ein vollständiger Maßraum mit $\mathcal{M}_0 \supset \mathcal{M}$ und $\mu_0|_{\mathcal{M}} = \mu$, dann gilt $\mathcal{M}_0 \supset \overline{\mathcal{M}}$ und $\mu_0|_{\overline{\mathcal{M}}} = \overline{\mu}$.*

In anderen Worten: $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ ist die kleinste vollständige Erweiterung von $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Man nennt sie die **Vervollständigung** von $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Ist μ σ-endlich so gilt $(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \tilde{\mu})$ aus Lemma 3.16 gleich dieser Vervollständigung.

Der Beweis des Lemmas wird nur in der Zentralübung diskutiert, da für die Zwecke dieser Vorlesung der vollständige Maßraum $(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \tilde{\mu})$ ausreichend sein wird.

Beweis:
„(1)“: $\in \overline{\mathcal{M}}$. Ist $A \in \overline{\mathcal{M}}$, so folgt aus Proposition 3.14, dass auch $X \setminus A \in \overline{\mathcal{M}}$ gilt. Die abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist eine Nullmenge, also ist die abzählbare Vereinigung von Element von $\overline{\mathcal{M}}$ wieder in $\overline{\mathcal{M}}$.
„(2)“: Es gelte $A = B \cup N = B' \cup N'$ mit $B, B' \in \mathcal{M}$ und Nullmengen N, N'. Um die Wohldefiniertheit von $\overline{\mu}$ zu beweisen, müssen wir $\mu(B) = \mu(B')$ zeigen. Bestimme $C, C' \in \mathcal{M}$ mit $N \subset C$, $N' \subset C'$ und $0 = \mu(C) = \mu(C')$. Es gilt $B \subset B' \cup C'$ und $B' \subset B \cup C$. Daraus folgt dann

$$\mu(B) \leq \mu(B') + \mu(C') = \mu(B') \quad \text{und} \quad \mu(B') \leq \mu(B) + \mu(C) = \mu(B)\,.$$

Somit ist $\overline{\mu}$ wohl-definiert. Offensichtlich gilt $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$ und die σ-Additivität von $\overline{\mu}$ folgt aus der σ-Additivität von μ.
„(3)“ ist ofensichtlich nach Definition.
„(4)“ $\mathcal{M}_0 \supset \overline{\mathcal{M}}$ folgt unmittelbar aus der Definition von Vollständigkeit. Da μ_0 monoton ist, muss $\mu_0(N) = 0$ für alle Nullmengen gelten. Hieraus folgt $\mu_0|_{\overline{\mathcal{M}}} = \overline{\mu}$. ■

In Zukunft schreiben wir einfach auch μ für das Maß der Vervollständigung. Diese Konvention sollte im praktischen Gebrauch zu keinen Zweideutigkeiten führen.

Definition 3.19. *Sei wieder $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Eigenschaft für $x \in X$ gilt* **fast überall** *oder* **für fast alle** *$x \in X$, falls es eine Nullmenge gibt, so dass die Eigenschaft für alle $x \in X \setminus N$ gilt.*

Beispiel. Sei $X = \mathbb{R}$, versehen mit dem Lebesgue-Borelschen Maß λ_n^B, $A \subset X$.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

die charakteristische Funktion von A. Die Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind Nullmenge. Für fast alle $x \in \mathbb{R}$ gilt also $\chi_{\mathbb{Z}}(x) = 0$ und $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0$.

3.6 Der Lebesguesche Maßraum und die lineare Transformationsformel für λ_n

Definition 3.20. *Die Vervollständigung des n-dimensionalen Lebesgue-Borelschen Maßraums $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \lambda_n^B)$ nennt man den* **Lebesgueschen Maßraum** *$(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}, \lambda_n)$, $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{M}_{(\lambda_n^B)^*}$ ist die* **Lebesguesche σ-Algebra** *und $\lambda_n \colon \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ ist das (n-dimensionale)* **Lebesgue-Maß**. *Im folgenden sagen wir $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ ist* **Lebesgue-messbar**. *Um die Messbarkeit im Borelschen Sinne zu unterscheiden, nennen wir Mengen $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ zumeist* **Borel-messbar**.

„Lebesgue-messbar“ ist also gleichbedeutend zu „λ_n^B-messbar“ und zu „$(\lambda_n^B)^*$-messbar“, und dies wiederum ist äquivalent zu „Borel-messbar bis auf eine Lebesguesche Nullmenge“.

Satz 3.21 (Affin-lineare Maßtransformationsformel für λ_n)**.** *Sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \longmapsto Mx + y$. Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar, so ist $f(A)$ ebenfalls Lebesgue-messbar und es gilt*

$$\lambda_n(f(A)) = |\det M|\, \lambda_n(A)\,. \tag{3.5}$$

Beispiele 3.22.

(1) A Nullmenge, also auch $f(A)$ Nullmenge.

(2) $M \in \mathrm{O}(n)$
$$\lambda_n(A) = \lambda_n(f(A))$$
Das Lebesgue-Maß ist bewegungsinvariant.

(3) Ist f invertierbar, dann ist f^{-1} stetig, also messbar im Borelschen Sinn. Somit bildet dann f Borel-messbare Mengen auf Borel-messbare Mengen ab. Ist f nicht mehr invertierbar, so gibt es Borelsche Mengen A, so dass $f(A)$ nicht Borelsch ist, siehe `https://mathoverflow.net/questions/34142/projection-of-borel-set-from-r2-to-r1`.

(4) Sind $a_1, \dots, a_n$ die Spalten von M, und wenden wir den Satz auf $A = [0,1]^n$ an, so ergibt sich: $\lambda_n([0,1]^n) = 1$. $f(A)$ is das Parallelogramm, das von a_1 bis a_n aufgespannt wird. Dann ist das Lebesgue-Maß (=Volumen) dieses Parallelogramms gleich $|\det(M)|$.

Wir werden den Satz in mehreren Schritten beweisen.

Lemma 3.23 (Translationsinvarianz und Invarianz unter Diagonalmatrizen)**.** *Satz 3.21 gilt im Spezialfall*

$$M := \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_n \end{pmatrix}.$$

Beweis: Gilt $t_i = 0$ für ein i und gilt $y = 0$, so ist nach Beispiel 3.13 (4) $f(\mathbb{R}^n)$ eine Nullmenge und somit ist $f(A)$ für alle $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und somit Lebesgue-messbar. Es gilt dann für $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$

$$0 = \lambda_n(f(A)) = \underbrace{|\det(M)|}_{=0}\, \lambda_n(A)\,.$$

Im Fall $t_i = 0$ und $y \neq 0$ beweist man die Behauptung ganz ähnlich.

Sei nun f invertierbar, und somit f^{-1} affin also stetig. Deswegen bildet f Borel-messbare Mengen auf Borel-messbare Mengen ab. Man prüft leicht, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} &\to [0,\infty] \\ A &\longmapsto \nu_n(A) := \frac{\lambda_n(f(A))}{|\det(M)|} \end{aligned}$$

ein Maß auf $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ ist. Wir wollen zeigen, dass es mit λ_n^B übereinstimmt. Daraus folgt die Formel (3.5)

für Borel-messbare A.

Für ein Intervall $I = [a,b]$, $I = (a,b]$, $I = [a,b)$ oder $I = (a,b)$ mit $a \leq b$ haben wir definiert $\lambda_1(I) = b - a$. Für achsenparallelen Quader $Q = I_1 \times \cdots \times I_n$ haben wir das Lebesguesche Prämaß definiert als

$$\lambda_n(I_1 \times \cdots \times I_n) = \lambda_1(I_1) \cdot \cdots \cdot \lambda_1(I_n)\,.$$

Hieraus folgt unmittelbar für jeden achsenparallelen Quader Q:

$$\lambda_n(f(Q)) = |t_1| \cdot |t_2| \cdots |t_n| \cdot \lambda_n(Q) = |\det(M)|\,\lambda_n(Q)\,. \tag{3.6}$$

Sei $\mathcal{R}$ der Ring der endlichen Vereinigungen von beschränkten achsenparallelen Quadern. Gleichung 3.6 besagt nun, dass die Maße ν_n und λ_n^B auf $\mathcal{R}$ übereinstimmen. Nach der Eindeutigkeitsaussage im Satz 3.9 von Hahn folgt daraus $\nu_n = \lambda_n^B$.

Da Formel (3.5) nun für Borel-messbare bewiesen ist, folgt die Tatsache, dass f Nullmengen auf Nullmengen abbildet. Somit bildet f Lebesgue-messbare Mengen auf Lebesgue-messbare Mengen ab und Formel (3.5) gilt für alle $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$. ■

Zu $y \in \mathbb{R}^n$ definiere die Translation $\tau_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\tau_y(x) = x + y$. Ein Maß μ auf $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ bzw. $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ heißt **translationsinvariant**, falls für alle $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ bzw. $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ und alle $y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\mu(\tau_y(A)) = \mu(A)\,.$$

Insbesondere ist λ_n translationsinvariant.

Lemma 3.24. *Ist μ ein translationsinvariant Maß auf $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ bzw. $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$. Dann gilt*[13]

$$\mu = \mu([0,1)^n)\,\lambda_n = \frac{\mu(B_1(0))}{\lambda_n(B_1(0))}\,\lambda_n\,.$$

Di 14.1.

Beweis: Wir haben die Elementarwürfel definiert als

$$\mathcal{E}_{z,k} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \frac{z_j}{2^k} \leq x \leq \frac{z_j+1}{2^k} \text{ für alle } j \in \{1,\ldots,n\} \right\},$$

$z = (z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{Z}^n$, $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}_0$. Auf Grund der Translationsinvarianz gilt $\mu(\mathcal{E}_{z,k}) = \mu(\mathcal{E}_{\tilde{z},k})$ für $z, \tilde{z} \in \mathbb{Z}^n$, $k \in \mathbb{N}_0$. Auf Grund der σ-Additivität gilt dann $\mu(\mathcal{E}_{z,k}) = 2^{-nk}\mu([0,1)^n)$. Sei $c_0 := \mu([0,1)^n)$.[14] Die Maße μ und $c_0\lambda_n^B$ stimmen somit auf den Elementarwürfeln überein. Da diese die Borel-Algebra erzeugen,[15] gilt $\mu(A) = c_0\lambda_n(A)$ für alle Borel-messbaren Mengen A. Alle λ_n-Nullmengen sind also μ-Nullmengen und die Formel folgt für alle Lebesgue-messbaren Mengen A.

Wegen

$$\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]^n \subset B_1(0) \subset [-1,1]^n$$

[13] In der Vorlesung stand hier $[0,1]^n$ an Stelle von $[0,1)^n$. Der gezeigte Beweis zeigt die Aussage aber für $[0,1)^n$. Sobald wir dies wissen, ist bekannt, dass $[0,1]^n \setminus [0,1)^n$ eine μ-Nullmenge ist. Dadurch folgt die Aussage dann auch in der Form, in der sie an der Tafel stand. Für die folgende Argumentation ist es aber unerheblich, welche Variante der Aussage wir zur Verfügung haben.

[14] $[0,1)^n$ ist die disjunkte Vereinigung von 2^{nk} Elementarwürfeln der Form $\mathcal{E}_{z,k}$.

[15] siehe Beispiele 2.3 (7) (a)

erhalten wir $0 < \lambda_1(B_1(0)) < \infty$. Indem wir den Spezialfall $A = B_1(0)$ in der Gleichung $\mu(A) = c_0\lambda_n(A)$ betrachten, erhalten wir die zweite zu zeigende Gleichung. ■

Korollar 3.25 (Rotationsinvarianz von λ_n und λ_n^B)**.** *Satz 3.21 gilt im Spezialfall $M \in \mathrm{O}(n)$ und $y = 0$.*

Beweis: In diesem Spezialfall gilt $f(B_1(0)) = B_1(0)$. Die Abbildung $A \longmapsto \mu(A) := \lambda_n(f(A))$ definiert ein translationsinvariantes Maß auf $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ bzw. $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$. Wegen $\mu(B_1(0)) = \lambda_n(f(B_1(0))) = \lambda_n(B_1(0))$ gilt dann $\mu = \lambda_n$. Mit $|\det(M)| = 1$ folgt die Behauptung. ■

Beweis von Satz 3.21: (Literatur: [16, III § 2])
Der Beweis ergibt sich nun mit Hilfe der Polarzerlegung von M und der Lemmata 3.23 und 3.25. Wir schreiben dazu

$$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4$$

wobei jedes f_i eine zu bestimmende affin-lineare Abbildung ist, für die wir den Satz schon gezeigt haben. Hieraus folgt der Satz dann für f.

Definiere $f_1(x) := x + y$. Der Satz von der Polarzerlegung aus der LA, siehe `https://de.wikipedia.org/wiki/Polarzerlegung` besagt, dass es eine positiv semi-definite symmetrische Matrix P und eine orthogonale Matrix U gibt, so dass $M = U \cdot P$. Die Matrix P wiederum kann man orthogonal diagonalisieren, das heißt es gibt ein $V \in \mathrm{O}(n)$, so dass $P = VDV^t$ für eine positiv semi-definite symmetrische Diagonalmatrix D. Wir erhalten $M = UVDV^t$. Nun definieren wir $f_2(x) := UVx$, $f_3(x) := Dx$ und $f_4(x) := V^t(x)$. Für diese f_i gilt der Satz bereits. ■

4 Das Lebesgue-Integral

4.1 Lebesgue-Integral von Treppenfunktionen

Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ immer ein Maßraum. Oft schreiben wir einfach X für $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Wenn wir nichts gegenteiliges dazusagen, dann versehen wir $\overline{\mathbb{R}}$ immer der σ-Algebra $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ und $\mathbb{R}$ mit der σ-Algebra

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{A \in \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} \mid A \subset \mathbb{R}\} = \{A \cap \mathbb{R} \mid A \in \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}\}.$$

Wiederholung:

Definition 2.8.
$f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt **(numerische) Treppenfunktion**

$:\Longleftrightarrow$ f ist messbar und $f(X)$ ist endlich. Nimmt eine Treppenfunktion die Werte $\pm\infty$ nicht an, so nennt man sie eine **reelle Treppenfunktion**.

$$a + \infty = \infty \quad \forall a \in (-\infty, \infty]$$
$$a \cdot \pm\infty = \pm\infty \quad \forall a \in (0, \infty]$$

$$0 \cdot \infty = 0$$
$$(-\infty) + (+\infty) \text{ ist nicht definiert}$$

Beispiele 4.1.

(1) Treppenfunktionen in der Definition des Riemann-Integrals

(2) Die charakteristische Funktion $\chi_A \colon X \to \mathbb{R}$ von $A \subset X$

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

ist Treppenfunktion genau dann, wenn $A \in \mathcal{M}$.

(3) Sind f_1, f_2 Treppenfunktionen, $a_1, a_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, dann sind

$$f_1 \cdot f_2$$
$$\max\{f_1, f_2\}$$
$$|f_1|$$

ebenfalls Treppenfunktionen, und $a_1 f_1 + a_2 f_2$ ist eine Treppenfunktion, wenn es wohldefiniert ist.[16]

Notation 4.2. Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Wir definieren

$$\begin{aligned}
M &:= \{\text{(numerische) messbare Funktionen } X \to \overline{\mathbb{R}}\} \\
M_{\mathbb{R}} &:= \{\text{(reelle) messbare Funktionen } X \to \mathbb{R}\} \\
M_e := M_e(\mu) &:= \{f \in M_{\mathbb{R}} \mid \mu\big(f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big) < \infty\} \\
M^+ &:= \{\text{(nicht-negative) messbare Funktionen } X \to [0, \infty]\} \\
M_{\mathbb{R}}^+ &:= M_{\mathbb{R}} \cap M^+ \\
M_e^+ := M_e^+(\mu) &:= M_e(\mu) \cap M^+ \\
T &:= \{\text{(numerische) Treppenfunktionen } X \to \overline{\mathbb{R}}\}
\end{aligned}$$

sowie $T_{\mathbb{R}} := T \cap M_{\mathbb{R}}$, $T^+ := T \cap M^+$, $T_{\mathbb{R}}^+ := T \cap M_{\mathbb{R}}^+$, $T_e := T_e(\mu) := T \cap M_e$ und $T_e^+ := T_e^+(\mu) := T \cap M_e^+$. Die Räume $T_{\mathbb{R}}$, T_e, $M_{\mathbb{R}}$ und M_e sind Vektorräume, die Räume T^+, $T_{\mathbb{R}}^+$, T_e^+, M^+, $M_{\mathbb{R}}^+$ und M_e^+ erlauben eine Addition und eine Multiplikation mit $a \in [0, \infty)$ beziehungsweise $a \in [0, \infty]$.

Definition 4.3 (Lebesgue-Integral für Treppenfunktionen)**.** [17] *Für $f \in T^+$ bzw. $f \in T_e(\mu)$ definiere das* **Integral**

$$\int \colon T^+ \to [0, \infty] \text{ bzw. } \int \colon T_e(\mu) \to \mathbb{R}$$

durch

$$f \longmapsto \int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{k} a_i \, \mu(A_i),$$

[16] Man denke daran, dass wir nicht $+\infty$ und $-\infty$ addieren können. Gibt es zum Beispiel ein $x \in X$ mit $f_1(x) > 0$, $f_2(x) = +\infty$, $a_1 = +\infty$, $a_2 < 0$, dann ist $a_1 f_1 + a_2 f_2$ nicht definiert.

[17] In der Vorlesung behandeln wir nur den Fall $\int \colon T^+(\mu) \to [0, \infty]$, da er bei unserem Zugang ausreicht, aber andere Literatur, z.B. [15] verwendet die andere Version, die zum Beispiel hilfreich ist, wenn man banachraumwertige Funktionen integrieren will.

falls $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$, $a_i \in [0,\infty]$, $A_i \in \mathcal{M}$ *(bzw.* $a_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathcal{M}$ *mit* $\mu(A_i) < \infty$*). Das Integral ist wohldefiniert, denn aus der Additivität des Maßes* μ *folgt mit* $a_i, b_j \in [0,\infty]$, $A_i, B_j \in \mathcal{M}$ *(bzw.* $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $A_i, B_j \in \mathcal{M}$ *mit* $\mu(A_i) < \infty$, $\mu(B_j) < \infty$*):*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i} &= \sum_{j=1}^{\ell} b_j \chi_{B_j} \\ \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} a_i\, \mu(A_i) &= \sum_{j=1}^{\ell} b_j\, \mu(B_j) \end{aligned}$$

$\int : T_e(\mu) \to \mathbb{R}$ ist linear.

$\int : T^+ \to [0,\infty]$ erfüllt die folgende linearitätsartige Bedingung: Für $f, g \in T^+$, $a, b \in [0,\infty]$ gilt

$$\int_X (af + bg)\, \mathrm{d}\mu = a \int_X f\, \mathrm{d}\mu + b \int_X g\, \mathrm{d}\mu\,.$$

Das Integral ist monoton: Für alle $f_1, f_2 \in T^+$ bzw. $T_e(\mu)$ gilt

$$f_1 \le f_2 \Longrightarrow \int_X f_1\, \mathrm{d}\mu \le \int_X f_2\, \mathrm{d}\mu\,.$$

Beispiel 4.4. Im Fall $X = \mathbb{R}$ und $\mu = \lambda_1$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (3\chi_{[0,2]} + 2\chi_{[1,3]})\, \mathrm{d}\lambda_1 &= 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10 \\ \int_{\mathbb{R}} (3\chi_{[0,1)} + 5\chi_{[1,2]} + 2\chi_{(2,3]})\, \mathrm{d}\lambda_1 &= 3 + 5 + 2 = 10 \end{aligned}$$

4.2 Lebesgue-Integral für nicht-negative Funktionen

Definition 4.5 (Lebesgue-Integral für nicht-negative Funktionen)**.** *Sei* $f \in M^+$*. Wähle* $\varphi_i \in T^+$, $j \in \mathbb{N}$ *mit* $0 \le \varphi_1 \le \varphi_2 \le \cdots \le f = \sup_{j\in\mathbb{N}} \varphi_j$ *(Existenz der* φ_j*: Satz 2.9). Definiere*

$$\int_X f\, \mathrm{d}\mu := \lim_{j\to\infty} \int_X \varphi_j\, \mathrm{d}\mu \in [0,\infty].$$

Da $j \longmapsto \int_X \varphi_j\, \mathrm{d}\mu$ *monoton wachsend ist, existiert der Grenzwert in* $[0,\infty]$*.*

Ziel: $\int f\, \mathrm{d}\mu$ hängt nicht von der Wahl der φ_j ab.

Lemma 4.6. *Seien* f, φ_j *wie oben,* $g \in T^+$ *mit* $g \le f$*. Dann gilt*

$$\lim_{j\to\infty} \int_X \varphi_j\, \mathrm{d}\mu \ge \int_X g\, \mathrm{d}\mu.$$

Beweis: Schreibe $g = \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{B_k}$, wobei $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{M}$ paarweise disjunkt, $b_k \in [0,\infty]$. Wähle $\epsilon > 0$. Wir definieren $A_{k,j} := \{x \in B_k \mid \varphi_j(x) \ge (1-\varepsilon) b_k\} \in \mathcal{M}$ und haben dann $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_{k,j} = B_k$

sowie $A_{k,j} \subset A_{k,j+1} \subset \dots$. Dann folgt mit den Eigenschaften 3.3 (5)

$$\mu(B_k) = \mu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_{k,j}\Big) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_{k,j}).$$

$$\begin{aligned}
\int_X \varphi_j \,\mathrm{d}\mu &\geq \int_X \Big((1-\varepsilon)\sum_{k=1}^n b_k \chi_{A_{k,j}}\Big)\,\mathrm{d}\mu \\
&= (1-\varepsilon)\sum_{k=1}^n b_k \underbrace{\mu(A_{k,j})}_{\mu(B_k)} \\
\text{für } j\to\infty: \ \lim_{j\to\infty}\int_X \varphi_j \,\mathrm{d}\mu &\geq (1-\varepsilon)\sum_{k=1}^n b_k \mu(B_k) \\
&\geq (1-\varepsilon)\int_X g \,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

Im Limes $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung. ■

Korollar 4.7. *$\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ in Definition 4.5 ist wohldefiniert, das heißt, es hängt nicht von der Wahl der φ_j ab.*

Beweis: Seien $0 \leq \tilde{\varphi}_1 \leq \tilde{\varphi}_2 \leq \dots$ und $0 \leq \hat{\varphi}_1 \leq \hat{\varphi}_2 \leq \dots$ mit $f = \sup \tilde{\varphi}_j = \sup \hat{\varphi}_j$ gegeben. Lemma 4.6 für $\varphi_j = \tilde{\varphi}_j$ und $g = \hat{\varphi}_n$ mit n fix, liefert

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty}\int_X \tilde{\varphi}_j \,\mathrm{d}\mu &\geq \int_X \hat{\varphi}_n \,\mathrm{d}\mu \\
\text{für } n\to\infty: \ \lim_{j\to\infty}\int_X \tilde{\varphi}_j \,\mathrm{d}\mu &\geq \lim_{n\to\infty}\int_X \hat{\varphi}_n \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \text{ völlig analog!} \\
\Longrightarrow \lim_{j\to\infty}\int_X \tilde{\varphi}_j \,\mathrm{d}\mu &= \lim_{j\to\infty}\int_X \hat{\varphi}_j \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

■

Bemerkung. Aus dem Korollar folgt auch, dass im Fall $f \in T^+$ das in Definition 4.5 definierte Integral $\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ mit dem Integral von Treppenfunktionen übereinstimmt. Denn sind Treppenfunktionen φ_j wie in der Definition gegeben. Dann ist $\hat{\varphi}_j := f$ eine andere Wahl von Treppenfunktionen. Wir haben dann folgendes gezeigt (alle folgenden Integral sind Integrale von Treppenfunktionen):

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty}\int_X \hat{\varphi}_j \,\mathrm{d}\mu \overset{\text{Kor.}}{=} \lim_{j\to\infty}\int_X \varphi_j \,\mathrm{d}\mu.$$

Eigenschaften 4.8.

(i) Für alle $f, g \in M^+$, $a, b \geq [0,\infty]$ gilt

$$\int_X (af + bg)\,\mathrm{d}\mu = a\cdot\int_X f \,\mathrm{d}\mu + b\cdot\int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

„(Linearität)“

(ii) Für alle $f, g \in M^+$: $f \leq g \Rightarrow \int_X f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X g \,\mathrm{d}\mu$. *(Monotonie)*

(iii) Gilt für $f, g \in M^+$ fast überall $f = g$, dann haben wir

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Beweis: (i) und (ii) sind einfache Übungen. Für (ii) nutze Lemma 4.6. Zu (iii): Es existiert eine Nullmenge $N \in \mathcal{M}$ mit $f(x) = g(x)$ auf $X \setminus N$. Wähle Treppenfunktion für f. Man sieht leicht, dass wir nun Treppenfunktionen für g wählen können, die auf $X \setminus N$ hiermit übereinstimmen. ■

4.3 Lebesgue-Integral für integrierbare Funktionen

Definition 4.9 (Lebesgue-Integral)**.** *Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Funktion numerische $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt* **μ-integrierbar** *oder* **Lebesgue-integrierbar** *bzgl. $(X, \mathcal{M}, \mu)$, falls f messbar ist und $\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$ gilt. (Man beachte hier, dass $|f| \in M^+$). Definiere dann das* **Lebesgue-Integral** *von f (über X bzgl. μ) als*

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \int_X f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X f_- \, \mathrm{d}\mu,$$

wobei

$$\begin{aligned}
&f_+ := \max\{f, 0\} \in M^+, \\
&f_- := \max\{-f, 0\} \in M^+, \\
&f = f_+ - f_-, \\
&0 \le f_\pm \le |f| \implies 0 \le \int_X f_\pm \, \mathrm{d}\mu \le \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty.
\end{aligned}$$

Fr 17.1.

Ist $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion, dann sind die Urbilder $f^{-1}(\{+\infty\})$ und $f^{-1}(\{-\infty\})$ Nullmengen[18]. Wir definieren die reelle Funktion $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$

$$\hat{f}(x) := \begin{cases} f(x) & f(x) \in \mathbb{R} \\ 0 & f(x) \in \{\pm\infty\} \end{cases}$$

Es gilt fast überall $f = \hat{f}$ und somit haben beide dasselbe Integral.

Für $p \in [1, \infty)$ definieren wir die **Lebesgue-Räume** oder **$\mathscr{L}^p$-Räume** als

$$\mathscr{L}^p := \mathscr{L}^p(\mu) := \left\{ f \in M \;\middle|\; |f|^p \colon X \to \mathbb{R} \text{ ist } \mu\text{-integrierbar} \right\} , \tag{4.1}$$

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \tag{4.2}$$

[18] Denn sei $A_\pm := f^{-1}(\{\pm\infty\})$. Aus $|f| \ge f_\pm \ge \chi_{A_\pm}$ ergibt sich mit der Monotonie

$$\infty > \int |f| \, \mathrm{d}\mu \ge \int \chi_{A_\pm} \, \mathrm{d}\mu = \infty \cdot \mu(A_\pm) \, .$$

Und dies impliziert $\mu(A_\pm) = 0$.

Der Raum

$$\mathscr{L}^1 := \mathscr{L}^1(\mu) = \{f \in M \mid f\colon X \to \mathbb{R} \text{ ist } \mu\text{-integrierbar}\}$$

ist von großer Wichtigkeit in der Maßtheorie, denn jede integrierbare numerische Funktion ist nach obiger Konstruktion fast überall gleich zu einer Funktion in $\mathscr{L}^1(\mu)$ mit demselben Integral. Zudem hat der Raum $\mathscr{L}^1$ einige schöne Eigenschaften, wie wir gleich sehen werden. Die Räume $\mathscr{L}^p$ für beliebiges p sind wichtig für das Studium partieller Differentialgleichungen, sowohl in der Angewandten Mathematik als auch der Globalen Mathematik, als auch in vielen Anwendungen der Mathematik (Physik, Chemie, Ingenieurswissenschaften, ...).

Proposition 4.10.

(1) *$\mathscr{L}^1(\mu)$ ist ein Vektorraum,*

(2) *Gilt $f = f_1 - f_2$ für $f_1, f_2 \in M_{\mathbb{R}}^+ \cap \mathscr{L}^1(\mu)$, dann ist $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ und*

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu - \int_X f_2 \,\mathrm{d}\mu\,,$$

(3)

$$\int_X : \mathscr{L}^1(\mu) \to \mathbb{R}, \quad f \longmapsto \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$

ist linear.

Beweis:

(1) Seien $f, g \in \mathscr{L}^1(\mu)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} &0 \le |af + bg| \le |a||f| + |b||g|, \\ &0 \le \int_X |af + bg| \,\mathrm{d}\mu \le |a| \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu + |b| \int_X |g| \,\mathrm{d}\mu < \infty. \end{aligned}$$

Also ist $\mathscr{L}^1(\mu)$ ist ein Vektorraum.

(2) Wir haben $f_1 \ge f$ und $f_1 \ge 0$, also $f_1 \ge f_+$; und analog sehen wir $f_2 \ge f_-$. Aus $f = f_1 - f_2 = f_+ - f_-$ folgt $g := f_1 - f_+ = f_2 - f_- \in M_{\mathbb{R}}^+$. aus $0 \le g \le f - 1$ folgt $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

$$\begin{aligned} \int_X f \,\mathrm{d}\mu &= \int_X f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f_- \,\mathrm{d}\mu \\ &= \left(\int_X f_+ \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu\right) - \left(\int_X f_- \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu\right) \\ &= \int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu - \int_X f_2 \,\mathrm{d}\mu\,. \end{aligned}$$

(3) Nun sei $a \ge 0$, $b \ge 0$, $f, g \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

$$af + bg = \underbrace{(af_+ + bg_+)}_{\in M_{\mathbb{R}}^+ \cap \mathscr{L}^1(\mu)} - \underbrace{(af_- + bg_-)}_{\in M_{\mathbb{R}}^+ \cap \mathscr{L}^1(\mu)}\,.$$

Nach (2) gilt dann:

$$\int_X (af + bg)\,\mathrm{d}\mu = \int_X (af_+ + bg_+)\,\mathrm{d}\mu - \int_X (af_- + bg_-)\,\mathrm{d}\mu = a\int_X f\,\mathrm{d}\mu + b\int_X g\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Die Linearität folgt dann mit $\int_X (-f)\,\mathrm{d}\mu = -\int_X f\,\mathrm{d}\mu$.

■

Eigenschaften 4.11. [19]

(0) Seien $f, g \in M$ mit $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in X$. Dann gilt

$$f \in \mathscr{L}^1(\mu) \Longleftrightarrow g \in \mathscr{L}^1(\mu)\,.$$

In diesem Fall

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \int_X g\,\mathrm{d}\mu\,.$$

(1) Für alle $f, g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ gilt

$$f \leq g \text{ fast überall } \Longrightarrow \int_X f\,\mathrm{d}\mu \leq \int_X g\,\mathrm{d}\mu\,.$$

(Monotonie)

(2) Sei $A \in \mathcal{M}$. Dann erfüllt die charakteristische Funktion $\chi_A \in T^+ \subset M^+$.

$$\int_X \chi_A\,\mathrm{d}\mu = \mu(A)$$

$$\int_X \chi_A\,\mathrm{d}\mu < \infty \iff \mu(A) < \infty \iff \chi_A \in \mathscr{L}^1(\mu).$$

(3) Ist $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ und $g \in M$ mit g beschränkt ($\exists c \in \mathbb{R}_{\geq 0} : -c \leq g \leq c$). Dann

$$\begin{aligned} &|gf| = |g||f| \leq c|f|, \\ &0 \leq \int_X |gf|\,\mathrm{d}\mu \leq c\int_X |f|\,\mathrm{d}\mu < \infty, \end{aligned}$$

dann folgt $gf \in \mathscr{L}^1(\mu)$. Insbesondere gilt für $A \in \mathcal{M}$ die Aussage $f \cdot \chi_A \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

Beweis: Die Aussagen sollten nun bereits klar sein. ■

Definition 4.12. *Für $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ oder $f \in M^+$, $A \in \mathcal{M}$ definiere*

$$\int_A f\,\mathrm{d}\mu := \int_X f\chi_A\,\mathrm{d}\mu.$$

[19] Punkt (0) in Vorlesung nur mündlich gesagt.

Sind A und B disjunkt, dann gilt $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$.

$$\int_{A\cup B} f \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu + \int_B f \,\mathrm{d}\mu.$$

Beispiel 4.13. Versehe $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ mit dem Zählmaß, $\zeta\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty]$, $\zeta(A) = \#A$. Dann gilt $(f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}) \in \mathscr{L}^1(\zeta)$ genau dann, wenn $\sum_{j=1}^{\infty} |f(j)| < \infty$, denn

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{N}} |f| \,\mathrm{d}\zeta &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{N}} |f| \cdot \chi_{\{0,1,\dots,k\}} \,\mathrm{d}\zeta \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} |f(j)| \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} |f(j)|.\end{aligned}$$

Hierbei haben wir $|f| \cdot \chi_{\{0,1,\dots,k\}} \in T_{\mathbb{R}}^{+}$ genutzt. Also gilt $f \in \mathscr{L}^1(\zeta)$ genau dann, wenn $\sum_{j=1}^{\infty} f(j)$ absolut konvergiert. In diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}\zeta = \sum_{j=1}^{\infty} f(j).$$

4.4 L^p-Räume

Definition 4.14. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine* **Halbnorm** *oder* **Semi-Norm** *auf V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:*

(a) *Semi-Definitheit: $\|x\| \geq 0$,*

(b) *Homogenität: $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$*

(c) *Dreiecksungleichung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$*

Nun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $p \in [1, \infty)$.

Proposition 4.15. *$\mathscr{L}^p$ ist ein Untervektorraum von M und $\|\cdot\|_p\colon \mathscr{L}^p \to \mathbb{R}$ aus (4.2) ist eine Halbnorm.*

Spezialfall: Sei $X = \{1, 2, \dots, n\}$ und μ das Zählmaß, d. h. $\mu(A) = \#A$. Dann ist $\mathscr{L}^p(\mu) = \mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|_p$ ist die p-Norm, die bereits in Analysis II, Kapitel 8, Beispiele 1.2 (3) eingeführt wurde. Wir hatten dort in diesem Spezialfall die **Minkowski-Ungleichung** gezeigt:

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \tag{4.3}$$

Beweis der Proposition: Ist $f \in \mathscr{L}^p$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann haben wir

$$\int_X |\lambda f|^p \,\mathrm{d}\mu = |\lambda|^p \int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty\,.$$

Hieraus folgt $\lambda f \in \mathscr{L}^p$ und die Homogenität. Die Semi-Definitheitist klar.

Wir zeigen nun die Dreiecks-Ungleichung

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \tag{4.4}$$

für alle $f, g \in M$. Hieraus folgt dann insbesondere, dass $\mathscr{L}^p := \{f \in M \mid \|f\|_p < \infty\}$ ein Untervektorraum von M ist.

(1) *Beweis von* (4.4) *für Treppenfunktionen.*

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i} \text{ und } g = \sum_{j=1}^{\ell} b_j \chi_{B_j}\,,$$

wobei die Mengen $(A_i)_i$ paarweise disjunkt sind und die Mengen $(B_j)_j$ paarweise disjunkt sind. Wir können o. B. d. A. annehmen, dass

$$X = \dot{\bigcup_i} A_i = \dot{\bigcup_j} B_j\,.$$

Somit gilt $A_i = \dot{\bigcup}_j (A_i \cap B_j)$ und $B_j = \dot{\bigcup}_i (A_i \cap B_j)$. Es folgt

$$f = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} a_i \chi_{A_i \cap B_j} \text{ und } g = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} b_j \chi_{A_i \cap B_j}\,.$$

Wir wenden nun (4.3) auf die Vektoren[20]

$$\begin{aligned} x := \Big(&a_1 \sqrt[p]{\mu(A_1 \cap B_1)}, a_1 \sqrt[p]{\mu(A_1 \cap B_2)}, \ldots, a_1 \sqrt[p]{\mu(A_1 \cap B_\ell)},\\ &a_2 \sqrt[p]{\mu(A_2 \cap B_1)}, a_2 \sqrt[p]{\mu(A_2 \cap B_2)}, \ldots, a_2 \sqrt[p]{\mu(A_2 \cap B_\ell)},\\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots\\ &a_k \sqrt[p]{\mu(A_k \cap B_1)}, a_k \sqrt[p]{\mu(A_k \cap B_2)}, \ldots, a_k \sqrt[p]{\mu(A_k \cap B_\ell)}\Big)^T \in \mathbb{R}^{k\ell} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} y := \Big(&b_1 \sqrt[p]{\mu(A_1 \cap B_1)}, b_2 \sqrt[p]{\mu(A_1 \cap B_2)}, \ldots, b_\ell \sqrt[p]{\mu(A_1 \cap B_\ell)},\\ &b_1 \sqrt[p]{\mu(A_2 \cap B_1)}, b_2 \sqrt[p]{\mu(A_2 \cap B_2)}, \ldots, b_\ell \sqrt[p]{\mu(A_2 \cap B_\ell)},\\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots\\ &b_1 \sqrt[p]{\mu(A_k \cap B_1)}, b_2 \sqrt[p]{\mu(A_k \cap B_2)}, \ldots, b_\ell \sqrt[p]{\mu(A_k \cap B_\ell)}\Big)^T \in \mathbb{R}^{k\ell} \end{aligned}$$

an.[21] Man rechnet nun leicht nach, dass $\|x\|_p = \|f\|_p$, $\|y\|_p = \|g\|_p$ und $\|x+y\|_p = \big\||f|+|g|\big\|_p$. Die Dreiecks-Ungleichung gilt somit für alle Treppenfunktionen[22].

(2) *Allgemeiner Fall.*

Um die Dreiecks-Ungleichung für beliebige $f, g \in M$ zu zeigen, betrachten monoton wach-

[20] Dies sind also sehr lange Zeilen- bzw. Spaltenvektoren, keine Matrizen!

[21] Ist ein Eintrag $a_i \sqrt[p]{\mu(A_i \cap B_j)}$ oder $b_j \sqrt[p]{\mu(A_i \cap B_j)}$ gleich ∞ oder $-\infty$, so ist die zu beweisende Aussage trivial erfüllt. Wir nehmen also an, dass sie alle endlich sind.

[22] Sie gilt auch im Fall $\|f\|_p = \infty$ oder $\|g\|_p = \infty$.

sende Folgen nicht-negativer Treppenfunktionen $(\varphi_n)_n$ und $(\psi_m)_m$ mit $|f| = \sup \varphi_n$ und $|g| = \sup \psi_m$. Wir führen die obige Abschätzung für φ_n an Stelle von f und für ψ_m an Stelle von g aus und erhalten

$$\big\| |f| + |g| \big\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \tag{4.5}$$

Nun gilt $0 \leq |f+g| \leq |f| + |g|$, also $|f+g|^p \leq (|f| + |g|)^p$ und somit

$$\|f+g\|_p \leq \| |f| + |g| \|_p \,.$$

Mit 4.5 folgt dann die Dreiecks-Ungleichung 4.4.

■

Übung 4.16. *(Übungsblatt 13) $\mathscr{N}^p(\mu) := \{f \in \mathscr{L}^p(\mu) \mid f = 0$ fast überall$\}$ ist ein Untervektorraum. Es gilt $f \in \mathscr{N}^p(\mu)$ genau dann, wenn $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$ und $\|f\|_p = 0$. Den Quotientenvektorraum*

$$L^p := L^p(\mu) := \frac{\mathscr{L}^p(\mu)}{\mathscr{N}^p(\mu)}$$

nennt man den **L^p-Raum** *oder den* **Raum der L^p-Funktionen** *oder einfach auch den* **Lebesgue-Raum zum Koeffizient p**[23]*. Er trägt eine eindeutige Norm $\|\!|\cdot|\!\|_p \colon L^p(\mu) \to \mathbb{R}$, so dass für alle Funktionen $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$, die $[f] \in L^p(\mu)$ repräsentieren, gilt:*

$$\|\!|[f]|\!\|_p = \|f\|_p \,.$$

$\|\!|\cdot|\!\|_p \colon L^p \to \mathbb{R}$ nennt man die **L^p-Norm** und wir schreiben hierfür meistens auch $\|\cdot\|_p$.

Bemerkung 4.17. Die Räume $(L^p, \|\!|\cdot|\!\|_p)$ sind vollständige normierte Vektorräume. Es sind also Banachräume. (ohne Beweis)[24]

4.5 Lebesgue- versus Riemann-Integrierbarkeit

Beispiel 4.18. $\chi_{\mathbb{Q}}$ und $\chi_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$ sind Lebesgue-integrierbar bzgl. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda_1)$ und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}} \,\mathrm{d}\lambda_1 = 0$$
$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}\cap[a,b]} \,\mathrm{d}\lambda_1 = 0,$$

da $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}\cap[a,b]$ Nullmengen bzgl. λ_1 sind. Andererseits ist die Funktion $\chi_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$ nicht Riemann-integrierbar: Das riemannsche Oberintegral ist $b-a$

$$\overline{\int_a^b} \chi_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}(x) \,\mathrm{d}x = b - a$$

[23] In der Praxis ist es später manchmal gar nicht mehr so wichtig, zwischen $\mathscr{L}^p$ und L^p sauber zu unterscheiden, da die Aussagen oft für beide Räume Sinn ergeben und oft gleichbedeutend sind.

[24] Achtung: Die Aussagen „Der Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ist vollständig“ und „$(L^p(X, \mathcal{M}, \mu), \|\!|\cdot|\!\|_p)$ “ sind unabhängig voneinander. Bitte nicht verwechseln.

und das riemannsche Unterintegral ist 0

$$\underline{\int_a^b} \chi_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Lemma 4.19. *Sei $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$, versehen mit der σ-Algebra $\mathcal{M} = \mathcal{B}_{[a,b]}$ oder $\mathcal{M} = \mathcal{L}_{[a,b]}$ und dem (auf $\mathcal{M}$ eingeschränkten) Lebesgue-Maß $\lambda_1|_{\mathcal{M}}$. Jede messbare, Riemann-integrierbare Funktion f ist Lebesgue-intergierbar, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Hierbei ist die linke Seite das Riemann-Integral und die rechte Seite das Lebesgue-Integral.

Man beachte hierbei:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{[a,b]} &= \{A\cap[a,b] \mid A\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\} = \{A\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \mid A\subset[a,b]\}\subset\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\,,\\ \mathcal{L}_{[a,b]} &= \{A\cap[a,b] \mid A\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}}\} = \{A\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}} \mid A\subset[a,b]\}\subset\mathcal{L}_{\mathbb{R}}\,.\end{aligned}$$

Beweis: Wir schreiben λ_1 für $\lambda_1|_{\mathcal{M}}$ und wir setzen alle messbaren Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch 0 zu einer (messbaren) Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fort.

Alle riemannschen Treppenfunktionen sind in $T_e(\lambda_1)(= T_{\mathbb{R}}\cap\mathscr{L}^1(\lambda_1))$. Es gilt für alle riemannschen Treppenfunktionen f:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda_1,$$

wobei $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ das Riemann-Integral und $\int_X f\,\mathrm{d}\lambda_1$ das Lebesgue-Integral ist.
Wegen der Monotonie gilt für alle beschränkten, messbaren Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$:

$$f \in \mathscr{L}^1(\lambda_1),$$

denn die Ungleichung $|f| \le C\chi_{[a,b]}$ und die Monotonie implizieren

$$\int_{[a,b]} |f|\,\mathrm{d}\lambda_1 \le C(b-a) < \infty\,.$$

Insbesondere sind alle Riemann-integrierbaren, messbaren Funktionen auch Lebesgue-integrierbar. Ist g eine Riemannsche Treppenfunktion mit $g \ge f$ bzw. $g \le f$. Dann folgt mit der Monotonie des Lebesgue-Integrals:

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ge \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda_1 \text{ bzw. } \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda_1\,.$$

Aus der Definition des riemannschen Ober- und Unterintegrals folgt:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \ge \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda_1 \ge \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ist also f Riemann-integrierbar und messbar, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda_1\,. \qquad \blacksquare$$

!ACHTUNG!. *Es gibt Riemann-integrierbare Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, die nicht messbar im Sinne von Abbildung $([a,b], \mathcal{B}_{[ab]}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ sind.*

Definition 4.20. *Sei X ein topologischer Raum und sei $\mu\colon \mathcal{B}_X \to [0,\infty]$ ein Maß auf $(X, \mathcal{B}_X)$. Sei $\mathcal{L}_X^\mu$ die σ-Algebra der μ-messbaren Mengen ($\mathcal{L}_X^\mu$ ist die Vervollständigung von $\mathcal{B}_X$ bezüglich des Maßes μ).*

$$\begin{aligned}
& \textit{Eine Abbildung } f\colon X \to \overline{\mathbb{R}} \textit{ nennt man } \textbf{Lebesgue-messbar} \textit{ oder } \boldsymbol{\mu}\textbf{-messbar} \\
:\overset{(\mathrm{def})}{\Longleftrightarrow}\ & \textit{sie ist als Abbildung von } (X, \mathcal{L}_X^\mu) \textit{ nach } (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}) \textit{ messbar} \\
\Longleftrightarrow\ & \textit{für alle } a \in \mathbb{R}\textit{: } f^{-1}((a,\infty]) \in \mathcal{L}_X^\mu \\
\Longleftrightarrow\ & \textit{für alle } a \in \mathbb{R}\textit{: } f^{-1}([a,\infty]) \in \mathcal{L}_X^\mu \\
\Longleftrightarrow\ & \textit{Es existiert eine } \mu\textit{-Nullmenge } N \textit{ mit } f^{-1}((a,\infty]) \setminus N \in \mathcal{B}_X\ \forall a \in \mathbb{R}. \\
\Longleftrightarrow\ & \textit{Es existiert eine } \mu\textit{-Nullmenge } N \textit{ mit } f^{-1}((a,\infty]) \cup N \in \mathcal{B}_X\ \forall a \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Wichtige Konvention: *Ab jetzt wird für derartige Maßräume (X,μ) immer angenommen, dass X mit der Lebesgueschen σ-Algebra $\mathcal{L}_X^\mu$ versehen ist, es sei denn wir sagen etwas anderes explizit. Die Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist dann Lebesgue-messbar, wenn sie als Funktion $(X, \mathcal{L}_X^\mu) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ messbar ist und $\int_X |f|\,\mathrm{d}\mu < \infty$ erfüllt. Dies gilt insbesondere für $X = \mathbb{R}^n$.*

!ACHTUNG!. *Sei $\mu = \lambda_1$ das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Es gibt $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar bzgl. λ_1, aber $g \circ f$ ist nicht Lebesgue-messbar.*

Proposition 4.21. *Riemann-integrierbare Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sind Lebesgue-messbar (also genauer λ_1-messbar).*

Korollar 4.22. *Riemann-integrierbare Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sind Lebesgue-integrierbar auf dem Maßraum $([a,b], \mathcal{L}_{[a,b]}^{\lambda_1}, \lambda_1)$, wobei wir verkürzend λ_1 für die Einschränkung von λ_1 auf $\mathcal{L}_{[a,b]}^{\lambda_1}$ schreiben.*

Das Korollar folgt mit Lemma 4.19 direkt aus der Proposition.

Beweis der Proposition: Sei $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Zu $n \in \mathbb{N}$ wähle riemannsche Treppenfunktionen ψ_n und $\widehat{\psi}_n$, wobei gilt $\psi_n \le f \le \widehat{\psi}_n$:

$$\int_a^b \psi_n(x)\,\mathrm{d}x + 4^{-n} \ge \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge \int_a^b \widehat{\psi}_n(x)\,\mathrm{d}x - 4^{-n}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_n &:= \max\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\} \ge \psi_n \\
\hat{\varphi}_n &:= \min\{\widehat{\psi}_1, \widehat{\psi}_2, \dots, \widehat{\psi}_n\} \le \widehat{\psi}_n,
\end{aligned}$$

mit $\varphi_n \leq f \leq \hat{\varphi}_n$:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x + 4^{-n} \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b \hat{\varphi}_n(x)\,\mathrm{d}x - 4^{-n}.$$

Es gilt

$$0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots \leq \varphi_n \leq f \leq \hat{\varphi}_n \leq \dots \leq \hat{\varphi}_2 \leq \hat{\varphi}_1.$$

Definiere $A_n := \{x \in [a,b] \mid \hat{\varphi}_n(x) - \varphi_n(x) \leq 2^{-n}\} \in \mathcal{B}_{[a,b]} \subset \mathcal{L}^{\lambda_1}_{[a,b]}$ und $B_n := [a,b] \setminus A_n \in \mathcal{B}_{[a,b]}$. Es gilt dann

$$\hat{\varphi}_n - \varphi_n > 2^{-n}\chi_{B_n}\,.$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1(B_n) &= \int_{[a,b]} \chi_{B_n}\,\mathrm{d}\lambda_1 \\
&\leq 2^n \underbrace{\int_a^b (\hat{\varphi}_n(x) - \varphi_n(x))\,\mathrm{d}x}_{2\cdot 4^{-n}} \\
&\leq 2^n \cdot 2 \cdot 4^{-n} \\
&= 2^{1-n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1\Big(\bigcup_{j\geq k} B_j\Big) &\leq \sum_{j=k}^{\infty} \lambda_1(B_j) \\
&\leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{1-j} \\
&= 2^{1-k} \underbrace{\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\Big)}_{=2} = 2^{2-k}.
\end{aligned}$$

Definiere $C_k := \bigcup_{j\geq k} B_j$ und $D := \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$. Es gilt

$$\lambda_1(C_k) \leq 2^{2-k} \implies \lambda_1(D) \leq 2^{2-k}\ \forall k.$$

Also ist D eine λ_1-Nullmenge. Für $j \geq k$:

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[a,b]\setminus C_k} |f(x) - f_j(x)| &\leq \sup_{x\in[a,b]\setminus C_k} |\hat{\varphi}_j(x) - \varphi_j(x)| \\
&\leq 2^{-j}
\end{aligned}$$

und $[a,b] \setminus C_k \subset A_j$. Also konvergiert φ_j gleichmäßig auf $[a,b] \setminus C_k$ gegen f. Also konvergiert φ_j punktweise gegen f auf $[a,b] \setminus D$. Analog konvergiert $\hat{\varphi}_j$ punktweise gegen f auf $[a,b] \setminus D$.

$$0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots \leq \dots \leq f \leq \hat{\varphi}_n \leq \dots \leq \hat{\varphi}_2 \leq \hat{\varphi}_1.$$

Mit Satz 2.9 folgt: $f|_{[a,b]\setminus D}$ ist messbar als Abbildung

$$[a,b] \setminus D \to \mathbb{R},$$

wobei $[a,b] \setminus D$ und $\mathbb{R}$ jeweils mit der zugehörigen Borel-Algebra versehen ist. Also ist f dann λ_1-messbar. ■

Di 21.1.

Beispiel 4.23. Sei $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}_0$. Definiere daraus $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) := a_{\lfloor x \rfloor} = a_i, \text{ falls } i \leq x < i+1$$

$$\int_{[0,n]} f \,\mathrm{d}\lambda_1 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i = \int_0^n f(x) \,\mathrm{d}x.$$

f ist uneigentlich Riemann-integrierbar genau dann, wenn $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert.
f ist Lebesgue-integrierbar genau dann, wenn $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ absolut konvergiert (siehe auch Beispiel 4.13).
Also existiert ein $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, das uneigentlich Riemann-integrierbar, aber nicht Lebesgue-integrierbar ist.
Im Allgemeinen

$$\begin{aligned}
\text{Riemann-integrierbar} &\implies \text{Lebesgue-integrierbar} \\
\text{Lebesgue-integrierbar} &\not\Longrightarrow \text{Riemann-integrierbar} \\
\text{Lebesgue-integrierbar} &\not\Longrightarrow \text{uneigentlich Riemann-integrierbar} \\
\text{uneigentlich Riemann-integrierbar} &\not\Longrightarrow \text{Lebesgue-integrierbar}
\end{aligned}$$

Über uneigentliche Riemann-Integrale zitieren wir noch (wörtlich) einen Satz aus einem Skript von Helga Baum:

Satz (Satz 11.32 aus [14])**.** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar über jedem kompakten Teilintervall von I. Dann ist f genau dann Lebesgue-integrierbar über I, wenn $|f|$ uneigentlich Riemann-integrierbar über I ist. Das uneigentliche Riemann-Integral von f stimmt in diesem Fall mit dem Lebesgue-Integral von f über I überein.*

5 Konvergenzsätze

In diesem Abschnitt ist das Buch [18] eine wichtige Referenz.

Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum.

Satz 5.1 (Satz über monotone Konvergenz/Satz von Beppo Levi)**.** *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von messbaren Funktionen mit $f_1 \geq 0$, $f_n\colon X \to [0,\infty]$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} f_n$ messbar und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Bemerkung 5.2. Es reicht auch anzunehmen, dass $f_1 \geq 0$ μ-fast überall gilt und für alle $n \in \mathbb{N}$ $f_n \leq f_{n+1}$ μ-fast überall gilt. Um die Aussage in diesem Fall zu zeigen, kann man die Funktionen f_n auf einer messbaren Nullmenge zu Funktionen $\hat{f}_n$ abändern, so dass

$$0 \leq \hat{f}_1 \leq \hat{f}_2 \leq \cdots$$

gilt. Dann existiert und $\hat{f} := \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n : X \to [0,\infty]$. Somit gilt $\hat{f} := \lim_{n\to\infty} f_n$ fast überall und der Satz von Levi liefert:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \hat{f}_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X \hat{f} \, \mathrm{d}\mu.$$

Der Limes $\lim_{n\to\infty} f_n$ existiert in $[0,\infty]$ aber nur *fast überall*; es kann Punkte $x \in X$ geben, so dass $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ in $[0,\infty]$ nicht existiert.

Beweis von Satz 5.1:

(1) $\lim_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \colon X \to [0,\infty]$ messbar nach Proposition 2.7 (4).

(2)
$$\begin{aligned} f_n \le f &\Longrightarrow \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \le \int_X f \, \mathrm{d}\mu \\ &\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu}_{\text{monoton wachsend}} \le \int_X f \, \mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

(3) Sei nun $\varphi_j \in T^+$, $0 \le \varphi_1 \le \varphi_2 \le \dots \le \varphi_n \le \ldots \le f = \lim_{j\to\infty} \varphi_j$. Fixiere $j \in \mathbb{N}$ und $c > 1$:

$$A_n := \{cf_n \ge \varphi_j\} = \{x \in X \mid cf_n(x) \ge \varphi_j(x)\}.$$

Es gilt $A_n \subset A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$. Deswegen wächst $(\varphi_j \chi_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton (für festes j) und wir haben punktweise Konvergenz

$$\varphi_j \chi_{A_n} \xrightarrow{n\to\infty} \varphi_j.$$

Mit $cf_n \ge \varphi_j \chi_{A_n}$ erhalten wir

$$\int_X \varphi_j \, \mathrm{d}\mu \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X (\varphi_j \chi_{A_n}) \, \mathrm{d}\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_X cf_n \, \mathrm{d}\mu = c \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$$

An der Stelle $(*)$ benutzen wir Definition 4.5 oder genauer die darauffolgende unnummerierte Bemerkung.

Im Limes $c \to 1$ folgt

$$\int_X \varphi_j \, \mathrm{d}\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Im Limes $j \to \infty$ folgt

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \overset{\text{Def. 4.5}}{=} \lim_{j\to\infty} \int_X \varphi_j \, \mathrm{d}\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

■

Korollar 5.3. *Für jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M^+ gilt*

$$\int_X \Big(\sum_{j=1}^{\infty} f_j\Big) \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j \, \mathrm{d}\mu.$$

Beweis: Wende Satz 5.1 von Levi auf die Partialsummen an. ■

Beispiel 5.4. Satz 5.1 ist falsch ohne Monotonie-Voraussetzung, wie das folgende Beispiel zeigt: $(X, \mathcal{M}, \mu) := (\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \lambda_1^B)$, $f_n = \frac{1}{n}\chi_{(0,n]} \in \mathscr{L}^1(\lambda_1)$, $\int_\mathbb{R} f_n \, \mathrm{d}\lambda_1 = 1$.

$$\begin{aligned} 1 = \lim_{n\to\infty} 1 &= \lim_{n\to\infty} \int_\mathbb{R} f_n \, \mathrm{d}\lambda_1 \\ &\neq \int_\mathbb{R} \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\lambda_1 = \int_\mathbb{R} 0 \, \mathrm{d}\lambda_1 = 0. \end{aligned}$$

Satz 5.5 (Lemma von Fatou)**.** *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M^+. Dann ist*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu. \tag{5.1}$$

Das obige Beispiel 5.4 zeigt auch, dass wir in (5.1) das Zeichen „$\leq$“ nicht durch „$=$“ ersetzen können.

Beweis:

$$\begin{aligned} f &:= \lim_{n\to\infty} (\inf_{k\geq n} f_n) = \liminf_{n\to\infty} f_n \\ g_n(x) &:= \inf\{f_k(x) \mid k \geq n\} \\ f &= \liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n, \qquad g_n \leq g_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Also $f \in M^+$ nach Proposition 2.7 (4). Der Satz 5.1 über monotone Konvergenz von Levi besagt

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Für $k \geq n$ gilt $g_n \leq f_k$, daher

$$\int_X g_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu.$$

Wir bilden das Infimum über $k \geq n$ und erhalten

$$\int_X g_n \, \mathrm{d}\mu \leq \inf_{k\geq n} \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu.$$

Im Limes $n \to \infty$:

$$\begin{aligned} \int_X f \, \mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

■

Satz 5.6 (Satz über majorisierte Konvergenz/Satz über dominierte Konvergenz)**.** *Seien $f, f_n \colon X \to \mathbb{R}$ messbar und $g \colon X \to \mathbb{R}$ sei Lebesgue-integrierbar bzgl. $(X, \mathcal{M}, \mu)$, also $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$. Es gelte*

(1) *$f = \lim_{n\to\infty} f_n$ punktweise μ-fast überall.*

(2) *$|f_n| \leq g$ μ-fast überall.*

Dann gilt $f, f_n \in \mathscr{L}^1(\mu)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Weiter gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

g heißt **Majorante** *von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Aussage wäre falsch ohne solch eine Majorante g.

Beweis: Aussage (2) bedeutet: Es gibt eine μ-Nullmenge N_n mit

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in X \setminus N_n.$$

Aussage (1) bedeutet: Es gibt eine μ-Nullmenge N mit

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in X \setminus N.$$

Nun ist $N' = N \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$ eine Nullmenge, da es eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $N' = \emptyset$, denn sonst ersetze X durch $\hat{X} := X \setminus N'$, f durch $\hat{f} := f|_{\hat{X}}$, g durch $\hat{g} := g|_{\hat{X}}$, f_n durch $\hat{f}_n := f_n|_{\hat{X}}$.

Wir haben also $0 \leq |f_n| \leq g$ und $0 \leq |f| \leq g$. Da g integrierbar ist (d. h. $\int g \, \mathrm{d}\mu < \infty$), sind auch f, $|f|$ und alle f_n und $|f_n|$ integrierbar.

$$\begin{aligned}
&|f - f_n| \leq |f| + |f_n| \leq |f| + g \\
&g_n := |f| + g - |f_n - f| \in M^+ \\
&\lim_{n\to\infty} g_n = |f| + g \text{ (punktweise)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_X (|f| + g) \, \mathrm{d}\mu &= \int_X (\lim_{n\to\infty} g_n) \, \mathrm{d}\mu \\
&= \int_X \liminf_{n\to\infty} g_n \, \mathrm{d}\mu \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n \, \mathrm{d}\mu \text{ (Lemma von Fatou)} \\
&= (-\limsup_{n\to\infty} \int_X \underbrace{|f_n - f|}_{\geq 0} \, \mathrm{d}\mu) + \int_X (|f| + g) \, \mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_X (|f| + g) \, \mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Denn falls > 0 gelten würde, dann würde der Widerspruch $\int_X (|f| + g) \, \mathrm{d}\mu < \int_X (|f| + g) \, \mathrm{d}\mu$ folgen.

Wir haben somit

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Aus den Ungleichungen $-|f_n - f| \leq \pm(f_n - f) \leq |f_n - f|$ folgt mit der Monotonie

$$0 \leq \Big| \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu - \int_X f \, \mathrm{d}\mu \Big| = \Big| \int_X (f_n - f) \, \mathrm{d}\mu \Big| \leq \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0.$$

Also $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$. ■

Alternativ sagt man auch **Satz über dominierte Konvergenz** statt Satz über majorisierte Konvergenz.

Beispiel 5.7. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und f' beschränkt. Dann ist $f'\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ in $\mathscr{L}^1(\lambda_1)$ bzgl. der σ-Algebra $\mathcal{L}^{\lambda_1}_{[a,b]}$. Und es gilt

$$\int_{[a,b]} f' \, \mathrm{d}\lambda_1 = f(b) - f(a).$$

Denn sei $|f'(x)| \leq C$ für alle $x \in [a,b]$. Setze f zu einer differenzierbaren Funktion $f\colon [a,b+1] \to \mathbb{R}$ mit $|f'(x)| \leq C$ fort (z. B. $f(x) = f(b) + (x-b)f'(b)$ für $x \geq b$). Die Funktion $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g_n(x) := n\Big(f\big(x + \frac{1}{n}\big) - f(x)\Big)$ ist stetig in x.

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f\big(x + \frac{1}{n}\big) - f(x)}{\frac{1}{n}} = f'(x).$$

Also ist f' messbar. Der Mittelwertsatz besagt $g_n(x) = f'(\zeta_n)$ für ein $\zeta_n \in \Big[x, x + \frac{1}{n}\Big]$. Also haben wir $|g_n(x)| \leq C$ für alle $x \in [a,b]$. Aus dem Satz 5.6 über majorisierten Konvergenz folgt $g_n, f' \in \mathscr{L}^1([a,b], \mathcal{L}^{\lambda_1}_{[a,b]}, \lambda_1)$.

$$\int_{[a,b]} f' \, \mathrm{d}\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} g_n \, \mathrm{d}\lambda_1$$
$$F(x) = \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t$$

Da f stetig ist, ist F differenzierbar mit $F' = f$.

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} g_n \, \mathrm{d}\lambda_1 &= \int_a^b g_n(x) \, \mathrm{d}x \\
&= n \int_a^b \Big(f\big(x + \frac{1}{n}\big) - f(x)\Big) \, \mathrm{d}x \\
&= n\Big(F\big(b + \frac{1}{n}\big) - F(b)\Big) - n\Big(F\big(a + \frac{1}{n}\big) - F(a)\Big) \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{F(b + \frac{1}{n}) - F(b)}{\frac{1}{n}}}_{=f(b)} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{F(a + \frac{1}{n}) - F(a)}{\frac{1}{n}}}_{=f(a)} = f(b) - f(a)
\end{aligned}$$

und mit $\int_{[a,b]} g_n \, \mathrm{d}\lambda_1 \to \int_{[a,b]} f' \, \mathrm{d}\lambda_1$ folgt die zu beweisende Aussage.

6 Produkt-Maße und Satz von Fubini

Fr 24.1.

In diesem Teil halten wir uns sehr nahe am Buch [15], aus dem wir einige Passagen teilweise wörtlich übernehmen.

Typische Fragen dieses Abschnitts.

Sei $\mathbb{R}^n$ mit der Borel-Algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ versehen.

(1) Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ messbar und $A_y := \{x \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in A\}$. Wir würden gerne zeigen:

$$\lambda_2(A) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(A_y)\,\mathrm{d}y.$$

(2) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\,\cdot\,,y)\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto f(x,y). \end{aligned}$$

Ist nun f genau dann messbar, wenn $f(\,\cdot\,,y)$ messbar ist für alle $y \in Y$?
Angenommen alles ist integrierbar, gilt dann

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}y?$$

6.1 Produkt-σ-Algebren

Definition 6.1. *Für zwei Messräume $(X,\mathcal{A})$ und $(Y,\mathcal{B})$ definieren wir die* **Produkt-σ-Algebra** *auf $X \times Y$ als*

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := \mathcal{M}(\{A \times B \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}, X \times Y)\,.$$

Bemerkung 6.2. Sind $(X,\mathcal{A})$ $(Y,\mathcal{B})$, $(Z,\mathcal{C})$ Messräume, so überprüft man leicht, dass

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C} = \mathcal{M}(\{A \times B \times C \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B},\ C \in \mathcal{C}\}, X \times Y \times Z) = \mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}).$$

Bemerkung 6.3. Wegen $A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$ stimmt $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ mit der Produkt-σ-Algebra überein, die in Aufgabe 4c) auf Übungsblatt 11 definiert wurde.[25] In dieser Aufgabe haben wir gesehen, dass $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ die kleinste σ-Algebra auf $X \times Y$ ist, so dass

$$\begin{aligned} X \times Y &\xrightarrow{\pi_X} X \\ (x,y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} X \times Y &\xrightarrow{\pi_Y} Y \\ (x,y) &\longmapsto y \end{aligned}$$

messbar sind.

[25] Um die Aufgabe anzuwenden, setze $X_1 := X$, $X_2 := Y$ und $I := \{1,2\}$.

Bemerkung 6.4. Für $y \in Y$ definieren wir $\iota_y \colon X \to X \times Y$ durch $x \longmapsto (x, y)$. Wir wollen zeigen, dass ι_y von $(X, \mathcal{A})$ nach $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ messbar ist. Hierzu ist es nach Beispiele 2.3 (6) ausreichend zu prüfen, dass $(\iota_y)^{-1}(A \times B)$ messbar ist, falls A und B messbar in X bzw. Y sind. Wegen $(\iota_y)^{-1}(A \times B) = A$ oder $(\iota_y)^{-1}(A \times B) = \emptyset$ ist dies offensichtlich erfüllt.
Genauso zeigt man für $x \in X$, dass $\iota_x \colon Y \to X \times Y$ mit $y \longmapsto (x, y)$ messbar ist.

Seien nun $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume und $\mathcal{B}_X$ und $\mathcal{B}_Y$ die zugehörigen Borel-Algebren. Sei $\mathcal{O}_{X \times Y}$ die Produkt-Topologie und $\mathcal{B}_{X \times Y}$ die zugehörige Borel-Algebra.

Frage 6.5. *Gilt $\mathcal{B}_{X \times Y} = \mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$?*

Die obige Frage wurde teilweise auf Übungsblatt 11, Aufgabe 3 – mit etwas anderer Notation – diskutiert[26]. Wir haben dort die folgende Gleichheit $(*)$ gezeigt:

$$\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y \overset{(*)}{=} \mathcal{M}(\underbrace{\{A \times B \mid A \in \mathcal{O}_X, B \in \mathcal{O}_Y\}}_{\subset \mathcal{O}_{X \times Y}}, X \times Y) \subset \mathcal{M}(\mathcal{O}_{X \times Y}, X \times Y) \overset{\text{(def)}}{=} \mathcal{B}_{X \times Y}$$

und die darauffolgende Inklusion ist trivial.

Es ist uns also bereits bekannt, dass die Inklusion „$\subset$“ in der Frage immer richtig ist.

Die Inklusion „$\supset$“ ist hingegen nicht immer richtig, es gibt Gegenbeispiele. Diese Inklusion gilt, falls beide Topologien das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen; eine Topologie $\mathcal{O}_X$ **erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom**,, falls es eine abzählbare Teilmenge $B \subset \mathcal{O}_X$ gibt, so dass jedes Element von $\mathcal{O}_X$ eine Vereinigung von Elementen von B ist.[27] Wir wollen aber den allgemeinen Fall hier gar nicht diskutieren, sondern uns auf den Spezialfall $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}^m$ einschränken.

Im Fall $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}^m$, jeweils mit der Standard-Topologie gilt Gleichheit. Denn jede offene Menge in $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ist eine abzählbare Vereinigung von Elementarwürfeln (siehe Beispiel 2.3 (7) Spezialfall (a)) und damit in $\mathcal{M}(\{A \times B \mid A \in \mathcal{O}_X, B \in \mathcal{O}_Y\}, X \times Y)$ enthalten.[28] Wir haben also $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{n+m}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ und durch Induktion folgt dann

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \underbrace{\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}}_{n\text{-mal}} \tag{6.1}$$

Definition 6.6. *$\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(Z)$ heißt* **monoton**, *falls*

(a) *Gilt $Y_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$ und $Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots$, dann ist auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n \in \mathcal{M}$.*

(b) *Gilt $Y_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$ und $Y_1 \supset Y_2 \supset \ldots$, dann ist auch $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Y_n \in \mathcal{M}$.*

Lemma 6.7. *Sei $\mathcal{R}$ eine Algebra auf Z und $\mathcal{M}$ sei die kleinste monotone Teilmenge von $\mathcal{P}(Z)$, die $\mathcal{R}$ enthält. Dann ist $\mathcal{M}$ die von $\mathcal{R}$ erzeugte σ-Algebra.*

Bemerkung. Definiere

$$\mathcal{M} := \bigcap_{\mathcal{M} \in \mathcal{Z}} \mathcal{N},$$

[26] Auf dem Übungsblatt haben wir B_X statt $\mathcal{B}_X$ und $\mathcal{M}_{X \times Y}$ statt $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$ geschrieben.
[27] Eine Teilmenge $B \subset \mathcal{O}_X$ nennt man **Basis der Topologie** $\mathcal{O}_X$, wenn jedes Element von $\mathcal{O}_X$ eine Vereinigung von Elementen von B ist. Es wird hier also die Existenz einer abzählbaren Basis der Topologie gefordert.
[28] Genauso kann man auch zeigen, dass $\mathbb{R}^n$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

wobei $\mathcal{Z} = \{\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(Z) \mid \mathcal{N} \text{ monoton und } \mathcal{R} \subset \mathcal{N}\}$. Man sieht sofort, dass $\mathcal{M} \in \mathcal{Z}$ und dass jedes Element von $\mathcal{Z}$ die Menge $\mathcal{M}$ als Teilmenge erhält. $\mathcal{M}$ ist in diesem Sinne also die kleineste Algebra, die $\mathcal{R}$ enthält.

Beweis von Lemma 6.7: Jede σ-Algebra ist monoton. Deswegen ist $\mathcal{M}(\mathcal{R}, Z)$ eine monotone Menge, die $\mathcal{R}$ enthält. Es folgt $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}(\mathcal{R}, Z)$. Zu zeigen ist also $\mathcal{M}(\mathcal{R}, Z) \subset \mathcal{M}$. Wir zeigen dies, indem wir nachweisen, dass $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra ist.

(1) $\mathcal{M}^C := \{Y \in \mathcal{P}(Z) \mid Z \setminus Y \in \mathcal{M}\} = \{Z \setminus Y \mid Y \in \mathcal{M}\}$ ist ebenfalls monoton. Es gilt $A \in \mathcal{R} \Rightarrow Z \setminus A \in \mathcal{R}$. Also ist $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}^C$ (dann folgt $\mathcal{M}^C \in \mathcal{Z}$). Somit $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^C$.
Angenommen $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{M}^C$, dann existiert ein $A \in \mathcal{M}^C \setminus \mathcal{M}$. Somit $Z \setminus A \in \mathcal{M}$ und $A \notin \mathcal{M}$. Hieraus folgt $Z \setminus A \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}^C$. Dies ist ein Widerspruch zu $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^C$. Somit $\mathcal{M} = \mathcal{M}^C$.
Es folgt:

$$A \in \mathcal{M} \implies Z \setminus A \in \mathcal{M}. \tag{6.2}$$

(2) Für $B \in \mathcal{M}$ definiere $\mathcal{M}_B = \{Y \in \mathcal{M} \mid Y \cap B \in \mathcal{M}\}$. Man überprüft leicht, dass $\mathcal{M}_B$ ebenfalls monoton ist.
Sei nun zunächst $B \in \mathcal{R}$. Es gilt nun $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}_B$: denn

$$A \in \mathcal{R} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{R} \subset \mathcal{M} \Longrightarrow A \in \mathcal{M}_B.$$

Da $\mathcal{M}$ die kleinste monotone Menge ist, die $\mathcal{R}$ enthält, folgt $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_B$ für alle $B \in \mathcal{R}$. Somit haben wir bisher gezeigt:

$$\text{für alle } Y \in \mathcal{M} \text{ und für alle } B \in \mathcal{R} \text{ gilt } Y \cap B \in \mathcal{M}. \tag{6.3}$$

Nun sei $B \in \mathcal{M}$. Wie oben bereits erwähnt, ist $\mathcal{M}_B$ monoton. Wegen (6.3) gilt nun: $A \in \mathcal{R}$ impliziert $A \cap B \subset \mathcal{M}$. Analog wie oben folgt daraus $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_B$ für alle $B \in \mathcal{M}$. Für alle $Y \in \mathcal{M}$ gilt also $Y \in \mathcal{M}_B$, somit $Y \cap B \in \mathcal{M}$. Wir haben gezeigt

$$\text{für alle } Y, B \in \mathcal{M} \text{ gilt } Y \cap B \in \mathcal{M}. \tag{6.4}$$

(3) $\emptyset \in \mathcal{R} \subset \mathcal{M}$. Es folgt $\mathcal{M}$ ist eine Algebra:[29]

(i) $\emptyset \in \mathcal{M}$,

(ii) Aus (6.2) und (6.4) folgt:

$$A \setminus B = A \cap (Z \setminus B) \in \mathcal{M}.$$

(Alg-iv) $Z = Z \setminus \emptyset \in \mathcal{M}$.

(iii) Aus (6.2) und (6.4) folgt für $A, B \in \mathcal{M}$:

$$A \cup B = Z \setminus \Big((Z \setminus A) \cap (Z \setminus B) \Big)$$

[29] Nummerierung im wesentlich wie in der Definition von „Algebra“, d. h. wie in Definition 3.6.

(4) Seien $A_j \in \mathcal{M}$ für $j \in \mathbb{N}$, $Y_n = A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{M}$, $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n \in \mathcal{M}$.

Also ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra. Da jede σ-Algebra, die $\mathcal{R}$ enthält, auch eine monotone Menge ist, haben wir gezeigt, dass $\mathcal{M}$ die kleinste σ-Algebra ist, die $\mathcal{R}$ enthält. ■

Folgerung 6.8. *$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ die kleinste monotone Teilmenge von $\mathcal{P}(X \times Y)$, die von $\{A \times B \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$ erzeugte Algebra enthält.*

6.2 Produkt-Maße

Im folgenden Unterabschnitt seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume.

Lemma 6.9. *Sei $f\colon X \times Y \to [0,\infty]$ eine messbare Funktion, wobei $X \times Y$ die σ-Algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ trägt und $[0,\infty]$ die Borel-Algebra trägt. (Kurz: $f\colon X \times Y \to [0,\infty]$ ist eine messbare Funktion $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to [0,\infty]$.) Dann gilt*

(i) *Für alle $x \in X$ ist $f(x,\,\cdot\,)\colon Y \to [0,\infty]$ mit $y \longmapsto f(x,y)$ ist eine messbare Funktion*

$$(Y, \mathcal{B}) \to [0,\infty].$$

(ii) *Durch $x \longmapsto \int_Y f(x,\,\cdot\,)\,\mathrm{d}\nu$ wird eine messbare Funktion $(X, \mathcal{A}) \to [0,\infty]$ definiert.*

Natürlich gilt die analoge Aussage, wenn wir die Rolle von X und Y vertauschen.

Schreibweise $\mathrm{d}x$ für $\mathrm{d}\mu$, $\mathrm{d}y$ für $\mathrm{d}\nu$.

$$\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y := \int_Y f(x,\,\cdot\,)\,\mathrm{d}\nu$$
$$\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x := \int_X f(\,\cdot\,,y)\,\mathrm{d}\mu.$$

Di 28.1.

Beweis: Aus Bemerkung 6.4 folgt, dass $f(x,\,\cdot\,) = f \circ \iota_x$ messbar ist, in anderen Worten wir haben (i).

(1) Wir definieren $\mathcal{M} := \{N \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \mid f := \chi_N \text{ erfüllt (ii)}\}$.
Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{M} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

1. Fall: $\nu(Y) < \infty$. Für $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ gilt $\chi_{A\times B} \in \mathcal{M}$. Da das Integral linear ist, sind auch disjunkte Vereinigungen von Produkten in $\mathcal{M}$, das heißt $\mathcal{M}$ enthält auch alle Mengen der Form $\dot{\bigcup}_{i=1}^{k} A_i \times B_i$ mit $A_i \in \mathcal{A}$, $B_i \in \mathcal{B}$; in der Menge $\mathcal{M}$ ist also auch die Algebra,[30] die von $S := \{A \times B \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$ erzeugt wird, als Teilmenge enthalten.

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{M}$ monoton ist. Mit Folgerung 6.8 ergibt sich daraus $\mathcal{M} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

(a) Sei $N_1 \subset N_2 \subset \dots$ mit $N_i \in \mathcal{M}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, und $N = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_i$. Dann ist $(\chi_{N_i})_{i\in\mathbb{N}}$

[30] Man überlege sich: die von S erzeugte Algebra ist $\{\dot{\bigcup}_{i=1}^{k} A_i \times B_i \mid k \in \mathbb{N}_0,\ A_i \in \mathcal{A},\ B_i \in \mathcal{B}\}$

eine monoton wachsende Folge nicht-negativer Funktionen, messbar bezüglich $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

$$\chi_N = \lim_{i\to\infty} \chi_{N_i},$$
$$\forall x \in X: \ \chi_N(x, \cdot\,) = \lim_{i\to\infty} \chi_{N_i}(x, \cdot\,).$$

Diese Limites sind punktweise und wir wissen bereits, dass all diese Funktionen messbar sind.

$$\begin{aligned}\int_Y \chi_N(x, \cdot\,)\,\mathrm{d}\nu &= \int_Y \lim_{i\to\infty} \chi_{N_i}(x, \cdot\,)\,\mathrm{d}\nu \\ &\overset{(*)}{=} \lim_{i\to\infty} \int_Y \chi_{N_i}(x, \cdot\,)\,\mathrm{d}\nu,\end{aligned}$$

wobei bei $(*)$ der Satz 5.1 über monotone Konvergenz eingeht. Nun ist $x \longmapsto \int_Y \chi_{N_i}(x, \cdot\,)\,\mathrm{d}\nu$ eine messbare Funktion $(X, \mathcal{A}) \to [0, \infty]$, da $N_i \in \mathcal{M}$. Punktweise Grenzwerte von Folgen messbarer Funktionen sind wieder messbar (Proposition 2.7 (6)). Somit ist auch $x \longmapsto \int_Y \chi_N(x, \cdot\,)\,\mathrm{d}\nu$ eine messbare Funktion. Also $N \in \mathcal{M}$.

(b) Ist $N_1 \supset N_2 \supset \ldots$, $N_i \in \mathcal{M}$ für $i \in \mathbb{N}$. Zeige nun $N := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} N_i \in \mathcal{M}$. Beweis nahezu analog wie in (a) mit „monoton fallend“ statt „monoton wachsend“ bis auf den Schritt $(*)$. Um $(*)$ zu begründen, bemerken wir zunächst $0 \le \chi_{N_i}(x, \cdot\,) \le 1$, das heißt die konstante Funktion 1 ist ein Majorante. Es gilt außerdem $\int_Y 1\,\mathrm{d}\nu = \nu(Y) < \infty$. Wir können die Gleichheit bei $(*)$ also mit dem Satz 5.6 von der majorisierten Konvergenz begründen. Somit ist auch $x \longmapsto \int_Y \chi_N(x, \cdot\,)$ messbar.

Also haben wir gezeigt, dass $\mathcal{M}$ monoton ist, falls $\nu(Y) < \infty$. Wie oben erklärt, folgt daraus $\mathcal{M} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.
2. Fall: $\nu(Y) = \infty$. Wähle $Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots$, so dass $\nu(Y_i) < \infty$ und $\bigcup Y_i = Y$. Für jedes $N \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ definieren wir

$$N_i := N \cap (X \times Y_i) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B},$$

Aus dem 1. Fall folgt $N_i \in \mathcal{M}$.

Völlig analog wie im 1. Fall Teil (a) zeigt man nun, dass $N = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_i \in \mathcal{M}$. Also $\mathcal{M} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

(2) Durch Linearkombinationen sehen wir, dass (ii) auch für nicht-negative reelle Treppenfunktionen gilt.

(3) Um Lemma 6.9 für beliebig messbare Funktionen $f\colon X \times Y \to [0, \infty]$ zu zeigen, wählen wir zunächst eine Folge von reellen Treppenfunktionen $0 \le \varphi_1 \le \varphi_2 \le \ldots$ mit $f = \lim_{j\to\infty} \varphi_j$, die nach Proposition 2.9 existieren. Wir erhalten die Aussage aus (2) mit Hilfe des Satzes 5.1 über monotone Konvergenz. ■

Satz 6.10 (Cavalieris Prinzip)**.**

(1) *Es gibt auf $X \times Y$ genau ein Maß $\mu \otimes \nu\colon \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0, \infty]$, so dass für alle $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ gilt:*

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B). \tag{6.5}$$

Man nennt $\mu \otimes \nu$ das **Produktmaß**.

(2) *Für jede Menge $Q \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ gilt*

$$(\mu \otimes \nu)(Q) \overset{\text{(i)}}{=} \int_X \Big(\int_Y \chi_Q(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x \overset{\text{(ii)}}{=} \int_Y \Big(\int_X \chi_Q(x,y)\,\mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}y.$$

Beispiel 6.11.

$$\begin{aligned} Q_x &:= \{y \in Y \mid (x,y) \in Q\} \\ Q_y &:= \{x \in X \mid (x,y) \in Q\} \\ \nu(Q_x) &= \int_Y \chi_Q(x,\,\cdot\,)\,\mathrm{d}\nu = \int_Y \chi_Q(x,y)\,\mathrm{d}y \\ \mu(Q_y) &= \int_X \chi_Q(\,\cdot\,,y)\,\mathrm{d}\mu = \int_X \chi_Q(x,y)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$(\mu \otimes \nu)(Q) \overset{\text{(ii)}}{=} \int_Y \mu(Q_y)\,\mathrm{d}y \overset{\text{(i)}}{=} \int_X \nu(Q_x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis von Cavalieris Prinzip: Wir definieren für Q_x wie oben in (i)

$$\begin{aligned} \rho\colon \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} &\to [0,\infty] \\ Q &\longmapsto \int_X \nu(Q_x)\,\mathrm{d}x = \int_X \int_Y \chi_Q(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

ρ ist ein Maß, denn

(a) $\rho(\emptyset) = 0$.

(b) Sind $Q_i \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $i \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt, dann ist für alle $x \in X$ und alle $i \in \mathbb{N}$ die Menge $(Q_1)_x$ in $\mathcal{B}$, und die Familie $((Q_i)_x)_{i\in\mathbb{N}}$ ist paarweise disjunkt. Es folgt dann zunächst aus der σ-Additivität von ν

$$\nu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (Q_i)_x\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu((Q_i)_x). \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned} \rho\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i\Big) &\overset{\text{(def)}}{=} \int_X \nu\left(\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i\Big)_x\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_X \nu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (Q_i)_x\Big)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{(6.6)}{=} \int_X \sum_{i=1}^{\infty} \nu\Big((Q_i)_x\Big)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \int_X \nu(Q_{i_x})\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \rho(Q_i), \end{aligned}$$

wobei wir an der Stelle $(*)$ Korollar 5.3 benutzt haben; die Reihenglieder $x \longmapsto \nu\Big((Q_i)_x\Big)$ sind nicht-negative messbare Funktionen, deswegen konvergiert sie punktweise im Raum der $[0,\infty]$-wertigen Funktionen und der Limes ist wieder messbar und nicht-negativ; außerdem

besagt das Korollar, dass Reihenbildung und Integral vertauschen.

Wir haben also gezeigt, dass ρ σ-additiv ist.

Also ist ρ ein Maß auf $X \times Y$. Offensichtlich gilt für $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$,

$$\rho(A \times B) = \int_A \nu(B)\,\mathrm{d}x = \nu(B) \cdot \nu(A).$$

Also existiert ein Maß wie in (1) gefordert.

Eindeutigkeit: Schreibe $S := \{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$. Sei $\vartheta : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \mathcal{M}(S, X \times Y) \to [0, \infty]$ ein Maß, das für alle $A \times B \in S$ mit dem oben konstruierten ρ übereinstimmt, d. h. es erfüllt (6.5) mit ϑ an Stelle von $\mu \otimes \nu$.

Man überlegt sich leicht, dass

$$\mathcal{R} := \left\{ \dot{\bigcup}_{i=1}^{k} (A_i \times B_i) \;\middle|\; k \in \mathbb{N},\ \forall i :\ A_i \in \mathcal{A} \wedge B_i \in \mathcal{B} \right\}$$

der von S erzeugte Ring ist.[31] Auf Grund der Additivität von ϑ und ρ sehen wir, dass $\vartheta|_{\mathcal{R}} = \rho|_{\mathcal{R}}$.

Die Eindeutigkeitsaussage im Satz 3.9 von Hahn impliziert dann $\rho = \vartheta$.

Zu (2): (i) folgt direkt aus der Definition von $\rho = \mu \otimes \nu$.
(ii) folgt, indem wir die Rolle von X und Y vertauschen, zusammen mit der Eindeutigkeitsaussage in (1). ■

Bemerkung 6.12. Sind $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu), (Z, \mathcal{C}, \rho)$ σ-endliche Maßräume.

(1)

$$\begin{aligned} X \times Y &\xrightarrow{T} Y \times X, \\ (x, y) &\longmapsto (y, x) \end{aligned}$$

ist messbar. Für alle $Q \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $\mu \otimes \nu(Q) = \nu \otimes \mu(T(Q))$.

(2) Auf $X \times Y \times Z$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}) &= (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C} \\ \mu \otimes (\nu \otimes \rho) &= (\mu \otimes \nu) \otimes \rho. \end{aligned}$$

(3) Für das Lebesgue-Borelsche Maß λ_n^B auf $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} \lambda_n^B \otimes \lambda_m^B &= \lambda_{m+n}^B \\ \lambda_n^B &= \underbrace{\lambda_1^B \otimes \cdots \otimes \lambda_1^B}_{\text{n-mal}} \end{aligned}$$

Für das Lebesguesche Maß gelten analoge Aussagen, wenn wir noch zusätzlich vervollstän-

[31] Man überprüfe die Axiome eines Ringes in Definition 3.6. Dieser Ring ist sogar eine Algebra, deswegen ist es auch die von S erzeugte Algebra, siehe Beweis des vorangehenden Lemmas.

digen. Zum Beispiel ist λ_{m+n} die Vervollständigung von $\lambda_n \otimes \lambda_m$ oder von $\lambda_n^B \otimes \lambda_m^B$.

Beispiel 6.13. Sei $f\colon X \to [0,\infty]$ messbar. Dann ist $Q_f := \{(x,z) \mid 0 < z < f(x)\} \subset X \times [0,\infty)$ messbar. Denn:

$$\begin{aligned} (x,z) &\xrightarrow{H} f(z) - z \\ X \times [0,\infty) &\to \mathbb{R} \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

messbar, $H^{-1}(\mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}) = Q_f$.
Es gilt:

$$(\mu \otimes \lambda_1)(Q_f) = \int_X \lambda_1 \underbrace{(Q_{f_x})}_{[0,f(x))} \,\mathrm{d}x = \int_X f(x) \,\mathrm{d}x = \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

6.3 Der Satz von Fubini

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit Vervollständingung $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$. Gemäß unseren bisherigen Definitionen beinhaltet die Integrierbarkeit einer Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ auch deren Messbarkeit als Funktion $(X, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$. Manche Lehrbücher weichen hiervon leicht ab: sie fordern nur die Messbarkeit als Funktion $(X, \overline{\mathcal{A}}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$. Letzteres hat den Vorteil, dass dann manche Aussagen für eine größere Klasse von Funktionen gelten. Der Unterschied zwischen den Integrierbarkeitsbegriffen verschwindet natürlich, wenn wir einen vollständigen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ haben. Allerdings ist hier zu beachten: die Vollständigkeit von $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ impliziert oft nicht die Vollständigkeit von $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$.

Damit unsere Version des Satzes von Fubini möglichst allgemein gilt und unsere Notation dennoch mit dem vorigen kompatibel bleibt, machen wir folgende Definition.

Definition 6.14. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit Vervollständingung $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$. Eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ nennen wir* **$\mathcal{L}$-integrierbar***, wenn f als Funktion $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ messbar ist und falls*

$$\int_X |f| \,\mathrm{d}\overline{\mu} < \infty.$$

Dann ist $\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \int_X f \,\mathrm{d}\overline{\mu}$ wohldefiniert.

Es gilt somit:

$$\begin{aligned} & f \text{ ist } \mathcal{L}\text{-integrierbar} \\ \iff\ & \text{es gibt eine messbare Funktion } \tilde{f} : X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ mit} \\ & \tilde{f} = f \text{ fast überall, und } \int_X |\tilde{f}| \,\mathrm{d}\mu < \infty \\ \iff\ & \text{es gibt eine messbare Funktion } \tilde{f} : X \to \mathbb{R} \text{ mit} \\ & \tilde{f} = f \text{ fast überall, und } \tilde{f} \in \mathscr{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) \end{aligned}$$

Ebenfalls äquivalent ist:

(i) es gibt eine messbare μ-Nullmenge N, so dass die eingesch Funktion $\tilde{f} := f_{X \setminus N}$ eine messbare Funktion auf $(X \setminus N, \mathcal{A} \cap \mathcal{P}(X \setminus N), \mu) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ ist, wobei wir vereinfachend μ für die Einschränkung von μ auf $\mathcal{A} \cap \mathcal{P}(X \setminus N)$ schreiben;

(ii) und $\tilde{f} \in \mathscr{L}^1(X \setminus N, \mathcal{A}_{X\setminus N}, \mu)$.

Für die obigen Funktionen $\tilde{f}$ gilt jeweils $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X \tilde{f} \,\mathrm{d}\mu$. Ist f im bisherigen Sinne Lebesgue-integrierbar, so ist es auch $\mathcal{L}$-integrierbar.

Satz 6.15 (Satz von Fubini)**.** *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endliche Maßräume und $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ sei $\mathcal{L}$-integrierbar.*

(i) *Dann ist für fast alle $y \in Y$ die Funktion $f(\,\cdot\,, y)$ $\mathcal{L}$-integrierbar, und für fast alle $x \in X$ ist die Funktion $f(x, \,\cdot\,)$ $\mathcal{L}$-integrierbar.*

(ii) *Die fast überall definierte Funktionen $Y \to \mathbb{R}$ mit $y \longmapsto \int_X f(x,y) \,\mathrm{d}x$ und $X \to \mathbb{R}$ mit $x \longmapsto \int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}y$ sind $\mathcal{L}$-integrierbar.*

(iii)
$$\int_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \int_Y \Big(\int_X f(x,y) \,\mathrm{d}x \Big) \,\mathrm{d}y = \int_X \int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x.$$

Bemerkung 6.16. Ist obiges f eine messbare Funktion $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$, so wissen wir auf Grund von Bemerkung 6.4 bereits, dass $f(x, \,\cdot\,) = f \circ \iota_x : Y \to \mathbb{R}$ und $f(\,\cdot\,, y) = f \circ \iota_y : X \to \mathbb{R}$ messbar sind. Der Satz von Fubini gilt also auch dann, wenn wir in der Voraussetzung und in (i) $\mathcal{L}$-integrierbar durch Lebesgue-integrierbar im Sinne von Definition 4.9 ersetzen. Bei (ii) haben wir auch Lebesgue-integrierbarkeit, wenn wir den Definitionsbereich messbar wählen, was möglich ist.

Beweis von Satz 6.15: Es reicht die Aussagen zu zeigen, bei denen wir zuerst über Y und dann über X integrieren. Die anderen zeigt man analog, indem wir die Rollen von X und Y vertauschen.

1. Fall: f messbar und $f \geq 0$. Wir definieren:

$$Q_f := \{(x,y,z) \mid f(x,y) > z \geq 0\} \subset X \times Y \times [0, \infty)$$

$$\begin{aligned}
\overset{6.13}{\Longrightarrow} \int_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) &= ((\mu \otimes \nu) \otimes \lambda_1)(Q_f) = (\mu \otimes (\nu \otimes \lambda_1))(Q_f) \\
&\overset{\text{Cav.}}{=} \int_X (\nu \otimes \lambda_1)((Q_f)_x) \,\mathrm{d}x \\
\int_Y f(x, \,\cdot\,) \,\mathrm{d}\nu &\overset{6.13}{=} (\nu \otimes \lambda_1)((Q_f)_x)
\end{aligned}$$

mit

$$(Q_f)_x = \{(y,z) \in Y \times Z \mid (x,y,z) \in Q_f\} = Q_{f(x,\,\cdot\,)} \subset Y \times [0, \infty).$$

Also

$$\int_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \int_X \int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x.$$

Da f Lebesgue-integrierbar ist

$$\begin{aligned}
\infty > \int_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) &= \int_X \int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\
\Longrightarrow \int_Y f(x, \,\cdot\,) \,\mathrm{d}y &< \infty \text{ für fast alle } x \in X.
\end{aligned}$$

$f(x, \,\cdot\,)$ ist also Lebesgue-integrierbar für fast alle $x \in X$.

2. Fall: Sei $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}$-integrierbar,

$$\begin{aligned} f_+ &= \max\{f, 0\} \\ f_- &= \max\{-f, 0\} \\ f &= f_+ - f_- \end{aligned}$$

Aus der Integrierbarkeit erhalten wir[32]

$$\int_{X \times Y} |f| \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) < \infty,$$

und mit dem 1. Fall sehen wir für eine messbare Funktion $\tilde{f}$ die fast überall gleich f ist:

$$\infty > \int_{X \times Y} |f| \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \int_{X \times Y} |\tilde{f}| \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) \overset{\text{1. Fall}}{=} \int_Y \int_X |\tilde{f}(x, y)| \,\mathrm{d}\nu \,\mathrm{d}\mu.$$

Bestimme eine (messbare) Nullmenge $N_1 \subset X$, so dass für alle $x \in X \setminus N_1$ gilt:

$$\int_Y |\tilde{f}(x, \cdot\,)| \,\mathrm{d}\nu < \infty.$$

Wir[33] definieren die Nullmenge $\mathcal{N} := \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x, y) \neq \tilde{f}(x, y)\}$. Mit dem Satz von Cavalieri[34] sehen wir, dass es eine Nullmenge $N_2 \subset X$ gibt, so dass für alle $x \in X \setminus N_2$ die Menge $\mathcal{N}_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in \mathcal{N}\}$ eine Nullmenge ist. Also haben wir für jedes $x \in X \setminus (N_1 \cup N_2)$ die Aussage $f(x, \cdot\,) = \tilde{f}(x, \cdot\,)$ ν-fast überall, und somit ist $f(x, \cdot\,)$ $\mathcal{L}$-integrierbar.

Definiere $\mathcal{N}' := \mathcal{N} \cup (N_1 \times Y) \cup (N_2 \times Y)$. Wir wenden den 1. Fall auf

$$\tilde{f}_+(x, y) := \begin{cases} f_+(x, y) & \text{für } (x, y) \in X \times Y \setminus \mathcal{N}' \\ 0 & \text{für } (x, y) \in \mathcal{N}' \end{cases}$$

Zusammen genommen erhält man also:

$$\tilde{f}_-(x, y) := \begin{cases} f_-(x, y) & \text{für } (x, y) \in X \times Y \setminus \mathcal{N}' \\ 0 & \text{für } (x, y) \in \mathcal{N}' \end{cases}$$

anwenden. Wir erhalten

$$\int_{X \times Y} f \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \int_X \int_Y f(x, y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x.$$

■

[32] Wir wissen nicht $|f|$, ob messbar, aber ist is fast überall gleich zu einer messbaren Funktion.
[33] Das folgende Argument wird evtl. später noch vereinfacht.
[34] Oder alternativ, in dem wir eine ähnliche Argumentation auf $\chi_{\mathcal{N}}$ an Stelle von f anwenden. Wir erhalten dann $\int_X |\tilde{\chi}_{\mathcal{N}}(x, \cdot\,)| = 0$ für $x \in X \setminus N_2$.

7 Die Transformationsformel und Anwendungen

Wir versehen im folgenden $\mathbb{R}^n$ und offene Teilmengen U von $\mathbb{R}^n$ immer mit dem Lebesgue-Maß und der Lebesgue-Algebra $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ bzw. $\mathcal{L}_U$. Funktion sind $\mathcal{L}$-integrierbar, genau dann, wenn sie Lebesgue-integrierbar sind. Wir sagen hierzu nun einfach integrierbar.

7.1 Die Transformationsformel

7.1.1 Motivation und Formulierung der Formel

Quellenangabe: ab jetzt gehen wir nicht mehr wie in [15] vor. Das zentrale Lemma 7.4 im Beweis der Transformationsformel ist inspiriert von [3], aber ausführlicher und an unsere Vorkenntnisse angepasst. Der Schritt von Lemma 7.4 zum Beweis der Transformationsformel erscheint mir hier effizienter durchgeführt als in der Standardliteratur.

Erinnerung: Substitution in $\mathbb{R}$.
Sei $\varphi\colon [a,b] \to \varphi([a,b]) \subset \mathbb{R}$ C^1-differenzierbar, f stetig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx \\
\overset{\varphi(a)\le\varphi(b)}{\Longleftrightarrow} \int_{[a,b]} (f\circ\varphi)\cdot\varphi'\,\mathrm{d}\lambda_1 &= \int_{[\varphi(a),\varphi(b)]} f\,\mathrm{d}\lambda_1, \\
\overset{\varphi(a)\ge\varphi(b)}{\Longleftrightarrow} \int_{[a,b]} (f\circ\varphi)\cdot\varphi'\,\mathrm{d}\lambda_1 &= -\int_{[\varphi(b),\varphi(a)]} f\,\mathrm{d}\lambda_1.
\end{aligned}$$

Ist $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ ein Diffeomorphismus, oder allgemeiner gilt für alle $t \in [a,b]$ entweder $\varphi'(t) \ge 0$ oder $\varphi'(t) \le 0$, dann bekommen wir

$$\int_{[a,b]} (f\circ\varphi)\cdot|\varphi'|\,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_{\varphi([a,b])} f\,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Merkregel:

$$\begin{aligned}
x &= \varphi(t) \\
\mathrm{d}x &= \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &:= \varphi'(t).
\end{aligned}$$

Die mehrdimensionale Version hiervon ist die Transformationsformel.

Satz 7.1 (Transformationsformel)**.** *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\varphi\colon U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus.*

(1) *Für messbare Funktionen $f\colon V \to [0,\infty]$ gilt*

$$\int_V f\,\mathrm{d}\lambda_n = \int_U (f\circ\varphi)\cdot|\det J\varphi|\,\mathrm{d}\lambda_n \tag{7.1}$$

In anderen Worten:

$$\int_V f(y)\,\mathrm{d}y = \int_U (f\circ\varphi)(x)\cdot|\det J\varphi(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{7.2}$$

(2) *Eine Funktion $f\colon V\to\mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn $(f\circ\varphi)\cdot|\det J\varphi|\colon U\to\mathbb{R}$ integrierbar ist. In diesem Fall gilt ebenfalls (7.1) bzw. (7.2).*

Notation: $J\varphi = \varphi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ Jacobi-Matrix von φ

Merkregel:

$$\begin{aligned} y &= \varphi(x) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &:= \frac{\mathrm{d}(y_1,\dots,y_n)}{\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)} := \det J\varphi. \end{aligned}$$

Ist A eine messbare Menge im $\mathbb{R}^n$ ist, so ergibt Satz 7.1 für $f=\chi_A$ als Spezialfall:

Satz 7.2 (Maßtransformation)**.** *Seien $U,V\subset\mathbb{R}^n$ offen, sei $\varphi\colon U\to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Für jede messbare Menge $A\subset U$ gilt*[35]

$$\lambda_n(\varphi(A)) = \int_A |\det J\varphi|\,d\lambda_n.$$

Spezialfall:

$\varphi\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ affine Transformation, $\varphi(x)=Mx+y$ mit $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar.

$$\lambda_n(\varphi(A)) = |\det(M)|\cdot\lambda_n(A).$$

Dies ist im wesentlichen die bereits bewiesene Aussage von Satz 3.21.

7.1.2 Der in der Vorlesung präsentierte Beweis

Wir stellen nun den in der Vorlesung präsentierten Beweis dar. Wie in der Vorlesung erklärt, folgt hieraus die Transformationsformel unter der zusaätzlichen Annahme $\varphi\in C^2$.

Beweis von Satz 7.2 $\Longrightarrow$ Satz 7.1 $\varphi\in C^2$: Wir zeigen: gilt Satz 7.2, dann folgt hieraus Satz 7.1 mit der zusätzlichen Annahme $\varphi\in C^2$.

Unter den Voraussetzungen von Satz 7.1 (1) definieren wir $g := (f\circ\varphi)\cdot|\det J\varphi| : U\to[0,\infty]$. Der Satz 6.10 von Cavalieri bzw. Beispiel 6.13 impliziert[36]

$$\int_V f\,\mathrm{d}\lambda_n = \lambda_{n+1}(Q_f),$$

[35] Dies bedeutet: für alle $A\in\mathcal{L}_U$ gilt

[36] Streng genommen haben wir in Beispiel 6.13 in der Vorlesung wurden zunächst nur Funktionswerte in $[0,\infty)$ zugelassen. Wir haben dies nachträglich angepasst! Außerdem ist es praktischer $(0,\infty]$ statt $[0,\infty)$ als Werte zu betrachten, was ebenfalls keinen wesentlichen Unterschied macht.

$$\int_U g \, \mathrm{d}\lambda_n = \lambda_{n+1}(Q_g),$$

wobei $Q_f := \{(x,y) \in V \times (0,\infty) \mid f(x) > y\}$ und $Q_g := \{(x,y) \in U \times (0,\infty) \mid g(x) > y\}$. Nun definiert $(x,y) \longmapsto \Phi(x,y) := (\varphi(x), y/|\det J\varphi|)$ eine biljektive Abbildung $\Phi : Q_g \to Q_f$. Ist $\varphi \in C^\ell$, so ist $\Phi \in C^{\ell-1}$. Es gilt

$$|\det J\Phi| = \left|\det \begin{pmatrix} J\varphi & 0 \\ * & 1/|\det J\varphi| \end{pmatrix}\right| = |\det J\varphi|/|\det J\varphi| = 1,$$

wobei $*$ einen für die Diskussion nicht weiter relevanten Zeilen-Vektor in $\mathbb{R}^{1\times n}$ bezeichnet. Wenn wir nun Satz 7.2 auf $n+1$ statt n, Q_g statt U, Q_f statt V und Φ statt φ anwenden, so erhalten wir

$$\lambda_{n+1}(Q_f) = \int_{Q_g} 1 \, \mathrm{d}\lambda_{n+1} = \lambda_{n+1}(Q_g).$$

Dies impliziert Satz 7.1 (1).

Gilt Satz 7.1 (1) so folgt hieraus Satz 7.1 (2) mit der zusätzlichen Voraussetzung $\varphi \in C^2$ wie folgt. Zu einer messbaren Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ definieren wir $g := (f \circ \varphi) \cdot |\det J\varphi| : U \to \mathbb{R} \in C^1$. Nach (1) gilt

$$\int_V |f| \, \mathrm{d}\lambda_n = \int_U |g| \, \mathrm{d}\lambda_n$$

und daraus folgt, dass f genau dann integrierbar ist, wenn g integrierbar ist. Indem wir Satz 7.1 (1) mit der Zusatz-Voraussetzung auf $g_\pm = (f_\pm \circ \varphi) \cdot |\det J\varphi|$ anwenden, erhalten wir (2). ■

Bemerkung 7.3. Wir haben sogar bewiesen, dass jede Aussage die nachfolgende impliziert:

(a) Satz 7.1 für nicht-negative messbare numerische Funktionen, d. h. Satz 7.1 (1).

(b) Satz 7.1 beide Aussagen

(c) Satz 7.2

(d) Sind U und V offen in $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ und ist $\varphi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismen mit $|\det J\varphi| \equiv 1$, dann gilt für alle messbaren $A \subset U$:

$$\lambda_n(\varphi(A)) = \lambda_n(A).$$

(e) Satz 7.1 für nicht-negative messbare numerische Funktionen und für $\varphi \in C^2$, d. h. Satz 7.1 (1) für $\varphi \in C^2$.

(f) Satz 7.1 beide Aussagen, aber mit $\varphi \in C^2$

Lemma 7.4. *Seien U, V, φ wie oben. Dann gilt für achsenparallele beschränkte Quader Q mit rationalen Eckpunkten und mit $\overline{Q} \subset U$:*

$$\lambda_n(\varphi(Q)) \le \lambda_n(Q).$$

Beweis: Auf $\mathbb{R}^n$ wählen wir im folgenden die Norm $\|\cdot\|_\infty$. Auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ wählen wir die Norm

$$\left\|(a_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}\right\| := n\cdot\max\left\{|a_{ij}| \;\middle|\; i,j\in\{1,\dots,n\}\right\} \quad \forall (a_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

Dann haben wir

$$\|Ax\|_\infty \le \|A\|\cdot\|x\|_\infty \quad \forall x\in\mathbb{R}^n\,\forall A\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

Da die Seitenflächen eines Quaders Nullmengen sind, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass

$$Q=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n],$$

wobei $a_i,b_i\in\frac{1}{k}\mathbb{Z}$ mit $a_i\le b_i$, $k\in\mathbb{N}$. Zu einem gegebenen und zunächst fixierten $\epsilon>0$ definieren wir für jedes $x_0\in Q$:

$$\mathcal{U}_{x_0} := \left\{\tilde{x}\in Q \;\middle|\; \left\|\Big(J\varphi(x_0)\Big)^{-1}\Big(J\varphi(\tilde{x})\Big)-\mathbb{1}_n\right\|<\varepsilon\right\}.$$

Da φ stetig differenzierbar ist, ist dies ist eine offene Umgebung von x_0 in Q, d. h. $(\mathcal{U}_{x_0})_{x_0\in Q}$ ist eine offene Überdeckung von Q. Auf Grund von Analysis II, Kapitel 8, Proposition 6.17 gibt es zu dieser Überdeckung eine Lebesguesche Zahl, d. h. ein $\delta>0$, so dass es für jedes $x\in Q$ ein $x_0\in Q$ gibt mit

$$B_\delta^{Q,\|\cdot\|_\infty}(x)\subset\mathcal{U}_{x_0}.$$

Wähle jeweils solch ein x_0 und definiere $M_x := J\varphi(x_0)$. Man beachte, dass $B_\delta^{Q,\|\cdot\|_\infty}(x)$ ein Würfel mit Zentrum x von Seitenlänge 2δ ist.

Wir wählen ein $\ell\in k\mathbb{N}$ mit $1/(2\ell)<\delta$. Dann ist Q die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Würfeln der Form

$$\widehat{Q}_x := \overline{B_{1/(2\ell)}(x)}, \quad x=\left(\frac{c_1+(1/2)}{\ell},\dots,\frac{c_n+(1/2)}{\ell}\right), \quad c_i\in\mathbb{Z}.$$

Sei I die Menge[37] aller dieser Würfelzentren x. Da die zugehörigen offenen Würfel $\big(B_{1/(2\ell)}(x)\big)_{x\in I}$ paarweise disjunkt sind, haben wir $\lambda_n(Q)=\sum_{x\in I}\lambda_n(\widehat{Q}_x)$.

Für jedes $x\in I$ und $\tilde{x}\in\widehat{Q}_x$ gilt

$$\left\|\Big(M_x\Big)^{-1}\Big(J\varphi(\tilde{x})\Big)-\mathbb{1}_n\right\|<\varepsilon.$$

Für festes $x\in I$ definieren wir den C^1-Diffeomorphismus $\psi: U\to\psi(U)=\Big(M_x\Big)^{-1}\big(V-\varphi(x)\big)$, $\psi(\tilde{x}) := \Big(M_x\Big)^{-1}(\varphi(\tilde{x})-\varphi(x))$. Auf Grund der affin-linearen Maßtransformationsformel, d. h. Satz 3.21, gilt[38]

$$\lambda_n(\varphi(\widehat{Q}_x)) = |\det(M_x)|\cdot\lambda_n\left(\Big(M_x\Big)^{-1}(\varphi(\widehat{Q}_x)-\varphi(x))\right) = |\det(M_x)|\cdot\lambda_n(\psi(\widehat{Q}_x)).$$

[37] Diese Menge ist also endlich, genauer $\#M=(b_1-a_1)\cdots(b_n-a_n)\cdot\ell^n$

[38] Notation: $\Big(M_x\Big)^{-1}\big(V-\varphi(x)\big) := \{\Big(M_x\Big)^{-1}(y-\varphi(x)) \mid y\in V\}$

Für jedes $x \in I$ und $\tilde{x} \in \widehat{Q}_x$ gilt $J\psi(\tilde{x}) = (M_x)^{-1} J\varphi(\tilde{x})$ und somit

$$\|J\psi(\tilde{x}) - \mathbb{1}_n\| < \varepsilon.$$

Es gilt $\psi(\widehat{Q}_x) \subset B_{((1+\epsilon)/(2\ell)}(0)$, denn für $\tilde{x} \in Q_x$ gilt

$$\begin{aligned}
\|\psi(\tilde{x})\|_\infty &= \|\psi(\tilde{x}) - \underbrace{\psi(x)}_{} = 0\|_\infty \\
&= \left\| \int_0^1 \frac{d}{dt}\psi(t\tilde{x} + (1-t)x)\, \mathrm{d}t \right\|_\infty \\
&\leq \int_0^1 \|(J\psi(t\tilde{x} + (1-t)x) - \mathbb{1}_n + \mathbb{1}_n) \cdot (\tilde{x} - x)\|_\infty \, \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 \left(\underbrace{\|J\psi(t\tilde{x} + (1-t)x) - \mathbb{1}\|}_{<\epsilon} \cdot \|\tilde{x} - x\|_\infty + \|\tilde{x} - x\|_\infty \right) \mathrm{d}t \\
&\leq (1+\epsilon)\, \|\tilde{x} - x\|_\infty .
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\lambda_n(\psi(\widehat{Q}_x)) \leq \lambda_n\Big(B_{((1+\epsilon)/(2\ell)}(0)\Big) = \left(\frac{1+\epsilon}{\ell}\right)^n = (1+\epsilon)^n \lambda_n(\widehat{Q}_x).$$

Durch Kombination der bewiesenen Ungleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lambda_n(\varphi(Q)) &\leq \sum_{x \in I} \cdot (1+\epsilon)^n \cdot \lambda_n(\widehat{Q}_x) \\
&= \int_Q \left(\sum_{x \in I} (1+\epsilon)^n \cdot \chi_{\widehat{Q}_x} \right) \mathrm{d}\lambda_n \\
&= (1+\epsilon)^n \cdot \lambda_n(Q).
\end{aligned}$$

Die Konstruktion von I und $\widehat{Q}_x$ hängt von dem gewählten ℓ ab und dies wiederum von ε ab.

Im Limes $\varepsilon \to 0$ folgt dann das Lemma.[39] ■

Jede offene Teilmenge W von U ist die abzählbare disjunkte Vereinigung von Quadern, die die Voraussetzungen des Lemmas erfüllen. Deswegen folgt:

Korollar 7.5. *Seien U, V, φ wie oben, $|\det J\varphi| \equiv 1$. Für alle $W \Subset U$ gilt:*

$$\lambda_n(\varphi(W)) \leq \lambda_n(W).$$ ■

Da auch $\varphi^{-1} : V \to U$ ein C^1-Diffeomorphismus ist, so gilt wegen

$$\left|\det J(\varphi^{-1})(y)\right| = \left|\det \Big(J\varphi\big(\varphi^{-1}(y)\big)\Big)^{-1}\right| \equiv 1$$

[39] Man beachte: im Beweis haben wir – um die Formulierungen einfacher zu halten – die bereits bekannte Tatsache benutzt, dass die Seitenhyperflächen der Würfel $\widehat{Q}_x$ (also z.B, die Menge $\{c_1/\ell\} \times [c_2/\ell, (c_2+1)/\ell] \times \cdots \times [c_n/\ell, (c_n+1)/\ell]$) Nullmengen sind. Wir haben nicht die bisher noch unbewiesene Aussage verwendet, dass Seitenhyperflächen der $\varphi(\widehat{Q}_x)$ Nullmengen sind. Letzteres folgt als Korollar aus der Transformationsformel, siehe kurz danach.

auch $\lambda_n(\varphi^{-1}(\varphi(W))) \leq \lambda_n(\varphi(W))$. Also haben wir:

Korollar 7.6. *Seien U, V, φ wie oben und es gelte $|\det J\varphi| \equiv 1$. Für alle $W \Subset U$ gilt:*

$$\lambda_n(\varphi(W)) = \lambda_n(W).$$

■

Di 4.2.

Beweis von Sätzen 7.1 und 7.2: Der Beweis ist nach all den Vorarbeiten nun fast offensichtlich. Wir weisen (d) in Bemerkung 7.3 nach.

Die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra ist die Borel-Algebra. Man prüft leicht, dass $\varphi^*\lambda_n^B : W \longmapsto \lambda_n^B(\varphi(W))$ ein Maß auf $\mathcal{B}_U$ definiert, das auf den offenen Teilmengen von U mit λ_n^B übereinstimmt. Nach dem Satz 3.9 von Hahn gilt also $\varphi^*\lambda_n^B = \lambda_n^B$.

Deswegen bilden φ und φ^{-1} Nullmengen auf Nullmengen ab, also Lebesgue-messbare Mengen auf Lebesgue-messbare Mengen. Wir bekommen hieraus (d) in Bemerkung 7.3. ■

7.1.3 Ein anderer Beweis, der die Sätze 7.1 und 7.2 in voller Allgemeinheit ergibt

Dieser Abschnitt ist nicht Teil der Vorlesung und in Methoden und Resultaten sehr ähnlich zu dem vorangehenden Abschnitt, der Teil der Vorlesung ist.[40]

Lemma 7.7. *Seien $U, V \Subset \mathbb{R}^n$ und $\varphi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann gilt für achsenparallele beschränkte Quader Q mit rationalen Eckpunkten und mit $\overline{Q} \subset U$:*

$$\lambda_n(\varphi(Q)) \leq \int_Q |\det J\varphi| \, \mathrm{d}\lambda_n.$$

Beweis: Auf $\mathbb{R}^n$ wählen wir im folgenden die Norm $\|\cdot\|_\infty$. Auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ wählen wir die Norm

$$\left\|(a_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}\right\| := n \cdot \max\left\{|a_{ij}| \;\middle|\; i,j \in \{1,\dots,n\}\right\} \quad \forall (a_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Dann haben wir

$$\|Ax\|_\infty \leq \|A\| \cdot \|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \, \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Da die Seitenflächen eines Quaders Nullmengen sind, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

wobei $a_i, b_i \in \frac{1}{k}\mathbb{Z}$ mit $a_i \leq b_i$, $k \in \mathbb{N}$. Zu einem gegebenen und zunächst fixierten $\epsilon > 0$ definieren wir für jedes $x_0 \in Q$:

$$\mathcal{U}_{x_0} := \left\{ \tilde{x} \in Q \;\middle|\; \left\| \Big(J\varphi(x_0)\Big)^{-1} \Big(J\varphi(\tilde{x})\Big) - \mathbb{1}_n \right\| < \varepsilon \right\}.$$

Da φ stetig differenzierbar ist, ist dies ist eine offene Umgebung von x_0 in Q, d. h. $(\mathcal{U}_{x_0})_{x_0\in Q}$ ist eine offene Überdeckung von Q. Auf Grund von Analysis II, Kapitel 8, Proposition 6.17 gibt es zu

[40] Kleine Details müssen noch poliert werden, noch keine endgültige Version!

dieser Überdeckung eine Lebesguesche Zahl, d. h. ein $\delta > 0$, so dass es für jedes $x \in Q$ ein $x_0 \in Q$ gibt mit

$$B_\delta^{Q,\|\cdot\|_\infty}(x) \subset \mathcal{U}_{x_0}.$$

Wähle jeweils solch ein x_0 und definiere $M_x := J\varphi(x_0)$. Man beachte, dass $B_\delta^{Q,\|\cdot\|_\infty}(x)$ ein Würfel mit Zentrum x von Seitenlänge 2δ ist.

Wir wählen ein $\ell \in k\mathbb{N}$ mit $1/(2\ell) < \delta$. Dann ist Q die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Würfeln der Form

$$\widehat{Q}_x := \overline{B_{1/(2\ell)}(x)}, \quad x = \left(\frac{c_1 + (1/2)}{\ell}, \dots, \frac{c_n + (1/2)}{\ell}\right), \quad c_i \in \mathbb{Z}.$$

Sei I die Menge[41] aller dieser Würfelzentren x. Da die zugehörigen offenen Würfel $\big(B_{1/(2\ell)}(x)\big)_{x\in I}$ paarweise disjunkt sind, haben wir $\lambda_n(Q) = \sum_{x\in I} \lambda_n(\widehat{Q}_x)$.

Für jedes $x \in I$ und $\tilde{x} \in \widehat{Q}_x$ gilt

$$\left\| \Big(M_x\Big)^{-1} \Big(J\varphi(\tilde{x})\Big) - \mathbb{1}_n \right\| < \varepsilon.$$

Für festes $x \in I$ definieren wir den C^1-Diffeomorphismus $\psi : U \to \psi(U) = \Big(M_x\Big)^{-1}\big(V - \varphi(x)\big)$, $\psi(\tilde{x}) := \Big(M_x\Big)^{-1}(\varphi(\tilde{x}) - \varphi(x))$. Auf Grund der affin-linearen Maßtransformationsformel, d. h. Satz 3.21, gilt[42]

$$\lambda_n(\varphi(\widehat{Q}_x)) = |\det(M_x)| \cdot \lambda_n\left(\Big(M_x\Big)^{-1}(\varphi(\widehat{Q}_x) - \varphi(x))\right) = |\det(M_x)| \cdot \lambda_n(\psi(\widehat{Q}_x)).$$

Für jedes $x \in I$ und $\tilde{x} \in \widehat{Q}_x$ gilt $J\psi(\tilde{x}) = (M_x)^{-1} J\varphi(\tilde{x})$ und somit

$$\|J\psi(\tilde{x}) - \mathbb{1}_n\| < \varepsilon.$$

Es gilt $\psi(\widehat{Q}_x) \subset B_{((1+\epsilon)/(2\ell)}(0)$, denn für $\tilde{x} \in Q_x$ gilt

$$\begin{aligned}
\|\psi(\tilde{x})\|_\infty &= \|\psi(\tilde{x}) - \underbrace{\psi(x)}_{} = 0\|_\infty \\
&= \left\| \int_0^1 \frac{d}{dt}\psi(t\tilde{x} + (1-t)x)\, \mathrm{d}t \right\|_\infty \\
&\le \int_0^1 \|(J\psi(t\tilde{x} + (1-t)x) - \mathbb{1}_n + \mathbb{1}_n) \cdot (\tilde{x} - x)\|_\infty \, \mathrm{d}t \\
&\le \int_0^1 \left(\underbrace{\|J\psi(t\tilde{x} + (1-t)x) - \mathbb{1}\|}_{<\epsilon} \cdot \|\tilde{x} - x\|_\infty + \|\tilde{x} - x\|_\infty \right) \mathrm{d}t \\
&\le (1+\epsilon)\, \|\tilde{x} - x\|_\infty .
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\lambda_n(\psi(\widehat{Q}_x)) \le \lambda_n\Big(B_{((1+\epsilon)/(2\ell)}(0)\Big) = \left(\frac{1+\epsilon}{\ell}\right)^n = (1+\epsilon)^n \lambda_n(\widehat{Q}_x).$$

[41] Diese Menge ist also endlich, genauer $\#M = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) \cdot \ell^n$

[42] Notation: $\Big(M_x\Big)^{-1}\big(V - \varphi(x)\big) := \{\Big(M_x\Big)^{-1}(y - \varphi(x)) \mid y \in V\}$

Durch Kombination der bewiesenen Ungleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned}\lambda_n(\varphi(Q)) &\leq \sum_{x\in I} |\det(M_x)| \cdot (1+\epsilon)^n \cdot \lambda_n(\widehat{Q}_x) \\ &= (1+\epsilon)^n \cdot \int_Q \left(\sum_{x\in I} |\det(M_x)| \chi_{\widehat{Q}_x}\right) \mathrm{d}\lambda_n.\end{aligned}$$

Die Konstruktion von I und $\widehat{Q}_x$ hängt von dem gewählten ℓ ab. Im Grenzwert ℓ konvergiert der Integrand fast überall gegen $x \longmapsto |\det J\varphi(x)|$. Mit dem Satz über majorisierte Konvergenz sieht man leicht, dass die rechte Seite im Limes $\ell \to \infty$ gegen

$$(1+\epsilon)^n \int_Q |\det J\varphi| \, \mathrm{d}\lambda_n$$

konvergiert.

Im Limes $\varepsilon \to 0$ folgt dann das Lemma.[43] ■

Lemma 7.8. *Seien $U, V \Subset \mathbb{R}^n$ und $\varphi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Für alle $W \Subset V$ gilt*

$$\lambda_n(W) \leq \int_{\varphi^{-1}(W)} |\det J\varphi| \, \mathrm{d}\lambda_n.$$

Beweis: Da W offen in V ist, ist $\varphi^{-1}(W)$ offen in U. Jede offene Teilmenge U ist die abzählbare disjunkte Vereinigung von Quadern, die die Voraussetzungen des vorigen Lemmas 7.7 erfüllen. Die zu beweisende Aussage folgt dann durch Summation. ■

Proposition 7.9. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g : X \to [0, \infty]$ messbare Funktionen. Dann gilt:*

$$\int_X fg \, \mathrm{d}\mu = \int_{(0,\infty)} \int_{f^{-1}\left((y,\infty]\right)} g \, \mathrm{d}\mu \, \mathrm{d}y.$$

Beweis: Wir definieren

$$Q_f := \{(x, y) \in X \times (0, \infty) \mid f(x) > y\}.$$

Aus der offensichtlichen Identität

$$f(x) = \int_0^{f(x)} 1 \, \mathrm{d}y = \int_{(0,\infty)} \chi_{Q_f}(x, y) \, \mathrm{d}y$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_X fg \, \mathrm{d}\mu &= \int_X \left(\int_{(0,\infty)} \chi_{Q_f}(x, y) g(x) \, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \int_{X\times(0,\infty)} \chi_{Q_f}(x, y) g(x) \, \mathrm{d}(x, y)\end{aligned}$$

[43] Man beachte: im Beweis haben wir – um die Formulierungen einfacher zu halten – die bereits bekannte Tatsache benutzt, dass die Seitenhyperflächen der Würfel $\widehat{Q}_x$ (also z.B, die Menge $\{c_1/\ell\} \times [c_2/\ell, (c_2+1)/\ell] \times \cdots \times [c_n/\ell, (c_n+1)/\ell]$) Nullmengen sind. Wir haben nicht die bisher noch unbewiesene Aussage verwendet, dass Seitenhyperflächen der $\varphi(\widehat{Q}_x)$ Nullmengen sind. Letzteres folgt als Korollar aus der Transformationsformel, siehe kurz danach.

$$\overset{(*)}{=} \int_{(0,\infty)} \int_{f^{-1}((y,\infty])} g \, \mathrm{d}\mu \, \mathrm{d}y,$$

wobei wir an den Stellen $(*)$ die offensichtliche Modifikation des Satzes von Fubini für nicht-negative Funktionen (d.h. den 1. Fall im Beweis von Satz 6.15) nutzen. ■

Lemma 7.10. *Seien $U, V \Subset \mathbb{R}^n$ und $\varphi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Für nicht-negative stetige Funktionen $f : V \to [0, \infty]$ gilt*

$$\int_V f \, \mathrm{d}\lambda_n \leq \int_U (f \circ \varphi) \cdot |\det J\varphi| \, \mathrm{d}\lambda_n.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\int_V f \, \mathrm{d}\lambda_n &\overset{(+)}{=} \int_0^\infty \lambda_n\Big(f^{-1}\big((y,\infty]\big)\Big) \, \mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Lem. 7.8}}{\leq} \int_0^\infty \left(\int_{\varphi^{-1}\left(f^{-1}\left((y,\infty]\right)\right)} |\det J\varphi| \, \mathrm{d}\lambda_n \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{(f\circ\varphi)^{-1}\left((y,\infty]\right)} |\det J\varphi| \, \mathrm{d}\lambda_n \right) \mathrm{d}y \\
&\overset{(*)}{=} \int_U (f \circ \varphi) |\det J\varphi| \, \mathrm{d}\lambda_n,
\end{aligned}$$

wobei wir Proposition 7.9 an der Stelle $(+)$ für $g := 1$, $X := V$ und an der Stelle $(*)$ für $g := |\det J\varphi|$, $X := U$, $f \circ \varphi$ statt f genutzt haben. ■

Korollar 7.11. *Seien $U, V \Subset \mathbb{R}^n$ und $\varphi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Für nicht-negative stetige Funktionen $f : V \to [0, \infty]$ gilt*

$$\int_V f \, \mathrm{d}\lambda_n = \int_U (f \circ \varphi) \cdot |\det J\varphi| \, \mathrm{d}\lambda_n.$$

Beweis: „$\leq$“ ist bereits gezeigt. Um „$\geq$“ zu erhalten, wenden wir das vorangehende Korollar auf $\tilde{\varphi} := \varphi^{-1} \colon \widetilde{U} := V \to \widetilde{V} := U$ und $\tilde{f} := (f \circ \varphi) \cdot |\det J\varphi|$ an. Wir haben

$$\det J\tilde{\varphi}(y) = \det\Big(J\varphi\big(\tilde{\varphi}(y)\big)\Big)^{-1} = \Big(\det J\varphi\big(\tilde{\varphi}(y)\big)\Big)^{-1}$$

und somit

$$(\tilde{f} \circ \tilde{\varphi}) \cdot |\det J\tilde{\varphi}| = f \cdot \Big(|\det J\varphi| \circ \tilde{\varphi}\Big) \cdot \Big(|\det J\varphi| \circ \tilde{\varphi}\Big)^{-1} = f.$$

Wir erhalten „$\geq$“. ■

Beweis von Sätzen 7.1 und 7.2: Der Beweis ist nach all den Vorarbeiten nun nicht mehr aufwändig.

Die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra ist die Borel-Algebra. Man prüft leicht, dass

$$\varphi_* \lambda_n^B : W \longmapsto \int_{\varphi^{-1}(W)} |\det J\varphi| \, \mathrm{d}\lambda_n^B$$

ein Maß auf $\mathcal{B}_V$ definiert.

Ist W eine offene Teilmenge von V, so gilt $\varphi_* \lambda_n^B(W) = \lambda_n^B(W)$: Um dies zu zeigen, wenden wir vorangehende Korollar auf $\tilde{U} := \varphi^{-1}(W)$, $\tilde{V} := W$, $f :\equiv 1$ und $\tilde{\varphi} := \varphi|_{\tilde{U}}$ an.

Nach der Eindeutigkeitsaussage im Satz 3.9 von Hahn gilt also $\varphi_* \lambda_n^B = \lambda_n^B$. In anderen Worten: Lemma 7.8 gilt mit „=“ statt „≤“ und für alle $W \in \mathcal{L}_V$. Mit $W := \varphi(A)$ sieht man wiederum, dass dies genau die Aussage von Satz 7.2 ist.

Man kann nun den Beweis von Lemma 7.10 nahezu wörtlich übernehmen, die Stetigkeit von f durch die Messbarkeit ersetzen und wir bekommen dann überall in diesem Beweis „=“ statt „≤“. Somit ist dann die Transformationsformel Satz 7.1 gezeigt. ■

7.1.4 Mehr zu Nullmengen

Korollar 7.12. *Sei $\mathcal{N}$ eine Nullmenge, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\mathcal{N} \subset U$ und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ C^1, so dass* $\det Jf$ *nirgends verschwindet, dann ist $f(\mathcal{N})$ ebenfalls eine Nullmenge.*

Denn: solche Abbildungen sind lokal ein C^1-Diffeomorphismus. ■

Bemerkung 7.13.

(1) Es gilt sogar die folgende etwas stärkere Aussage: Ist $\mathcal{N}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$ und ist $f\colon \mathcal{N} \to \mathbb{R}^n$ eine (lokal) Lipschitz-stetige Abbildung, dann ist auch $f(\mathcal{N})$ eine Nullmenge. Der Beweis ohne „lokal“ ist in [15, IV, § 3, (3.2) Satz] zu finden, die Verallgemeinerung auf „lokal Lipschitz-stetig“ dann offensichtlich. Siehe hierzu auch Anhang B.2.

(2) Man kann hier „Lipschitz-stetig“ nicht durch „stetig“ ersetzen, denn es gibt eine surjektive stetige Abbildung $\varphi : [0,1] \to [0,1]^n$ und wenn wir diese Abbildung nach der Projektion $[0,1]^n \to [0,1]$ auf die erste Komponente ausführen, so erhalten wir für $n > 1$ eine Abbildung $[0,1]^n \to [0,1]^n$, die die Nullmenge $[0,1] \times \{0\}$ auf die Menge $[0,1]^n$ mit Maß 1 abbildet.

Beispiel 7.14. (Anwendungen der Transformationsformel und des obigen Korollars)

(1) Ist $U \subset \mathbb{R}^k$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ eine C^1 Abbildung, $n > k$. Dann ist auch $\mathrm{Graph}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \mid x \in U\}$ eine Nullmenge. Definiere $F : U \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, $F(x,y) := (x, f(x)) \in \mathbb{R}^n$, $F \in C^1$ und $\det JF \neq 0$. Somit ist $\mathrm{Graph}(f) = F(U \times \{0\})$ eine Nullmenge, denn $U \times \{0\}$ ist eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.

(2) Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $k < n$ mit Regularität C^ℓ, $\ell \geq 1$, dann ist M lokal ein Graph einer C^ℓ-Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$, U offen in $\mathbb{R}^k$ (nach Permutation der Koordinaten). Also ist auch M eine Nullmenge.

Den ersten Teil des Beispiel kann man übrigens leicht verallgemeinern:

Lemma 7.15. *Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ Lebesgue-messbar, und ist $f : (U, \mathcal{L}_U) \to (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m})$ messbar, $m \geq 1$. Dann ist* $\operatorname{graph}(f) \subset \mathbb{R}^{k+m}$ *eine Nullmenge.*

Beweis: O. B. d. A. sei $U = \mathbb{R}^k$, sonst setze f durch 0 auf $\mathbb{R}^k$ fort. Man überlegt sich leicht, dass $(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \longmapsto f(x) - y$ messbar im Sinne von Abbildungen $F : (\mathbb{R}^{k+m}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}^{k+m}}) \to (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m})$ ist. Somit ist $\operatorname{graph}(f) = F^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^{k+m}}$. Der Satz 6.10 von Cavalieri besagt, dass

$$\lambda_{k+m}(\operatorname{graph}(f)) = \int_{\mathbb{R}^k} \underbrace{\lambda_m(\{f(x)\})}_{=0} \, \mathrm{d}x = 0 \,.$$

■

7.2 Integration in krummlinigen Koordinaten

7.2.1 Polarkoordinaten der Ebene

$P \colon [0, \infty) \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ mit $(r, \varphi) \longmapsto re^{i\varphi} = (x, y)^T$.
$\tilde{P} := P|_{(0,\infty)\times(0,2\pi)}$ ist ein C^1-Diffeomorphismus auf sein Bild.

$$\begin{aligned}
&[0, \infty) \times [0, 2\pi] \setminus (0, \infty) \times (0, 2\pi) = [0, \infty) \times \{0, 2\pi\} \\
&\text{Nullmenge in } \mathbb{R}^2. \\
&\mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{Bild}(\tilde{P}) = \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \\
&\text{Nullmenge in } \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(1) integrierbar oder

(2) $f \geq 0$, numerisch und messbar.

Dann

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} f \, \mathrm{d}\lambda_2 &= \int_{\operatorname{Bild}(\tilde{P})} f \, \mathrm{d}\lambda_2 \\
&= \int_{(0,\infty)\times(0,2\pi)} (f \circ \tilde{P}) |\det J\tilde{P}| \, \mathrm{d}\lambda_2 \qquad \text{(Trafo)} \\
&= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (f \circ \tilde{P})(r, \varphi) \cdot r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \\
JP(r, \varphi) &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \implies \det JP = r.
\end{aligned}$$

Beispiel 7.16 (Integration der Gaußschen Glockenfunktion)**.** Sei $\alpha > 0$. Die Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := e^{-\alpha x^2}$$

ist in der Stochastik und in der Fehlerrechnung so wichtig, dass sie sogar auf dem letzten 10-DM-Schein abgedruckt wurde, siehe Abbildung 7.1. Man nennt sie die Gaußsche Glockenkurve.

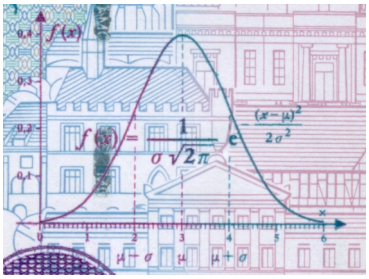


Abbildung 7.1: Die Gaußsche Glockenkurve wurde sogar auf den letzten 10-DM-Schein gedruckt. Quelle der Bilder Wikipedia und Didaktik der Mathematik an der Univ. Würzburg

Da f stetig und nicht-negativ ist, gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\lambda_1 < \infty \quad &\Longleftrightarrow \quad f \text{ Lebesgue-integrierbar} \\ &\Longleftrightarrow \quad f \text{ uneigentlich Riemann-integrierbar} \end{aligned}$$

Wir rechnen mit dem Satz von Fubini und dann in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} \, \mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} \, \mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha y^2} \, \mathrm{d}y\right) \\ &\overset{\text{Fub.}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\alpha(x^2+y^2)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &\overset{\text{Trafo}}{=} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\alpha r^2} r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \\ &\overset{\text{Subs.}}{=} 2\pi \int_0^\infty e^{-s} \frac{1}{2\alpha} \, \mathrm{d}s \\ &= \frac{\pi}{\alpha} \end{aligned}$$

Hierbei haben wir $s = \alpha r^2$ substituiert. Wir argumentieren in obiger Gleichungskette wie folgt von unten nach oben: Das Integral der zweitletzten Zeile konvergiert im uneigentlichen Riemannschen Sinne[44]. Wir können also substituieren und erhalten die drittletzte Zeile unter Verwendung von $\int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}\varphi = 2\pi$. Hierbei ist das Integral von 0 bis ∞ zunächst im uneigentlichen Riemannschen Sinn zu verstehen, aber da der Integrand nicht-negativ ist, folgt dann aus dem Satz über monotone Konvergenz, dass es auch im Lebesgueschen Sinn in existiert und gleich π/α ist. Wir wenden in der Umformung von der zweiten zur dritten Zeile die Transformationsformel im Sinne von Satz 7.1 (1)

[44] Da der Integrand nicht-negativ ist, folgt dann aus dem Satz über monotone Konvergenz, dass es auch im Lebesgueschen Sinn existiert, aber dies ist für unsere Argumentation nicht wichtig.

an, was erlaubt ist, da $(x,y) \longmapsto e^{-\alpha(x^2+y^2)}$ stetig und somit messbar ist. Aufgrund des bereits Bewiesenen folgt dann auch $e^{-\alpha(x^2+y^2)} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^2, \lambda_2)$. Mit Hilfe des Satzes 6.15 von Fubini [45] kommen wir beim Beginn der Gleichungskette an.

Wir erhalten

$$\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,.$$

7.2.2 Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} K\colon (r,\varphi,\vartheta)^T &\longmapsto r(\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)^T \\ Q := [0,\infty]\times[0,2\pi]\times[0,\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

K ist ein C^1-Diffeomorphismus von $\mathring{Q}$ nach $K(\mathring{Q})$, $\mathbb{R}^3 \setminus K(\mathring{Q})$ Nullmenge, $Q \setminus \mathring{Q}$ Nullmenge.

$$JK = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

Es gilt also $\det JK = -r^2\sin\vartheta$. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ integrierbar und es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (f\circ K)(r,\varphi,\vartheta)\cdot r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r.$$

Beispiel 7.17 (Volumen des Einheitsballs in $\mathbb{R}^3$)**.**

$$\begin{aligned} \lambda_3\left(B_1^{\mathbb{R}^3}(0)\right) &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^\pi 1\cdot r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= \underbrace{\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r}_{=\frac{1}{3}}\ \underbrace{\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\varphi}_{=2\pi}\ \underbrace{\int_0^\pi \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta}_{=2} \\ &= \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

7.2.3 Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} Z\colon \mathbb{R}\times[0,\infty)\times[0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,r,\varphi) &\longmapsto (x, r\cos\varphi, r\sin\varphi) \end{aligned}$$

ist C^1 im Inneren des Definitionsbereichs.

$$\det JZ = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r.$$

[45] Alternativ könnte man auch die offensichtliche Modifikation des Satzes von Fubini für nicht-negative Funktionen (d.h. der 1. Fall im Beweis von Satz 6.15 von Fubini hier nutzen.

Solche Koordinaten nennt man **Zylinderkoordinaten**.

Beispiel 7.18 (Volumina von Rotationskörpern um die x-Achse)**.** Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine messbare Funktion,

$$M_f := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \in [a,b],\ y^2 + z^2 \leq f(x)^2 \right\},$$

Das Volumen von M_f ist

$$\lambda_3(M_f) = \int_{\mathbb{R}^3} \chi_{M_f} \,\mathrm{d}\lambda_3.$$

$$\chi_{M_f} \circ Z(x,r,\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{falls } r \leq f(x) \text{ und } x \in [a,b] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach Trafo-Formel gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}(M_f) &= \lambda_3(M_f) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \chi_{M_f} \,\mathrm{d}\lambda_3 \\
&= \int_a^b \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (\chi_{M_f} \circ Z)(x,r,\varphi) \cdot \underbrace{\left|\det JZ(x,r,\varphi)\right|}_{=r} \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_a^b \int_0^{f(x)} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_a^b \frac{1}{2}(f(x))^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \int_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Beispiel 7.19. Sei nun $f\colon [0,b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, $b < \infty$, $f(0) = 0$, $A_f := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(\sqrt{x^2+z^2}) \leq y \leq f(b)\}$.
Ziel: $\lambda_3(A_f) =?$.
Erster denkbarer Lösungsweg:[46] Bestimme die Umkehrfunktion. Gehe dann wie in Beispiel 7.18 vor. Probleme:

- Explizite Bestimmung der Umkehrfunktion oft nicht möglich.
- Zu umständlich.

Einfacherer Lösungsweg:

$$\begin{aligned}
Z\colon (r,\varphi,y) &\longmapsto (r\cos\varphi, y, r\sin\varphi) \\
\det Z' &= -r \\
\chi_{A_f} \circ Z(r,\varphi,y) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } f(r) \leq y \leq f(b) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

[46] So hat man das bei mir im Gymnasium geübt. Das war ein gängiger Abitur-Aufgaben-Typ in Baden-Württemberg.

$$\begin{aligned}
\lambda_3(A_f) &= \int_{\mathbb{R}^3} \chi_{A_f} \, \mathrm{d}\lambda_3 \\
&= \int_0^b \int_0^{2\pi} \int_{f(r)}^{f(b)} r \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_0^b (f(b) - f(r)) r \, \mathrm{d}r \\
&= \pi f(b) \cdot b^2 - 2\pi \int_0^b r f(r) \, \mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

8 Parameterabhängige Integrale

Fr 7.2.

8.1 Ableitung parameterabhängiger Integrale

Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall.

Satz 8.1. *Die Funktion $f\colon I \times X \to \mathbb{R}$ mit $(t,x) \longmapsto f(t,x)$ erfülle*

(1) *$f(t,\cdot) \in \mathscr{L}^1(\mu)$ für alle $t \in I$.*

(2) *für fast alle $x \in X$ ist $f(\,\cdot\,,x)$ differenzierbar und es gibt ein $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$, so dass für fast alle $x \in X$ gilt für alle $t \in I$ gilt*

$$\Big|\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\Big| \le g(x).$$

Dann ist $F\colon I \to \mathbb{R}$, $F(t) := \int_X f(t,\,\cdot\,)\, d\mu$ differenzierbar und

$$F'(t) = \int_X \Big(\frac{\partial}{\partial t} f(t,\,\cdot\,)\Big)\, d\mu.$$

Beweis: Seien $t, t_0 \in I$, $t \neq t_0$,

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \int_X \frac{f(t,\,\cdot\,) - f(t_0,\,\cdot\,)}{t - t_0}\, d\mu.$$

Auf Grund des ersten Mittelwertsatzes, Analysis I, Kapitel 5, Satz 3.2, existiert ein für jedes $x \in X$ eine $\xi_x \in (t, t_0)$ oder $\xi_x \in (t_0, t)$ mit

$$\frac{f(t,x) - f(t_0,x)}{t - t_0} = \frac{\partial f}{\partial t}(\xi_x, x).$$

Also

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{f(t,x) - f(t_0,x)}{t - t_0}\Big| &= \Big|\frac{\partial f}{\partial t}(\xi_x, x)\Big| \\
&\le g(x).
\end{aligned}$$

Der Satz 5.6 über dominierte Konvergenz liefert für jede Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in I mit $t_k \to t_0$, $t_k \neq t_0$,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{F(t_k) - F(t_0)}{t_k - t_0} \overset{\text{Def. } F}{=} \lim_{k\to\infty} \int_X \frac{f(t_k,\,\cdot\,) - f(t_0,\,\cdot\,)}{t_k - t_0}\, \mathrm{d}\mu$$

$$\begin{aligned} &\overset{\text{dom. Konv.}}{=} \int_X \lim_{k\to\infty} \frac{f(t_k,\,\cdot\,) - f(t_0,\,\cdot\,)}{t_k - t_0}\,\mathrm{d}\mu \\ &\overset{\text{Def. } \partial/\partial t}{=} \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,\,\cdot\,)\,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Da dies für alle Folgen $t_k \to t_0$ gilt, der Grenzwert nicht von der Folge abhängt und da Folgenstetigkeit gleich Stetigkeit ist, gilt dann auch

$$\lim_{t\to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(t_0,\,\cdot\,)\,\mathrm{d}\mu$$

■

Bemerkung 8.2.

(1) Dies verallgemeinert Lemma 1.2 in Anhang A.1.

(2) Aus Satz 8.1 folgt insbesondere, dass die Vertauschung von Ableitung und Integral im Beweis von Kapitel I, Satz 1.18 möglich ist.

Bemerkung 8.3. Analoge Aussagen für Stetigkeit oder stetige Differenzierbarkeit zeigt man oft durch dominiert Konvergenz. Gilt zum Beispiel in Satz 8.1 die zusätzliche Voraussetzung, dass $t \longmapsto f(t,x)$ in fast allen x stetig differenzierbar ist, dann folgt aus majorisierter Konvergenz, dass $F\colon I \to \mathbb{R}$, $F(t) := \int_X f(t,\,\cdot\,)\,d\mu$ stetig differenzierbar ist.[47]

8.2 Die Faltung

Als Beispiel eines parameterabhängigen Integrals betrachten wir die Faltung.

Definition 8.4. *Sei $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Sei $h \in \mathscr{L}^1(\lambda_n)$. Wir definieren die* **Faltung** *von g und h als*

$$(g * h)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\,h(y)\,\mathrm{d}y,$$

Das Integral über $y \in \mathbb{R}^n$ ist bezüglich des Maßes λ_n zu nehmen.

Proposition 8.5.

(1) *Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist $y \longmapsto F_x(y) := g(x-y)h(y)$ eine integrierbare Funktion. Somit ist $g * h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wohldefiniert.*

(2) *$g * h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig.*

Beweis:

(1) Aus der Stetigkeit von g folgt die Messbarkeit von F_x. Da g beschränkt ist, sagen wir $|g| \le C_1$, ist F_x von einer integrierbaren Funktion majorisiert, genauer $|F_x| \le C_1|h| \in \mathscr{L}^1(\lambda_n)$, was zu zeigen war.

(2) Es gelte $\hat{x}_i \to x$. Dann ist $(F_{\hat{x}_i})_{i\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge, die durch $C_1|h| \in \mathscr{L}^1(\lambda_n)$ majorisiert ist und punktweise gegen F_x geht. Aus dem Satz über majorsierte Konvergenz folgt,

$$(g * h)(\hat{x}_i) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\hat{x}_i - y)h(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} F_{\hat{x}_i}\,\mathrm{d}\lambda_n$$

[47] Aufgabe: Beweisen Sie dies!

$$\to \quad \int_{\mathbb{R}^n} F_x \, \mathrm{d}\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)h(y) \, \mathrm{d}y = (g * h)(x).$$

Da dies für alle konvergenten Folgen gilt, ist $g * h$ folgenstetig, also stetig. ■

Bemerkung 8.6. Auf Übungsblatt 15 behandeln wir eine eng verwandte Definition der Faltung. Wir definieren $g * h$ für zwei integrierbare Funktionen g und h und erhalten eine integierbare Funktion $g * h$. Wir haben dann für integrierbare g, h, k:

$$g * h = h * g \qquad (g * h) * k = g * (h * k).$$

Proposition 8.7. *Sei wieder $h \in \mathscr{L}^1(\lambda_n)$. Sei nun $g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und beschränkt. Ferner sei $g' = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right)$ ebenfalls beschränkt. Dann ist $g * h$ stetig differenzierbar und es gilt für $j \in \{1, \ldots, n\}$*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(g * h)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial g}{\partial x_j}(x-y) \, h(y) \, \mathrm{d}y. \tag{8.1}$$

Beweis: Fixiere $j \in \{1, \dots, n\}$ für alle $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$ fixiere $x_k \in \mathbb{R}$. Für den achsenparallelen Weg

$$\begin{aligned} x(t) &:= (x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n) \\ x &\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

definieren wir

$$\begin{aligned} f &\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ &(t, y) \longmapsto f(t, y) := F_{x(t)}(y) = g(x(t) - y) \cdot h(y) \end{aligned}$$

Wir wissen also bereits

$$f(t, \cdot\,) \in \mathscr{L}^1(\lambda_n).$$

Die partielle Ableitung von f nach t

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial t}\Big)(t, y) := \frac{\partial g}{\partial x_j}(x(t) - y) \cdot h(y)$$

existiert für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $y \in \mathbb{R}^n$.

$$\Big|\frac{\partial}{\partial t} f(t, y)\Big| \le \underbrace{\sup_{z \in \mathbb{R}^n} \Big|\frac{\partial g}{\partial x_j}(z)\Big|}_{=:C_2 < \infty} |h(y)|$$

Also $\big|\frac{\partial}{\partial t} f(t, \cdot\,)\big| \le C_2 |h| \in \mathscr{L}^1(\lambda_n)$. Die Voraussetzungen von Satz 8.1 sind also erfüllt. Somit ist

$$t \longmapsto (g * h)(x(t)) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t, \cdot\,) \, \mathrm{d}\lambda_n$$

differenzierbar, also $g * h$ partiell differenzierbar, und wir erhalten (8.1). Proposition 8.5 ergibt zusammen mit (8.1) die stetige Differenzierbarkeit von $g * f$. ■

Korollar 8.8. *Ist $g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ glatt und sind alle Ableitungen beliebiger Ordnung beschränkt, dann ist $g * h$ glatt und für alle Multi-Indizes $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n$ (siehe Analysis II, Kapitel 9, Notation 3.7) und für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\frac{\partial^{|\alpha|}(g * h)}{\partial x^\alpha}(x) = \Big(\Big(\frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x^\alpha}\Big) * h\Big)(x).$$

8.3 Ausblick: Wozu braucht man Faltungen?

8.3.1 Zur Lösung wichtiger partieller Differentialgleichungen

$\Delta \colon C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f \longmapsto \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$
Potentialgleichung/Poisson-Gleichung

$$\Delta f = u$$

Gegeben ist u, gesucht ist f.
Physikalisches Beispiel (Elektrostatik): u ist die elektrische Ladungsdichte, f das elektrische Feld.

Spezialfall $n \geq 3$**,** $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) := \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \exists R > 0 : \ u|_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} \equiv 0\}$. Wir setzen

$$G(x) := -\frac{1}{n(n-2)\alpha_n \|x\|^{n-2}},$$

wobei $\alpha_n := \lambda_n(B_1(0))$ das Volumen des Einheitsballs in $\mathbb{R}^n$ ist.

Ist K eine kompakte Menge, so ist $G\chi_k \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n, \lambda_n)$.

Rechnung: auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $\Delta G = 0$, also $\Delta G = 0$ fast überall.

Somit ist $F := G * u$ wohldefiniert.

Frage 8.9. *Folgt mit Korollar 8.8* $F \in C^\infty$ *und* $\Delta F = 0$*?*

Jein! Wir haben zwar $F \in C^\infty$ (ohne Beweis hier!), aber Korollar 8.8 ist nicht anwendbar, denn die Ableitungen von G sind unbeschränkt. Man kann zeigen (Hilfsmittel der Analysis IV: Satz von Gauß), dass

$$\Delta F = u,$$

d.h. F löst das Poisson-Problem.

8.3.2 Glättung

Wiederholung: L^p-Rämue, Gleichung (4.1), $1 \leq p < \infty$.

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n, \lambda_n) &:= \left\{ f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ messbar} \;\middle|\; |f|^p \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ ist } \lambda_n\text{-integrierbar} \right\}, \\ \|f\|_p &:= \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \end{aligned}$$

$f, g \in \mathscr{L}^p(\lambda_n)$, $f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. $L^p(\mathbb{R}^n, \lambda_n) = \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n, \lambda_n)/\sim$.
$\|[f]\|_p := \|f\|_p$ ist eine Norm auf $L^p(\mathbb{R}^n, \lambda_n)$.
$(L^p(\mathbb{R}^n, \lambda_n), \|\cdot\|_{L^p})$ ist ein Banachraum.

Man beachte: sind $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt

$$f = g \text{ fast überall} \quad \Longleftrightarrow \quad f = g \text{ überall}.$$

Wir erhalten eine injektive Abbildung

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n, \lambda_n), \quad f \longmapsto [f].$$

Identifiziere $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit dem Bild in $L^p(\mathbb{R}^n, \lambda_n)$.

Satz 8.10. $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *liegt dicht in* $(L^p(\mathbb{R}^n, \lambda_n), \|\cdot\|_{L^p})$ *für alle* $p \in [1, \infty)$.

Beweisskizze: Definiere $k_m \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ glatt,

$$k_m(x) := \begin{cases} c_m e^{-\frac{1}{1-\|mx\|^2}}, & \text{falls } \|x\| < \frac{1}{m} \\ 0, & \text{falls } \|x\| \geq \frac{1}{m}. \end{cases}$$

Wähle c_m, so dass $\int_{\mathbb{R}} k_m \, d\lambda_n = 1$. Für $[h] \in L^p(\mathbb{R}^n, \lambda_n)$ mit $h|_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} \equiv 0$ gilt:

$$\begin{aligned} &k_m * h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \text{Korollar 8.8} \\ &k_m * h \to h \text{ in } L^p \quad \text{für } m \to \infty. \end{aligned}$$

Also liegt

$$V := \{[h] \in L^p(\mathbb{R}^n, \lambda_n) \mid h|_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} \equiv 0\}$$

im Abschluss von $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Zu gegebenem $h \in L^p(\mathbb{R}^n, \lambda_n)$ definiere nun

$$h_i := \chi_{B_i(0)} h \in V.$$

Es gilt $|h_i - h|^p \to 0$ punktweise, und $|h_i - h| \leq |h|$. Aus dem Satz über dominierte Konvergenz folgt

$$\|h_i - h\|_p \to 0.$$

■

Einen vollständigen Beweis findet man zum Beispiel im Abschnitt „Lokale Approximation von $H^{m,p}$-Funktionen“ in [2, 2.12–2.14]. Allerdings wird dort eine deutlich allgemeinere Aussage bewiesen, zu deren Verständnis zunächst einige Definitionen nötig sind.

ENDE DER VORLESUNG

A Ergänzungen zu Analysis I und II

In den Anhängen ist $\mathbb{N}$ die Menge aller natürlichen Zahlen (inklusive Null). $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1 Vertauschung von Ableitung und Riemann-Integral

Lemma 1.1. *Seien $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\alpha < \beta$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : [a, b] \times (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann ist $t \longmapsto I(s) := \int_a^b f(t, s)\, dt$ stetig auf $(\alpha, \beta) \ni s$.*

Beweis: Wir zeigen die Stetigkeit von I in $s_0 \in (\alpha, \beta)$. Wähle hierzu $\sigma > 0$ mit $(s_0 - 2\sigma, s_0 + 2\sigma) \subset (\alpha, \beta)$. Wegen der Kompaktheit von $[a, b] \times [s_0 - \sigma, s_0 + \sigma]$ wissen wir, dass

$$f\Big|_{[a,b]\times[s_0-\sigma,s_0+\sigma]} : [a, b] \times [s_0 - \sigma, s_0 + \sigma] \to \mathbb{R}^n$$

gleichmäßig stetig ist.

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es also ein $\delta > 0$, so dass – insbesondere[1] – für alle $t \in [a, b]$ und alle $s \in [s_0 - \delta, s_0 + \delta]$ gilt

$$\|f(t, s) - f(t, s_0)\| \leq \varepsilon\,. \tag{1.1}$$

Es folgt

$$\|I(s) - I(s_0\| \quad = \quad \left\| \int_a^b \left(f(t, s) - f(t, s_0)\right)\, ds \right\| \;\leq\; \varepsilon\,(b - a)\,.$$

Hieraus ergibt sich die gewünschte Stetigkeit unmittelbar. ∎

Lemma 1.2. *Seien $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\alpha < \beta$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $f : [a, b] \times (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ stetig, die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial s} f(t, s)$ soll überall existieren und*

$$\frac{\partial}{\partial s} f : [a, b] \times (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n \tag{1.2}$$

soll stetig sein. Dann ist $s \longmapsto I(s) := \int_a^b f(t, s)\, dt$ stetig differenzierbar auf $(\alpha, \beta) \ni s$ und es gilt

$$\frac{d}{ds}\Big(\int_a^b f(t, s)\, dt\Big) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} f(t, s)\, dt.$$

[1] Die oben genannte gleichmäßige Stetigkeit ist natürlich etwas stärker, da man s_0 auch durch eine andere geeignete Zahl ersetzen kann und auch in t-Richtung verschiedene Werte zulassen kann. Dass es sich nicht um eine äquivalente Formulierung handelt, sondern um eine potentiell schwächere Form, wird durch das Wort „insbesondere“ klargestellt.

Beweis: Wir zeigen zunächst die Differenzierbarkeit von I und obige Formel in $s_0 \in (\alpha, \beta)$. Wähle hierzu $\sigma > 0$ mit $(s_0 - 2\sigma, s_0 + 2\sigma) \subset (\alpha, \beta)$. Wegen (1.2) und der Kompaktheit von $[a, b] \times [s_0 - \sigma, s_0 + \sigma]$ wissen wir, dass

$$\frac{\partial}{\partial s} f\Big|_{[a,b]\times[s_0-\sigma,s_0+\sigma]} \colon [a, b] \times [s_0 - \sigma, s_0 + \sigma] \to \mathbb{R}^n$$

gleichmäßig stetig ist.

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es also ein $\delta > 0$, so dass – insbesondere – für alle $t \in [a, b]$ und alle $s \in [s_0 - \delta, s_0 + \delta]$ gilt

$$\left\| \frac{\partial}{\partial s} f(t, s) - \frac{\partial}{\partial s} f(t, s_0) \right\| \leq \varepsilon \,. \tag{1.3}$$

Auf Grund des Mittelwertsatzes gibt es[2] zu jedem $t \in [a, b]$ und alle $s \in [s_0 - \delta, s_0 + \delta]$ ein $\vartheta_{t,s} \in [s_0 - \delta, s_0 + \delta]$ mit

$$f(t, s) - f(t, s_0) = (s - s_0) \frac{\partial}{\partial s} f(t, \vartheta_{t,s}) \,.$$

Wegen (1.3) folgt dann für $s \in [s_0 - \delta, s_0 + \delta] \setminus \{s_0\}$:

$$\left\| \frac{f(t, s) - f(t, s_0)}{s - s_0} - \frac{\partial}{\partial s} f(t, s_0) \right\| \leq \epsilon \,.$$

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\int_a^b f(t, s)\, dt - \int_a^b f(t, s_0)\, dt}{s - s_0} - \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} f(t, s_0)\, dt \right\| \\ = & \left\| \int_a^b \left(\frac{f(t, s) - f(t, s_0)}{s - s_0} - \frac{\partial}{\partial s} f(t, s_0) \right) dt \right\| \\ \leq & \ \varepsilon\, (b - a) \,. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich direkt die Differenzierbarkeit von I in s_0 und die obige Formel für die Ableitung $I'(s_0)$.

Die Stetigkeit der Ableitung folgt nun aus Lemma 1.1, indem wir dort f durch $\partial f / \partial s$ ersetzen. ■

Aus dem Lemma ergibt sich nun unmittelbar durch Induktion folgendes Korollar.

Korollar 1.3. *Seien $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\alpha < \beta$. Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Sei $f : [a, b] \times (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ stetig, für $j = \{1, \ldots, k\}$ soll die j-te partielle Ableitung $\frac{\partial^j}{(\partial s)^j} f(t, s)$ überall existieren und*

$$\frac{\partial^k}{(\partial s)^k} f \colon [a, b] \times (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n \tag{1.4}$$

soll stetig sein. Dann ist $s \longmapsto I(s) := \int_a^b f(t, s)\, dt$ k-mal stetig differenzierbar auf $(\alpha, \beta) \ni s$ und es gilt

$$\frac{d^k}{(ds)^k} \Big(\int_a^b f(t, s)\, dt \Big) = \int_a^b \frac{\partial^k}{(\partial s)^k} f(t, s)\, dt \,.$$

[2] Wir haben aber keine Eindeutigkeit von $\vartheta_{t,s}$ und wir wissen auch nicht, ob $(t, s) \longmapsto \vartheta_{t,s}$ stetig ist oder sonstige „schönen“ Eigenschaften besitzt.

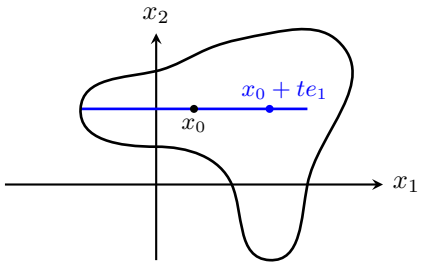


Abbildung 2.1: Skizze zum Beweis 2.1 mit $n = 2$ und $j = 1$.

2 Differenzierbarkeit von $\lim f_k$ für $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Wir betrachten eine offene Teilmenge U in $\mathbb{R}^n$, $f_k \colon U \to \mathbb{R}$ stetig und $f \colon U \to \mathbb{R}$. Konvergiert f_k gleichmäßig gegen f, so folgt mit Analysis II, Kapitel 7, Satz 2.5, dass f stetig ist.

Nun stellt sich die Frage, ob aus $f_k \in C^1$ auch $f \in C^1$ folgt.

Proposition 2.1. *Sei U eine offene Teilmenge im $\mathbb{R}^n$, $f_k \colon U \to \mathbb{R} \in C^1$ und $f \colon U \to \mathbb{R}$. Wir definieren $Jf_k := f_k' \colon U \to \mathbb{R}^{1\times n} = \mathbb{R}^n$; dies sind stetige Funktionen. Es gelte zudem:*

(a) *f_k konvergiere gleichmäßig gegen f*

(b) *Jf_k konvergiere gleichmäßig gegen $g \colon U \to \mathbb{R}^n$,*

dann ist $f \in C^1$ und es gilt

$$Jf = g.$$

Bemerkungen 2.2.

(1) Für $n = 1$ folgt 2.1 aus der Analysis II, Kapitel 7, Theorem 3.3.

(2) Ist U zusammenhängend, dann kann man (a) durch (a') ersetzen.

(a') Es existiert ein $x_0 \in U$, so dass $f_k(x_0)$ gegen $f(x_0)$ konvergiert.

Beweis von Proposition 2.1: Die Funktion g ist stetig, da es der gleichmäßige Limes der stetigen Funktionen Jf_k ist. Sei $g = (g^1, \dots, g^n)$.

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \langle Jf_k, e_j \rangle \text{ konvergiert gleichmäßig gegen } g^j.$$

Für $x_0 \in U$, $j \in \{1, \dots, n\}$, $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$h_{k,x_0,j}(t) := f_k(x_0 + te_j)$$
$$h_{x_0,j}(t) := f(x_0 + te_j)$$

Die Funktion $t \longmapsto h'_{k,x_0,j}(t) := \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_0 + te_j)$ konvergiert gleichmäßig in t gegen $t \longmapsto g^j(x + te_j)$, und es gilt $h_{x_0,j}(t) = \lim_{k\to\infty} h_{k,x_0,j}(t)$. Dann folgt mit Analysis II, Kapitel 7, Theorem 3.3:

$h_{x_0,j}$ ist differenzierbar und $h'_{x_0,j}(t) = g^j(x_0 + te_j)$.

Diese Aussage gilt für alle $j \in \{1, \dots n\}$ und für alle $x_0 \in U$. Wir setzen $t := 0$. Daraus sieht

man, dass f partiell differenzierbar ist mit stetigen partiellen Ableitungen g^j. Somit ist f stetig differenzierbar und $Jf = g$. ■

Durch Iteration erhält man

Korollar 2.3. *Sind $f_k \colon U \to \mathbb{R}^m \in C^\ell$ und konvergiert $f_k^{(j)}$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion für alle $j \in \{0, \dots, \ell\}$, dann ist $f := \lim_{k\to\infty} f_k \in C^\ell$ und*

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f = \lim_{k\to\infty} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f_k,$$

mit α Multiindex, $|\alpha| \le \ell$.

3 Der Cauchsche Doppelreihensatz und Variationen

Wir benötigen in der komplexen Analysis verschiedene Umordnungssätze, die Variationen des Umordnungssatzes für Reihen (Analysis I, Kap. 3, Satz 2.29) und des Satzes vom Cauchy-Produkt (Analysis I, Kap. 3, Satz 2.36 und Kor. 2.37) sind.

Viele der hier dargestellten Aussagen kann man auch als Korollar der Konvergenzsätze der Maßtheorie erhalten, indem man die relevanten Sätze (monotone Konvergenz, majorisierte Konvergenz, Fatou,...) auf den Messraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ versehen mit dem Zählmaß anwendet (siehe Zentralübung), in Kombination mit der Tatsachen wie zum Beispiel, dass jede Bijektion das Zählmaß des einen Raums auf das Zählmaß des anderen Raums abbildet. Da wir aber die Maßtheorie erst nach der komplexen Analysis behandeln, geben wir elementare Beweis hier im Anhang.

Der Cauchsche Doppelreihensatz ist eine etwas stärkere Version des Satzes vom Cauchy-Produkt.

Satz 3.1 (Cauchyscher Doppelreihensatz)**.** *Gegeben seien reelle oder komplexe Zahlen c_{ij}, $i, j \in \mathbb{N}$.*

$$\begin{aligned} S &:= \sup\left\{ \sum_{(i,j)\in I} |c_{ij}| \mid I \text{ ist endliche Teilmenge von } \mathbb{N}\times\mathbb{N} \right\} \\ &= \sup\left\{ \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} |c_{ij}| \mid N \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned}$$

Falls $S < \infty$ dann gilt

(1) $\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}$ *konvergiert absolut für jedes $i \in \mathbb{N}$*

(2) $\sum_{i=0}^{\infty} c_{ij}$ *konvergiert absolut für jedes $j \in \mathbb{N}$*

(3) *Es gilt*

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} c_{ij} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} \in [-S, S]$$

und beide Seiten der Gleichung konvergieren absolut.

(4) *Für jede Abbildung* $s : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *mit der Endlichkeitsbedingung*

$$\forall r \in \mathbb{N} : \; s^{-1}(\{r\}) \text{ endlich}$$

gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\substack{(i,j)\in \\ s^{-1}(\{r\})}} c_{ij} \, .$$

Und alle Reihen konvergieren absolut.[3]

Die beiden Suprema in der Definition von S sind gleich, da jede endliche Teilmenge $I \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in einer Menge der Form $\{0, 1, \ldots, N\} \times \{0, 1, \ldots, N\}$ enthalten ist (setze z. B. $N := \#I$) und da zum anderen $I = \{0, 1, \ldots, N\} \times \{0, 1, \ldots, N\}$ endlich ist.

Beweis: Für $J \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$ definieren wir

$$S(J) := \sup \left\{ \sum_{(i,j)\in I} |c_{ij}| \mid I \text{ ist endliche Teilmenge von } J \right\} .$$

Wir haben dann $S(J) = S(I) + S(J \setminus I)$ für $I \subset J$, und es gilt $S(\mathbb{N}^2) = S$.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert also eine endliche Menge $I \subset \mathbb{N}^2$ mit $0 \leq S(\mathbb{N}^2 \setminus I) \leq \varepsilon$. O. B. d. A. $I = \{0, 1, 2 \ldots, N\}^2$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Dann folgt für $k \geq \ell \geq N$:

$$\forall i \in \mathbb{N} : \sum_{j=\ell+1}^{k} |c_{ij}| \leq \varepsilon \;\text{ und }\; \forall j \in \mathbb{N} : \sum_{i=\ell+1}^{k} |c_{ij}| \leq \varepsilon \, ,$$

und das Cauchy-Kriterium ergibt dann (1) und (2). Ähnlich erhalt man für $k \geq \ell \geq N$:

$$\sum_{j=\ell+1}^{k} \left| \sum_{i=0}^{\infty} c_{ij} \right| \leq \sum_{j=\ell+1}^{k} \sum_{i=0}^{\infty} |c_{ij}| \leq S(\{N+1, N+2, \ldots\} \times \mathbb{N}) \leq S(\mathbb{N}^2 \setminus I) \leq \epsilon \, ,$$

und die analoge Formel, wenn wir i und j vertauschen. Dies liefert die absolute Konvergenz der Reihen in (3).

Analog zeigt man auch

$$\left| \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} c_{ij} - \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{k} c_{ij} \right| \leq S(\mathbb{N}^2 \setminus I) \leq \varepsilon$$

für $k \geq N$. Hieraus ergeben sich die verbleibenden Behauptungen von (3).

Sei nun die Funktion s wie oben gegeben. Wir können nun ein $r_0 \in \mathbb{N}$ (z. B. $r_0 := \max s(I)$) wählen, so dass

$$s(I) \subset \{0, 1, \ldots, r_0\} \, .$$

[3] Die Endlichkeitsbedingung wird nur dazu benötigt, damit die innere Summe der rechten Seite eine endliche Summe ist und wir keine Reihenfolge festlegen müssen. Die Behauptung des Satzes ist auch ohne die Endlichkeitsbedingung richtig wenn wir für jede unendliche Menge $s^{-1}(\{k\}$ erklären, in welcher Reihenfolge die Summanden der (unendlichen) Summe (=Reihe) der rechten Seite nummeriert werden. Die zugehörige Reihe konvergiert dann aber absolut und somit unabhängig von der Reihenfolge.

Dann zeigt man wieder

$$\left| \sum_{r=0}^{r_0} \sum_{\substack{(i,j)\in \\ s^{-1}(\{r\})}} c_{ij} - \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} c_{ij} \right| = \left| \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} \right| \leq S(\mathbb{N}^2 \setminus I) \leq \varepsilon \,.$$

mit $A = s^{-1}(\{0, 1, \ldots, r_0\}) \setminus I$. Daraus folgt die Konvergenz von $|\sum_{r=0}^{r_0} \sum_{\substack{(i,j)\in \\ s^{-1}(\{r\})}} c_{ij}$ und der behauptete Grenzwert. Die absolute Konvergenz dieser Reihe ergibt sich analog, wenn man c_{ij} durch $|c_{ij}|$ ersetzt. ■

Aus dem Cauchyschen Doppelreihensatz können wir direkt den in der Analysis I bewiesenen Satz vom Cauchy-Produkt nochmals alternativ herleiten.

Korollar 3.2 (Satz vom Cauchy-Produkt)**.** *Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent, und setzen wir*

$$d_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ absolut konvergent und

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Beweis: Die Aussage folgt aus dem Doppelreihensatz, indem wir $c_{ij} := a_i b_j$ setzen, danach die Funktion s so wählen, dass man die Doppelreihe nach Diagonalen angeordnet durchläuft (wie in der Zeichnung von Analysis I, Kap. 3, Beispiel 2.35 (b)) und dann entlang der Diagonalen (endlich viele Summanden) aufsummiert. ■

In der Herleitung von Satz 2.20 in Kapitel I benutzen wir eine Umordnung, die eine weitere Modifikation des Umordnungssatzes (Analysis I, Kapitel 3, Satz 2.29) benötigt.

Satz 3.3. *Die Umordnung (*) vor Satz 2.20 in Kapitel I ist zulässig, wenn die Bedingung* (2.5) *erfüllt ist.*

Beweis: Wir wählen die Notation von Kapitel I. Sei $s := \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \Big(\sum_{\ell=1}^{\infty} |b_\ell||z|^\ell \Big)^j < \infty$. Dann gibt es zu $\epsilon > 0$ natürliche Zahlen k, m mit

$$s - \epsilon \leq \sum_{j=0}^{k} |a_j| \Big(\sum_{\ell=1}^{m} |b_\ell||z|^\ell \Big)^j \leq s$$

Die Summe der Beträge aller anderen Terme ist also nach oben durch ϵ beschränkt. In dem doppelreihen-artigen Ausdruck

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \Big(\sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell z^\ell \Big)^j$$

kann man die endliche Teilsumme

$$\sum_{j=0}^{k} a_j \Big(\sum_{\ell=1}^{m} b_\ell z^\ell \Big)^j$$

beliebig umordnen, während die Summe der Beträge aller anderen Terme höchstens ϵ ist. Da man ϵ beliebig klein wählen kann, folgt daraus, dass eine eine Umordnung die Konvergenz-Eigenschaft und den Grenzwert erhält. ■

B Zusätzliche Details und Ausführungen

1 Details zur Umformung von Satz 1.20 zu Satz 3.3 in Kapitel I

Identifiziere $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \supset \Omega$, erhalte also $f = u + iv$ mit u, v reelle Funktionen und $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
&X \colon \Omega \to \mathbb{R}^2 \\
&X(z) = \begin{pmatrix} u(z) \\ -v(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_x(x+iy) \\ X_y(x+iy) \end{pmatrix} \in C^1 \\
&Y \colon \Omega \to \mathbb{R}^2 \\
&Y(z) = \begin{pmatrix} v(z) \\ u(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_x(x+iy) \\ Y_y(x+iy) \end{pmatrix} \in C^1
\end{aligned}
$$

$$
\int_{\gamma_1} f(\gamma) dz = \underbrace{\int_{\gamma_1} X}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{\int_{\gamma_1} Y}_{\in \mathbb{R}}
$$

$$
\begin{aligned}
& \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz \\
\iff \quad & \int_{\gamma_1} X = \int_{\gamma_2} X \text{ und } \int_{\gamma_1} Y = \int_{\gamma_2} Y \\
\impliedby \quad & X \text{ und } Y \text{ sind konservativ} \\
\underset{\Omega \text{ sternförmig}}{\overset{\text{Satz 1.20}}{\iff}} \quad & \frac{\partial X_y}{\partial x} = \frac{\partial X_x}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial Y_y}{\partial x} = \frac{\partial Y_x}{\partial y} \\
\iff \quad & -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\
\iff \quad & \text{Cauchy-Riemann-Gleichungen}
\end{aligned}
$$

Da f komplex differenzierbar ist, folgt Satz 3.4.

Ganz ähnlich sieht man auch die Umkehrung: Ist f im reellen Sinne stetig differenzierbar, und gilt $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$ für alle Wege $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to \Omega$ mit $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ und $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Dann gilt $\int_{\gamma_1} X = \int_{\gamma_2} X$ und $\int_{\gamma_1} Y = \int_{\gamma_2} Y$ für alle solchen γ_1, γ_2. Es folgt dann, dass X und Y konservativ sind. Und weiter wie oben folgen die Cauchy-Riemann-Gleichungen und das ergibt die Holomorphie von f.

Wir haben also gesehen: Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ im reellen Sinne stetig differenzierbar, Ω sternförmig, dann gilt

$$
\int_{\gamma} f(z)\, \mathrm{d}z \text{ hängt nur von den Endpunkten von } \gamma \text{ ab} \iff f \text{ holomorph.}
$$

Die linke Seite ist äquivalent zur Existenz einer Stammfunktion von f. Diese Resultate wollen wir nun etwas allgemeiner im Detail beweisen und studieren.

2 Ausführungen über Nullmengen

Quelle: dieses Kapitel lehnt sich eng an [15] an.

Lemma 2.1. *Sei $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$.*

(1)*$\mathcal{N}$ ist eine (λ_n-) Nullmenge (in $\mathbb{R}^n$).*

$\Leftrightarrow$ (2) *Es gibt eine Borel-messbare Menge $\tilde{\mathcal{N}} \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\mathcal{N} \subset \tilde{\mathcal{N}}$ und $\lambda_n(\tilde{\mathcal{N}}) = 0$.*

$\Leftrightarrow$ (3) *Das äußere Maß von $\mathcal{N}$ ist Null.*

$\Leftrightarrow$ (4) *$\forall \varepsilon > 0$ existieren achsenparallele Würfel $W_i, i \in \mathbb{N}^*$ mit $\tilde{\mathcal{N}} \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} W_i$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(W_i) < \varepsilon$.*

$\Leftrightarrow$ (5) *$\forall \varepsilon > 0$ existieren achsenparalle Quader $Q_i, i \in \mathbb{N}^*$ mit $\tilde{\mathcal{N}} \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} Q_i$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(Q_i) < \varepsilon$*

$\Leftrightarrow$ (6) *$\forall \varepsilon > 0$ existieren Borel-messbare Mengen $B_i, i \in \mathbb{N}^*$ mit $N \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} B_i$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(B_i) < \varepsilon$.*

Beweis: *(1)$\Leftrightarrow$(2)$\Leftrightarrow$(3)* klar, Kapitel 2 Abschnitt 3
(4)$\Leftrightarrow$(5)$\Leftrightarrow$(6) trivial.
(6)$\Leftrightarrow$(3) folgt aus Subadditivität des äußeren Maßes λ_n^*. $\lambda_n^*(N) \leq \sum \lambda_n(B_i) < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, also $\lambda_n^*(N) = 0$.
(2)$\Rightarrow$(5): Sei S die Menge der achsenparallelen Quader in $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{M}(S, \mathbb{R}^n)$. Wir haben λ_n zunächst auf S definiert . Dann mit dem Satz von Hahn auf $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ fortgesetzt. Es folgt aus der Konstruktion dort für $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$:

$$\lambda_n(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(Q_i) \mid (Q_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \text{ eine Folge in } S\}.$$

Auf $A := \tilde{\mathcal{N}}$ angewendet, $\mathcal{N} \subset \tilde{\mathcal{N}}$ und das Infimum ist Null.
(5)$\Rightarrow$(4): Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Überdecke $\mathcal{N}$ mit Quadern $Q_i, i \in \mathbb{N}^*$, so dass $\sum \lambda_n(Q_i) > \frac{\varepsilon}{2}$. Überdecke Q_i mit Würfeln $(W_{i,j})_{j \in \mathbb{N}^*}$ mit $2\lambda_n(Q_i) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(W_{i,j})$. Umordnen der Würfel $(W_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}^*}$ zu $(W_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, $\mathcal{N} \subset \dot{\bigcup}_{k \in \mathbb{N}^*} W_k$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(W_k) \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2\lambda_n(Q_i) < 2\frac{\varepsilon}{2}.$$

■

Proposition 2.2. *Ist $\mathcal{N}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$ und ist $f \colon \mathcal{N} \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Abbildung, dann ist auch $f(\mathcal{N})$ eine Nullmenge.*

Beweis: Wähle $L > 0$ mit für alle $x, y \in \mathbb{N}^*$: $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$. Zu $\mathcal{N}$ wähle Würfel

$W_i, i \in \mathbb{N}^*$, $\sum \lambda_n(W_i) < \varepsilon$. Sei z_i der Schwerpunkt des Würfels W_i und ℓ_i die Kantenlänge $W_i \subset \overline{B}_{\sqrt{n}\frac{\ell_i}{2}}(z_i)$, $f(W_i) \subset f(\overline{B}_{\sqrt{n}\frac{\ell_i}{2}}(z_i)) \subset \overline{B}_{\sqrt{n}\frac{\ell_i}{2}}(f(z_i)) \subset \tilde{W}_i$ Würfel mit Schwerpunkt $f(z_i)$ und Kantenlänge $L\sqrt{n}\ell_i$.

$$\lambda_n(f(\mathcal{N})) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\lambda_n(\tilde{W}_i)}_{L\sqrt[n]{n}^n \lambda_n(W_i)} \quad ,$$

da $f(\mathcal{N}) \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} f(W_i) \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} \tilde{W}_i$. Also ist

$$\lambda_n(f(n)) \leq L\sqrt[n]{n}^n \varepsilon \to 0$$

für $\varepsilon \to 0$. ■

Korollar 2.3. *Sei $\mathcal{N}$ eine Nullmenge, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\mathcal{N} \subset U$ und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ C^1, dann $f(\mathcal{N})$ ebenfalls eine Nullmenge.*

Beweis:
Schritt 1: Sei $x \in U$ und $B_{2\varepsilon}(x) \subset U$, dann ist $f|_{\overline{B_\varepsilon(x)}}$ Lipschitz-stetig.[1] Die Lipschitzstetigkeit folgt so: für $y, z \in \overline{B_\varepsilon(x)}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f(z)\| &= \Big\| \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(t(y-z)+z))\,\mathrm{d}t \Big\| \\
&= \Big\| \int_0^1 f'(t(y-z)+z)\cdot(y-z)\,\mathrm{d}t \Big\| \\
&\leq \int_0^1 n\|f'(t(y-z)+z)\|\|y-z\|\,\mathrm{d}t \\
&\leq n(\sup_{w\in\overline{B_\varepsilon(x)}} \|f'(w)\|)\|y-z\| \\
&\leq L\|y-z\|
\end{aligned}$$

für $L := \sup$.

Schritt 2: Schreibe $U \cap \mathbb{Q}^n = \{q_i \mid i \in \mathbb{N}^*\}$, $q_i \in \mathbb{Q}^n$. Bestimme $\varepsilon_i := \sup\{\varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon(q_i) \subset U\}$, $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(q_i)$.
„$\supset$“ ist klar.
„$\subset$“: Zu $x \in U$ wähle ein $\delta > 0$, $B_\delta(x) \subset U$. Wähle $j \in \mathbb{N}^*$ mit $q_j \in B_{\frac{\delta}{2}}(x) \cap \mathbb{Q}^n$.

$$\begin{aligned}
&x \in B_{\frac{\delta}{2}}(q_j) < B_\delta(x) \subset U \\
&\Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{\delta}{2} \\
&x \in \overline{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(q_i)
\end{aligned}$$

Schritt 3: $\mathcal{N} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*}(\mathcal{N} \cap \overline{B}_{\frac{\varepsilon_j}{2}}(q_j))$.

$$f(\mathcal{N}) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} f(\mathcal{N} \cap \overline{B}_{\frac{\varepsilon_j}{2}}(q_j)),$$

[1] Deswegen ist $f(\overline{B}_\varepsilon(x) \cap \mathcal{N})$ eine Nullmenge

also ist $f(\mathcal{N})$ eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen, also wieder Nullmenge. ■

C Index-Verzeichnisse

Stichwortverzeichnis

Symbols

L^p-Norm . . . 134
L^p-Raum . . . 134
S erzeugte σ-Algebra auf X . . . 102
$\mathcal{L}$-integrierbar . . . 150
$\mathscr{L}^p$-Räume . . . 129
μ-Nullmenge . . . 119
μ-integrierbar . . . 129
μ-messbar . . . 121, 136
μ^*-messbar . . . 110
σ-Algebra auf X . . . 101
σ-endlich . . . 108, 112
äußeres Maß . . . 109

A

Ableitung . . . 16
Ableitung parameterabh. Integr. . . . 167
Abschätzungsformel von Cauchy . . . 64
Abzählbarkeitsaxiom, zweites . . . 144
Algebra . . . 112
analytisch . . . 26
anti-linear
    komplex . . . 24
Argument . . . 37

B

Banach-Tarski-Paradoxon . . . 100
Basis der Topologie . . . 144
Betrag von z . . . 37
biholomorph . . . 93
Bogenlänge . . . 2
Borel-Algebra . . . 103
Borel-messbar . . . 122

C

Carathéodory, Lemma von . . . 110
Casorati-Weierstraß . . . 86
Cauchy-Abschätzungen . . . 64
    für Laurentreihen . . . 85
Cauchy-Riemann-Gleichungen . . . 18
Cauchysche Integralformel . . . 60
Cauchyscher Doppelreihensatz . . . IV
Cauchyscher Integralsatz . . . 53
    für Rechtecke . . . 44
    für stetig diff'bare Funktionen . . . 43
Cavalieris Prinzip . . . 147

D

Diracmaß . . . 108
direkte Bild von $\mathcal{M}$ unter f . . . 102
direkte Fortsetzung . . . 71
Doppelreihensatz von Cauchy . . . IV

E

einfach zusammenhängend . . . 13, 52
    homolog . . . 96
endliches Maß . . . 108
Energie . . . 8
Entwicklungspunkt der Potenzreihe . . . 16

F

für fast alle . . . 122
Faltung . . . 168
fast überall . . . 122
Fatou, Lemma von . . . 140
Fubini, Satz von . . . 151
Fundamentalsatz der Algebra . . . 65
Funktionselement . . . 71
Funktionskette . . . 73
    längs einer Kurve . . . 73

G

ganze Funktion . . . 65
Gaußsche Glockenkurve . . . 163
Gebiet . . . 7
Gebietstreue . . . 66
geschlossen . . . 9
Gleichm. Grenzw. holomḞunktionen . . . 67
Gradient . . . 8

H

Hahn, Satz von . . . 116
Halbnorm . . . 132
harmonisch . . . 68
Hauptteil einer Laurent-Reihe . . . 84
Hauptwert des Logarithmus . . . 38
Hauptzweig des Logarithmus . . . 38
hebbare Singularität . . . 77
holomorph . . . 16
homolog einfach zusammenhängend . . . 96
homotop mit festen Endpktn. . . . 50
homotop relativ zu A . . . 49
Homotopie relativ zu A . . . 50

I

Index von w bezüglich γ . . . 57
Inhaltsproblem . . . 100
Integral
  von Y längs γ . . . 8
  von Treppenfunktionen . . . 126
isolierte Singularität . . . 77
isolierter Punkt von A . . . 77

J

Jacobi-Matrix . . . 18

K

kompl. Kurveninteg. von f . . . 15
kompl. Weginteg. von f . . . 15
komplex anti-linear . . . 24
komplex differenzierbar . . . 16
komplex differenzierbar in $z_0 \in \Omega$ . . . 16
komplex-analytisch . . . 26
konform . . . 20, 22, 24
konservativ . . . 8
Konvergenzradius . . . 16
Kreiskettenverfahren . . . 75
Kreisring . . . 82
Kugelkoordinaten . . . 165
Kurve . . . 1
Kurvenintegral . . . 8

L

Laurent-Entwicklung . . . 82
Laurent-Reihe . . . 84
Lebesgue-Borelsche Maß . . . 118
Lebesgue-Integral . . . 129
  für integrierbare Funktionen . . . 129
  für nicht-negative Funktionen . . . 127
  für Treppenfunktionen . . . 126
Lebesgue-integrierbar . . . 129
Lebesgue-Maß . . . 122
Lebesgue-messbar . . . 122, 136
Lebesgue-Raum . . . 129, 134
Lebesguesche σ-Algebra . . . 122
Lebesguesche Prämaß. . . . 114
Lebesguescher Maßraum . . . 122
Lemma
  von Carathéodory . . . 110
  von Fatou . . . 140
Levi, Satz von . . . 138
Liouville, Satz von . . . 65
Logarithmusfunktion . . . 38

M

Maß . . . 108
Maßproblem . . . 100
Maßraum . . . 108
Maßtransformationsformel . . . 154
  affin-lineare . . . 123
  unter Diagonal-mat. . . . 123
  unter Rotations-mat. . . . 125
Majorante . . . 141
majorisierte Konvergenz . . . 140
Maximumsprinzip
  für harmonische Funktionen . . . 68
  für holomorphe Funktionen . . . 69
Mengenalgebra . . . 112
Mengenring . . . 112
meromorphe Funktion auf Ω . . . 78
messbare Funktion . . . 101
messbare Hülle . . . 119
messbare Teilmenge . . . 101
Messraum . . . 101

Minimumsprinzip für harmonische Funktionen . . . 69
Minkowski-Ungleichung . . . 132
Mittelwertgleichung
für harmonische Funktionen . . . 68
für holomorphe Funktionen . . . 68
Monodromiesatz . . . 74
monoton . . . 144
monotone Konvergenz
Satz über . . . 138
Morera, Satz von . . . 62

N

Null- und Polstellen zählende Integrale . . . 91
Nullmenge . . . 119
numerische Funktionen . . . 103
numerische Treppenfunktion . . . 107

O

Ordnung
des Pols . . . 77
einer meromorphen Funktion . . . 81
orientierungserhaltend . . . 22, 24
orientierungsumkehrend . . . 22, 24

P

Parameterabhängige Integrale . . . 167
Pol . . . 77
Polardarstellung . . . 37
Polarkoordinaten . . . 163
Potential . . . 9
Potenzreihenentwicklungssatz . . . 63
Prämaß . . . 112
Prinzip von Cavalieri . . . 147
Produkt-σ-Algebra . . . 143
Produktmaß . . . 148
Punkte (eines Messraums) . . . 101

R

Raum der L^p-Funktionen . . . 134
reell-analytisch . . . 26
reelle Treppenfunktion . . . 107
rektifizierbar . . . 2
Residuensatz . . . 87
Residuum . . . 84
Riemann-integrierbar . . . 14
riemannsche ζ-Funktion . . . 70
Riemannsche Vermutung . . . 71
riemannsche Zahlensphäre . . . 79
riemannscher Abbildungssatz . . . 94
starke Version . . . 97
riemannscher Hebbarkeitssatz . . . 85
Ring . . . 112
Rotation von Y . . . 11
Rotationskörper um die y-Achse . . . 166
Rotationskörper, Volumen von . . . 166
Rouché, Satz von . . . 92

S

Satz
über die Laurent-Entw. . . . 82
über dominierte Konvergenz . . . 142
über majorisierte Konvergenz . . . 140
über monotone Konvergenz . . . 138
über holom. u. konf. Funkt. . . . 24
von Casorati-Weierstraß . . . 86
von Beppo Levi . . . 138
von der Gebietstreue . . . 66
von Fubini . . . 151
von Goursat . . . 44
von Hahn . . . 116
von Liouville . . . 65
von Morera . . . 62
von Rouché . . . 92
Schwarzsches Spiegelungsprinzip . . . 75
Semi-Norm . . . 132
Singularität
hebbare . . . 77
isolierte . . . 77
wesentliche . . . 77
Spur einer Kurve . . . 56
stückweise C^1 . . . 5
Stammfunktion . . . 42
lokale . . . 47
sternförmig bezüglich $x_0 \in \Omega$ . . . 12
stetig differenzierbar . . . 2
k-mal . . . 2

T

Transformationsformel . . . 153
translationsinvariant . . . 124
Treppenfunktion . . . 107
numerische . . . 107

reelle 107

U

Umlaufszahl 57

V

Vervollständigung 122
vollständig 119

W

Wahrscheinlichkeitsmaß 108
Weg 1
Wegintegral 8
Wegunabhängigkeit komplexer Kurvenintegrale 43
wegzusammenhängend 6
wesentliche Singularität 77
Windungszahl 57
winkeltreu 20, 22, 24

Z

zusammenhängend 6
Zweig der Logarithmusfunktion 38
zweites Abzählbarkeitsaxiom 144
Zylinderkoordinaten 166

Symbolverzeichnis

(f, Ω) Funktionselement . . . . . S. 71

$(f_1, \Omega_1) \sqcap (f_2, \Omega_2)$ direkte Fortsetzung . S. 71

$\arg z$ Argument von z . . . . . S. 37

$\mathcal{B}_X$ Borelsche σ-Algebra/Borel-Algebra S. 103

$\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ Lebesguesche σ-Algebra . . . . . S. 122

$\dot{\bigcup}$ disjunkte Vereinigung . . . . . S. 6

grad Gradient . . . . . S. 8

$\int_\gamma Y$ Kurvenintegral von Y längs γ . . . S. 8

$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ komplexes Wegintegral . . . . . S. 15

λ_n^B Lebesg.-Borel. Maß, n-dim. . . . S. 119

λ_n Lebesgue-Maß . . . . . S. 122

λ_1^B Lebesg.-Borel. Maß, 1-dim. . . . S. 118

$\mathscr{L}^p(\mu)$ $\mathscr{L}^p$-Raum . . . . . S. 129

$\mathcal{O}_{z_0} f$ Ordnung von f in z_0 . . . . . S. 81

$\mathbb{C}$ komplexe Zahlen . . . . . S. 1

$\mathbb{H}$ obere Halbebene . . . . . S. 75

$\mathbb{H}$ obere Halbebene . . . . . S. 94

$\mathbb{N}_0$ nat. Zahlen mit 0 . . . . . S. 99

$\mathbb{N}$ pos. natürl. Zahlen . . . . . S. 99

$\mathbb{N}$ natürliche Zahlen . . . . . S. 1

$\mathbb{N}^*$ pos. natürl. Zahlen . . . . . S. 1

$\mathbb{R}$ reelle Zahlen . . . . . S. 1

$\mathbb{Z}$ ganze Zahlen . . . . . S. 1

∇ Nabla . . . . . S. 8

$\oint_\gamma Y$ Integr. entl. geschl. Kurv. . . . . S. 9

$\Subset$ offene Teilmenge von . . . . . S. 1

$\mathrm{Res}_{z_0} f$ Residuum von f in z_0 . . . . . S. 84

$\mathrm{rot}\, Y$ Rotation von Y . . . . . S. 11

$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ kompakt getragene glatte Fkt. S. 171

$C^k(I, \mathbb{R}^n)$ k-mal stetig diff'bare Fkt. . . . S. 2

$g * h$ Faltung . . . . . S. 168

$Jf(z_0)$ Jacobi-Matrix von f in z_0 . . . . . S. 18

$L(\gamma)$ Länge der Kurve γ . . . . . S. 3

$L^p := L^p(\mu)$ L^p-Raum . . . . . S. 134

M^+ nicht-neg. messb. Funktionen . S. 126

$M_\mathbb{R}$ reelle messbare Funktionen . . . S. 126

M_e . . . . . S. 126

M messbare Funktionen . . . . . S. 126

T^+ nicht-neg. Treppenfunktionen . S. 126

$T_\mathbb{R}^+$, T_e, T_e^+ . . . . . S. 126

$T_\mathbb{R}$ reelle Treppenfunktionen . . . . . S. 126

T Treppenfunktionen . . . . . S. 126

Liste der Sätze

A

Änderung des Entwicklungspunkts einer Potenzreihe . . . 28
Abschätzungsformel von Cauchy . . . 64
Affin-lineare Maßtransformationsformel . . . 123

C

Carathéodory, Lemma von . . . 110
Casorati-Weierstraß, Satz von . . . 86
Cauchy-Abschätzungen . . . 64
    für Laurentreihen . . . 85
Cauchysche Integralformel . . . 60
Cauchyscher Doppelreihensatz . . . IV
Cauchyscher Integralsatz . . . 53
    für Rechtecke . . . 44
    für stetig diff'bare Funktionen . . . 43
Cavalieris Prinzip . . . 147

D

dominierte Konvergenz . . . 142
Doppelreihensatz von Cauchy . . . IV

F

Fatou, Lemma von . . . 140
Fubini, Satz von . . . 151
Fundamentalsatz der Algebra . . . 65

G

Gebietstreue . . . 66
Gleichmäßige Grenzwerte holomorpher Funktionen . . . 67
Goursat, Satz von . . . 44

H

Hahn, Satz von . . . 116
holomorphe und konforme Funktionen, Satz über . . . 24

I

Identitätssatz
    für analytische Funktionen . . . 35
    für Potenzreihen . . . 34

K

Kehrwerte analytischer Funktionen . . . 32
konservative Vektorfelder, Satz über . . . 14
Kreiskettenverfahren . . . 75

L

Laurent-Entwicklung . . . 82

Levi, Satz von . . . 138
Lineare Maßtransformationsformel . . . 123
Liouville, Satz von . . . 65

M

Maßtransformationsformel für λ_n^B und λ_n . . . 154
affin-lineare . . . 123
unter Diagonalmatrizen . . . 123
unter Rotationsmatrizen . . . 125
majorisierte Konvergenz . . . 140
Maximumsprinzip
für harmonische Funktionen . . . 68
für holomorphe Funktionen . . . 69
Mittelwertgleichung
für harmonische Funktionen . . . 68
für holomorphe Funktionen . . . 68
Monodromiesatz . . . 74
monotone Konvergenz, Satz über . . . 138
Morera, Satz von . . . 62

N

Null- und Polstellen zählende Integrale . . . 91

P

Potenzreihen sind analytisch . . . 30
Potenzreihenentwicklungssatz . . . 63
Prinzip der analytischen Fortsetzung . . . 36

R

Residuensatz . . . 87
riemannscher Abbildungssatz . . . 94
riemannscher Abbildungssatz, starke Version . . . 97
riemannscher Hebbarkeitssatz . . . 85
Rotationsinvarianz von λ_n und λ_n^B . . . 125
Rouché, Satz von . . . 92

S

Schwarzsches Spiegelungsprinzip . . . 75

T

Transformationsformel . . . 153
für das Lebesgue-Maß . . . 154
Translationsinvarianz von λ_n^B und λ_n . . . 123

V

Verkettung
analytischer Funktionen . . . 32
von Potenzreihen . . . 32

W

Wegunabhängigkeit komplexer Kurvenintegrale 43

Literaturverzeichnis

[1] Ahlfors, Complex Analysis, McGraw-Hill

[2] H. W. Alt, Lineare Funktionalanalysis, 2. Auflage, Springer

[3] H. Amann, J. Escher, Analysis II, Birkhäuser

[4] W. Fischer, I. Lieb, Funktionentheorie, Vieweg Studium

[5] O. Forster, Analysis 1, Vieweg Studium

[6] O. Forster, Analysis 2, Vieweg Studium

[7] O. Forster, Analysis 3, Vieweg Studium

[8] E. Freitag, R. Busam, Funktionentheorie 1, Springer

[9] K. Jänich, Funktionentheorie, Springer

[10] D. Salamon, Funktionentheorie, Birkhäuser

[11] R. Remmert, G. Schumacher, Funktionentheorie 1

[12] H. Amann, J. Escher, Analysis III, Birkhäuser

[13] H. Bauer, Maß- und Integrationstheorie, de Gruyter

[14] H. Baum, Vorlesungsskript, Kapitel 11, Einführung in die Maß- und Integrationstheorie, https://www2.mathematik.hu-berlin.de/~diffgeo/index.php?seite=skripte

[15] T. Bröcker, Analysis II, BI Wissenschaftsverlag

[16] J. Elstrodt, Maß- und Integrationstheorie, Springer

[17] P. Halmos, Measure Theory, The University Series in Higher Mathematics, van Nostrand

[18] D. Meintrup, S. Schäffler, Stochastik: Theorie und Anwendungen, Springer Verlag

[19] A. Klenke, Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer

Kommentar zur Funktionentheorie: Jeder sollte sich am besten in der Bibliothek einige Bücher anschauen, um zu sehen, mit welchen er am besten klar kommt. Ich denke, dass die Bücher [9], [4] und [10] für viele gut geeignet sein werden.