Klausur zur Analysis II - Lösungsskizze

Universität Regensburg, Sommersemester 2014
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dr. Nicolas Ginoux

Aufgabe 1 [8 Punkte]

Für U offen in $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$ und eine stetige Funktion $f: U \to \mathbb{R}$ betrachten wir die folgenden Aussagen:

(i) *f ist in x_0 in alle Richtungen differenzierbar*

(ii) *f ist in x_0 partiell differenzierbar*

(iii) *f ist differenzierbar in x_0*

(iv) *f ist partiell differenzierbar auf U und alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \to \mathbb{R}$ sind stetig*

(v) *f ist stetig differenzierbar auf U*

(vi) *f ist zweimal differenzierbar auf U*

(vii) *f ist zweimal partiell differenzierbar auf U*

$(viii)$ *f ist zweimal partiell differenzierbar auf U und für alle i, j gilt*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

Welche der folgenden Implikationen sind wahr (keine Begründung erforderlich):

(a) $(i) \Longrightarrow (ii)$	(c) $(i) \Longrightarrow (iii)$	(e) $(iv) \Longrightarrow (v)$	(g) $(vi) \Longrightarrow (viii)$
(b) $(ii) \Longrightarrow (i)$	(d) $(iii) \Longrightarrow (ii)$	(f) $(v) \Longrightarrow (iv)$	(h) $(vii) \Longrightarrow (viii)$

Bewertung: $\max\{$*Anzahl der richtigen Antworten* $-$ *Anzahl der falschen Antworten*$, 0\}$

(a) wahr	(c) falsch	(e) wahr	(g) wahr
(b) falsch	(d) wahr	(f) wahr	(h) falsch

Aufgabe 2 [2+3+2+3=10 Punkte]

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := -(x+y)^3 + 12xy$.

(a) *Bestimmen Sie die stationären Punkte von* f.

(b) *Bestimmen Sie für jeden stationären Punkt, ob es sich um ein lokales Minimum, ein lokales Maximum oder einen Stattelpunkt von* f *handelt.*

(c) *Zeigen Sie, dass* $f_{|\overline{B}_2(0)}\colon \overline{B}_2(0) \to \mathbb{R}$ *ein Minimum und ein Maximum annimmt.*

(d) *Zeigen Sie, dass* $f_{|B_2(0)}\colon B_2(0) \to \mathbb{R}$ *weder ein Maximum noch ein Minimum annimmt.*
(Hinweis: berechnen Sie $f(-1,-1) - f(1,1)$.)

(a) Die Abbildung f ist als Polynom unendlich oft differenzierbar; für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$f'(x,y) = \Big(-3(x+y)^2 + 12y \qquad -3(x+y)^2 + 12x \Big).$$

Insbesondere ist $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ genau dann ein stationärer Punkt von f, wenn $f'(x,y) = 0$, d.h. g.d.w.

$$\begin{cases} -3(x+y)^2 + 12y &= 0 \\ -3(x+y)^2 + 12x &= 0 \end{cases}.$$

Dieses Gleichungssystem ist äquivalent zu $(x+y)^2 = 4x = 4y$, d.h. zu $x = y$ und $4x^2 = 4x$, d.h. zu $x = y = 0$ oder $x = y = 1$. Die stationären Punkte von f sind damit $(0,0)^T$ **und** $(1,1)^T$.

(b) Die zweite Ableitung von f an einer beliebigen Stelle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} -6(x+y) & -6(x+y)+12 \\ -6(x+y)+12 & -6(x+y) \end{pmatrix}.$$

Für $(x,y) = (0,0)$ gilt $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$; diese Matrix hat 12 und -12 als Eigenwerte und damit ist $(0,0)^T$ **ein Sattelpunkt von** f. Für $(x,y) = (1,1)$ gilt $f''(1,1) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$; diese Matrix ist bereits diagonal mit zwei negativen Eigenwerten und damit ist $(1,1)^T$ **ein lokales Maximum von** f.

(c) Die Abbildung $f_{|\overline{B}_2(0)}$ ist als Einschränkung einer stetigen Abbildung ebenfalls **stetig**. Da $\overline{B}_2(0)$ **kompakt** ist, nimmt $f_{|\overline{B}_2(0)}$ nach Vorlesung (mindestens) ein Minimum und ein Maximum an.

(d) Wegen $B_2(0)$ offen im $\mathbb{R}^2$ ist jedes Maximum bzw. Minimum von $f_{|B_2(0)}$ insbesondere ein *lokales* Maximum bzw. Minimum von f. Da nach Aufgabenteil (b) f kein lokales Minimum annimmt, nimmt $f_{|B_2(0)}$ **kein Minimum** an. Desweiteren ist $(1,1)^T$ die einzige Stelle, wo $f_{|B_2(0)}$ ein Maximum annehmen kann. Da aber $f(-1,-1) - f(1,1) = 8 + 8 = 16 > 0$ ist nimmt f auf keinen Fall ein Maximum in $(1,1)^T$ an. Daraus folgt, dass $f_{|B_2(0)}$ **kein Maximum** annimmt.

Aufgabe 3 [2+2+2+2+2+2=12 Punkte]

Geben Sie bei jedem Aufgabenteil an, ob das Integral als eigentliches oder uneigentliches Riemann-Integral existiert und ggf. berechnen Sie dieses Integral.

(a) $\int_1^2 (3t^3+3t^2+5)\,dt$

(b) $\int_0^x e^{3t}\sin(t)\,dt$

(c) $\int_0^x te^{-t}\,dt$

(d) $\int_0^x t^3 e^{-t^2}\,dt$

(e) $\int_1^x \frac{e^t}{1-e^{2t}}\,dt,\ x>1$

(f) $\int_0^x \frac{e^t}{1-e^{2t}}\,dt,\ x>0$

(a) Die zu integrierende Funktion ist stetig auf $[1;2]$ und damit Riemann-integrierbar, d.h. das Integral ist ein eigentliches Riemann-Integral. Desweiteren gilt

$$\begin{aligned}\int_1^2 (3t^3+3t^2+5)\,dt &= \left[\frac{3t^4}{4}+t^3+5t\right]_1^2 \\ &= \frac{3}{4}(16-1)+8-1+5 \\ &= \frac{45+28+20}{4} \\ &= \frac{93}{4}.\end{aligned}$$

(b) Die zu integrierende Funktion ist stetig auf $[0;x]$ und damit Riemann-integrierbar, d.h. das Integral ist ein eigentliches Riemann-Integral. Eine erste Berechnung des Integrals erfolgt über die Darstellung $e^{it}=\cos(t)+i\sin(t)$: es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{3t}\sin(t)\,dt &= \mathrm{Im}\left(\int_0^x e^{(3+i)t}\,dt\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(3+i)t}}{3+i}\right]_0^x\right) \\ &= \frac{1}{10}\mathrm{Im}\left((3-i)(e^{(3+i)x}-1)\right) \\ &= \frac{1}{10}\left(3e^{3x}\sin(x)-e^{3x}\cos(x)+1\right) \\ &= \frac{1}{10}\left(e^{3x}(3\sin(x)-\cos(x))+1\right).\end{aligned}$$

Eine alternative Methode besteht darin, partiell zu integrieren: es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{3t}\sin(t)\,dt &= \left[-e^{3t}\cos(t)\right]_0^x + 3\int_0^x e^{3t}\cos(t)\,dt \\ &= -e^{3x}\cos(x)+1+3\left[e^{3t}\sin(t)\right]_0^x - 9\int_0^x e^{3t}\sin(t)\,dt.\end{aligned}$$

Bringen wir $9\int_0^x e^{3t}\sin(t)\,dt$ auf die rechte Seite, so bekommen wir

$$\int_0^x e^{3t}\sin(t)\,dt = \frac{1}{10}(-e^{3x}\cos(x)+1+3e^{3x}\sin(x)).$$

(c) Die zu integrierende Funktion ist stetig auf $[0;x]$ und damit Riemann-integrierbar, d.h. das Integral ist ein eigentliches Riemann-Integral. Wir integrieren partiell und bekommen

$$\begin{aligned}\int_0^x te^{-t}\,dt &= \left[-te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}\,dt \\ &= -xe^{-x} - \left[e^{-t}\right]_0^x \\ &= -(x+1)e^{-x} + 1.\end{aligned}$$

(d) Die zu integrierende Funktion ist stetig auf $[0;x]$ und damit Riemann-integrierbar, d.h. das Integral ist ein eigentliches Riemann-Integral. Wir substituieren $u := t^2$ und bekommen

$$\begin{aligned}\int_0^x t^3e^{-t^2}\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^{x^2} ue^{-u}\,du \\ &\overset{(c)}{=} \frac{1}{2}\left(1-(x^2+1)e^{-x^2}\right).\end{aligned}$$

Alternativ konnte man direkt partiell integrieren:

$$\begin{aligned}\int_0^x t^3e^{-t^2}\,dt &= -\frac{1}{2}\int_0^x t^2(-2te^{-t^2})\,dt \\ &= -\frac{1}{2}\left[t^2e^{-t^2}\right]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x 2te^{-t^2}\,dt \\ &= -\frac{1}{2}x^2e^{-x^2} - \frac{1}{2}\left[e^{-t^2}\right]_0^x \\ &= \frac{1}{2}\left(1-(x^2+1)e^{-x^2}\right).\end{aligned}$$

(e) Bemerke, dass die Funktion $t \mapsto \frac{e^t}{1-e^{2t}}$ lediglich für $t=0$ nicht definiert ist; wegen $x>1$ ist diese Funktion Riemann-integrierbar auf $[1;x]$, d.h. es handelt sich hier um ein eigentliches Riemann-Integral. Wir substituieren $u := e^t$ und, wegen $u>1$, bekommen

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{e^t}{1-e^{2t}}\,dt &= \int_e^{e^x}\frac{du}{1-u^2} \\ &= \frac{1}{2}\int_e^{e^x} \frac{1}{1+u} - \frac{1}{u-1}\,du \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln(u+1)-\ln(u-1)\right]_e^{e^x} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^x+1}{e+1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^x-1}{e-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e+1}{e-1}\right).\end{aligned}$$

(f) Hier allerdings handelt es sich um ein **uneigentliches** Riemann-Integral, da $t \mapsto \frac{e^t}{1-e^{2t}}$ an der Stelle $t=0$ nicht definiert ist. Wir betrachten, für $\varepsilon \in (0;1)$, das (wohldefinierte eigentliche) Riemann-Integral $\int_\varepsilon^x \frac{e^t}{1-e^{2t}}\,dt$ und untersuchen, ob der

Grenzwert dieses Integrals für $\varepsilon \to 0$ existiert. Die Berechnung von $\int_\varepsilon^x \frac{e^t}{1-e^{2t}}\,dt$ geht wie oben: wir bekommen

$$\int_\varepsilon^x \frac{e^t}{1-e^{2t}}\,dt = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^\varepsilon+1}{e^\varepsilon-1}\right).$$

Nun gilt $\ln(e^\varepsilon - 1) \underset{\varepsilon\searrow 0}{\longrightarrow} -\infty$ und damit

$$\int_\varepsilon^x \frac{e^t}{1-e^{2t}}\,dt \underset{\varepsilon\searrow 0}{\longrightarrow} -\infty.$$

Deswegen **existiert das Integral** $\int_0^x \frac{e^t}{1-e^{2t}}\,dt$ **nicht**.

Aufgabe 4 [2+1+2+1+2=8 Punkte]

(a) Sei $(f_n\colon [-1;1] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge differenzierbarer Funktionen, die punktweise gegen $f\colon [-1;1] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Geben Sie einen Satz aus der Vorlesung an, mit dem man unter geeigneten Voraussetzungen schließen kann, dass die Funktion f differenzierbar ist.

Von nun an sei $f_n\colon [-1;1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[4]{x^2 + \frac{1}{n}}$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Bestimmen Sie den punktweisen Limes f von $(f_n)_n$.

(c) Zeigen Sie, dass $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen f konvergiert.
(Hinweis: Sie dürfen folgende Ungleichung benutzen: $\sqrt[4]{a+b} \leq \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$ für alle $a, b \in [0;\infty)$.)

(d) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion f_n differenzierbar ist.

(e) Konvergiert die Folge $(f_n')_n$ gleichmäßig gegen eine Funktion g?

(a) Konvergiert die Funktionenfolge $(f_n')_n$ **gleichmäßig** gegen eine Funktion $g\colon [-1;1] \to \mathbb{R}$, so ist f differenzierbar mit Ableitung g (und $(f_n)_n$ konvergiert gleichmäßig gegen f auf $[-1;1]$).

(b) Es gilt $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$; da $x \mapsto \sqrt[4]{x^2}$ als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig ist, folgt $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ für alle $x \in [-1;1]$, wobei $f\colon [-1;1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt[4]{x^2} = \sqrt{|x|}$.

(c) Für alle $x \in [-1;1]$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt nach der Ungleichung $\sqrt[4]{a+b} \leq \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$:

$$0 \leq f_n(x) - f(x) \leq \sqrt[4]{\frac{1}{n}},$$

insbesondere $\sup\limits_{x\in[-1;1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \sqrt[4]{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Dies beweist, dass $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

(d) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $x \mapsto x^2 + \frac{1}{n}$ offensichtlich differenzierbar mit Werten in $[\frac{1}{n};\infty)$. Da $(0;\infty) \to (0;\infty)$, $x \mapsto \sqrt[4]{x}$ ebenfalls differenzierbar ist (nicht aber an der Stelle 0), folgt, dass f_n als Verknüpfung differenzierbarer Funktionen differenzierbar ist.

(e) **Nein**, die Folge $(f_n')_n$ kann gegen keine Funktion g (egal welche) gleichmäßig konvergieren, denn sonst wären alle Voraussetzungen des Satzes aus Aufgabenteil (a) erfüllt und damit *müsste* die Grenzfunktion f differenzierbar sein. Hier aber ist f **nicht differenzierbar an der Stelle** $x = 0$: es gilt $\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\searrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$.

Aufgabe 5 [10 Punkte]

Bestimmen Sie für jede der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, welche der folgenden Eigenschaften erfüllt sind: offen im $\mathbb{R}^2$, abgeschlossen im $\mathbb{R}^2$, beschränkt im $\mathbb{R}^2$, kompakt, zusammenhängend. Für jede erfüllte Eigenschaft schreiben Sie bitte „J" in die Tabelle, für jede nicht erfüllte Eigenschaft schreiben Sie „N". Dabei ist keine Begründung erforderlich. Leere Kästchen werden weder positiv noch negativ gewertet.

Menge	offen	abgeschlossen	beschränkt	kompakt	zusammenhängend
$B_r(0)$, $r > 0$	J	N	J	N	J
$\overline{B}_1(0) \cup \{(2,0)^T\}$	N	J	J	J	N
$\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \colon \lvert xy \rvert \geq 1\}$	N	J	N	N	N
$\left\{(\frac{1}{n}; (-1)^n)^T \mid n \in \mathbb{N}\right\}$	N	N	J	N	N

Bewertung: $\max\left\{\frac{\textit{Anzahl der richtigen Antworten} - \textit{Anzahl der falschen Antworten}}{2}, 0\right\}$

Aufgabe 6 [1+1+2+2+1+1=8 Punkte]

Seien X, Y Hausdorff-Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Beantworten Sie ohne Begründung, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Die Abbildung f ist genau dann stetig, wenn für jede offene Teilmenge U von Y die Teilmenge $f^{-1}(U)$ offen in X ist.

(b) Die Abbildung f ist genau dann stetig, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge A von Y die Teilmenge $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X ist.

(c) Die Abbildung f ist genau dann stetig, wenn für jede kompakte Teilmenge A von X die Teilmenge $f(A)$ kompakt ist.

(d) Die Abbildung f ist genau dann stetig, wenn für jede kompakte Teilmenge A von Y die Teilmenge $f^{-1}(A)$ kompakt ist.

(e) Jede Metrik auf X induziert eine Topologie auf X.

(f) Sind d_1 und d_2 verschiedene Metriken auf X, so induzieren sie verschiedene Topologien auf X.

(a) wahr

(b) wahr

(c) falsch

(d) falsch

(e) wahr

(f) falsch

Aufgabe 7 [2+2=4 Punkte]

(a) Formulieren Sie den lokalen Umkehrsatz für Funktionen in mehreren Veränderlichen.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) := \left((y+1)e^x, (1+x^2)\sin(y)\right)^T$. *Entscheiden Sie, ob der lokale Umkehrsatz für* f *in der* $0 \in \mathbb{R}^2$ *anwendbar ist.*

(a) Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine auf einer offenen Teilmenge U des $\mathbb{R}^n$ definierte stetig differenzierbare Funktion. Angenommen, in einem Punkt $p \in U$ sei $f'(p)$ invertierbar. Dann existieren offene Umgebungen V von p in U und W von $f(p)$ in $\mathbb{R}^n$ so, dass $f_{|V}\colon V \to W$ ein C^1-Diffeomorphismus ist.

(b) Die Abbildung f ist offensichtlich unendlich oft (insbesondere stetig) differenzierbar mit

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} (y+1)e^x & e^x \\ 2x\sin(y) & (1+x^2)\cos(y) \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Insbesondere gilt $f'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Da diese Matrix invertierbar ist (ihre Determinante ist $1 \neq 0$), ist der lokale Umkehrsatz für f in der $0 \in \mathbb{R}^2$ anwendbar.

Aufgabe 8 [2+2+2+2=8 Punkte]

Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen M von $\mathbb{R}^2$ Untermannigfaltigkeiten sind oder nicht. Eine Begründung ist dabei nur dann erforderlich, wenn es sich um eine Untermannigfaltigkeit handelt.

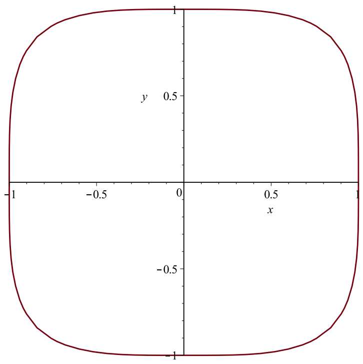
(a) $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^4 + y^4 = 1\}$.

(b) $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy = 0\}$.

(c) $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy = 1\}$.

(d) $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (2x+y)^3 = 0\}$.

(a) **JA**: die Funktion $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 1$ ist unendlich (insbesondere stetig) differenzierbar mit $g'(x,y) = 4\,(x^3 \;\; y^3)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; da $(x,y) \neq (0,0)$ ist ebenfalls $g'(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in g^{-1}(\{0\})$. Damit ist 0 ein regulärer Wert von g und daraus folgt, dass $g^{-1}(\{0\}) = M$ eine Untermannigfaltigkeit (der Dimension 1) von $\mathbb{R}^2$ ist.



(b) **NEIN**: M ist die Vereinigung der x- und der y-Achsen und wegen der Kreuzung der beiden kann M keine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ sein, siehe z.B. Übungen und Zentralübung.

(c) **JA**: die Funktion $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy - 1$ ist unendlich (insbesondere stetig) differenzierbar mit $g'(x,y) = (y \;\; x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; da $(x,y) \neq (0,0)$ ist ebenfalls $g'(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in g^{-1}(\{0\})$. Damit ist 0 ein regulärer Wert von g und daraus folgt, dass $g^{-1}(\{0\}) = M$ eine Untermannigfaltigkeit (der Dimension 1) von $\mathbb{R}^2$ ist. Tatsächlich ist M die Vereinigung zweier *Hyperbeln*.

(d) **JA**: denn es gilt $(2x+y)^3 = 0$ g.d.w. $2x + y = 0$, somit ist

$$M = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2x + y = 0\big\} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

als Gerade (eindimensionaler Untervektorraum) eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 9 [2+2=4 Punkte]

Für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ mit $(-x_1, x_2) \in U$ für alle $(x_1, x_2) \in U$ sei

$$f\colon U \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

eine stetig differenzierbare Abbildung so, dass

$$\left.\begin{array}{ll} f_1(-x_1, x_2) & = -f_1(x_1, x_2) \\ f_2(-x_1, x_2) & = f_2(x_1, x_2) \end{array}\right\} \qquad (+)$$

für alle $(x_1, x_2) \in U$ erfüllt ist.

(a) *Sei $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2)^T \mapsto (x_1, 1)^T$. Zeigen Sie, dass $\tilde{f}$ die Bedingung $(+)$ erfüllt. Bestimmen Sie die Integralkurven des Vektorfelds $\tilde{f}$ (inklusive maximales Lösungsintervall) und skizzieren Sie sie.*

(b) *Sei f eine beliebige C^1-Funktion, die $(+)$ erfüllt. Zeigen Sie: ist $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^2$[1], $t \mapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t))^T$, eine Integralkurve von f auf einem offenen Intervall I um die $0 \in \mathbb{R}$ mit $\varphi_1(0) = 0$, so gilt $\varphi_1(t) = 0$ für alle $t \in I$.*
(Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrie und Picard-Lindelöf)

(a) Die Funktion $\widetilde{f_1}(x_1, x_2) := x_1$ erfüllt offensichtlich $\widetilde{f_1}(-x_1, x_2) = -x_1 = -\widetilde{f_1}(x_1, x_2)$ und die Funktion $\widetilde{f_2}(x_1, x_2) := 1$ erfüllt offensichtlich $\widetilde{f_2}(-x_1, x_2) = 1 = \widetilde{f_2}(x_1, x_2)$, für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ (und $\mathbb{R}^2$ erfüllt offensichtlich die Symmetrie-Eigenschaft). Damit erfüllt $\widetilde{f}$ die Bedingung $(+)$.
Eine auf einem (nichtleeren) offenen Intervall I definierte differenzierbare Abbildung $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T\colon I \to \mathbb{R}^2$ ist genau dann eine Integralkurve von $\widetilde{f}$, wenn

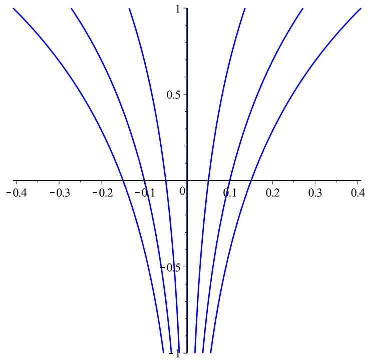
$$\left\{\begin{array}{ll} \varphi_1'(t) & = \varphi_1(t) \\ \varphi_2'(t) & = 1 \end{array}\right.$$

für alle $t \in I$ erfüllt ist. Nun ist $\varphi_1'(t) = \varphi_1(t)$ eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung in $\mathbb{R}$, deren allgemeine Lösung der Form $\varphi_1(t) = \lambda e^t$ ist für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Außerdem ist die allgemeine Lösung von $\varphi_2'(t) = 1$ durch $\varphi_2(t) = t + c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gegeben. Beide Lösungen sind auf $\mathbb{R}$ definiert. Damit sind die Integralkurven von $\widetilde{f}$ gegeben durch

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto \varphi(t) := \begin{pmatrix} \lambda e^t \\ t + c \end{pmatrix}$$

für Konstanten $\lambda, c \in \mathbb{R}$. Für $\lambda = 0$ ist $t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ t + c \end{pmatrix}$ eine Standardparametrisierung der y-Achse und für $\lambda \neq 0$ ist das Bild von φ eines reskalierten Graphes der Exponentialfunktion.

[1] Es sollte $\varphi\colon I \to U$ heißen.



(b) Wegen (+) gilt $f_1(0,x_2) = -f_1(0,x_2)$ und damit $f_1(0,x_2) = 0$ für alle $x_2 \in \mathbb{R}$ mit $(0,x_2) \in U$. Setze $\Omega := \{(t,x) \in I \times \mathbb{R} \,|\, (x, \varphi_2(t)) \in U\} \subset \mathbb{R}^2$. Bemerke, dass wegen φ_2 stetig die Teilmenge Ω offen in $I \times \mathbb{R}$ und damit auch in $\mathbb{R}^2$ ist. Betrachte nun die Abbildung $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $g(t,x) := f_1(x, \varphi_2(t))$. Wegen f und φ_2 stetig ist g stetig und wegen f stetig differenzierbar ist g lokal Orts-Lipschitz-stetig. Desweiteren löst $\varphi_1\colon I \to \mathbb{R}$ nach Voraussetzung das Anfangswertproblem $x'(t) = g(t, x(t))$, $x(0) = 0$. Wegen $g(t,0) = f_1(0, \varphi_2(t)) = 0$ für alle $t \in I$ löst die Nullabbildung $I \to \mathbb{R}$ dasselbe Anfangswertproblem. Nach der **Eindeutigkeitsaussage im Satz von Picard-Lindelöf** folgt, dass φ_1 mit der Nullabbildung übereinstimmen muss, d.h. es gilt $\varphi_1(t) = 0$ für alle $t \in I$.
Alternativ konnte man die Abbildung $\widehat{\varphi}\colon I \to U$, $t \mapsto (-\varphi_1(t), \varphi_2(t))^T$ betrachten (bemerke, dass $\widehat{\varphi}$ wegen der Symmetrie-Eigenschaft von U wohl seine Werte in U hat). Diese Abbildung ist differenzierbar mit

$$\widehat{\varphi}'(t) = \begin{pmatrix} -\varphi_1'(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \\ f_2(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \end{pmatrix} \overset{(+)}{=} \begin{pmatrix} f_1(-\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \\ f_2(-\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \end{pmatrix},$$

d.h. es gilt $\widehat{\varphi}'(t) = f(\widehat{\varphi}(t))$ für alle $t \in I$. Damit ist $\widehat{\varphi}$ eine Lösung derselben Differentialgleichung wie φ; außerdem gilt $\widehat{\varphi}(0) = \varphi(0)$ wegen $\varphi_1(0) = 0$. Da f als stetig differenzierbare Abbildung lokal-Orts-Lipschitz-stetig ist, folgt dann aus der Eindeutigkeitsaussage im Satz von Picard-Lindelöf, dass $\widehat{\varphi}(t) = \varphi(t)$ für alle $t \in I$ gilt, insbesondere $\varphi_1(t) = -\varphi_1(t)$, d.h. $\varphi_1(t) = 0$ für alle $t \in I$.

Aufgabe 10 [2+1+1+4=8 Punkte]

Sei $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto \frac{xt}{\sqrt{2x^2t^2+1}}$.

(a) *Zeigen Sie, dass f beschränkt und lokal Lipschitz-stetig ist.*

(b) *Zeigen Sie, dass die gewöhnliche Differentialgleichung $\varphi'(t) = f\big(t, \varphi(t)\big)$ mit Anfangsbedingung $\varphi(0) = 1$ eine eindeutige Lösung $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ mit maximalem Lösungsintervall $I = (t_{\min}; t_{\max})$ besitzt.*

(c) *Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C \in (0;\infty)$ gibt mit $|\varphi(t) - \varphi(s)| \le C \cdot |t-s|$ für alle $t, s \in I$.*

(d) *Zeigen Sie, dass $t_{\max} = \infty$ gilt.*
(Anleitung: nehmen Sie an, dass $t_{\max} < \infty$ ist. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil (c), dass für jede Folge $(t_k)_k$ aus I mit $t_k \nearrow t_{\max}$ die Folge $(\varphi(t_k))_k$ eine Cauchy-Folge ist. Zeigen Sie dann, dass $\lim\limits_{t \to t_{\max}} \varphi(t)$ existiert und folgern Sie die Behauptung.

(a) Für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$|f(t,x)| = \frac{|xt|}{\sqrt{2x^2t^2+1}} \leq \frac{\sqrt{x^2t^2+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2x^2t^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

und damit ist f beschränkt. Desweiteren ist f als Verknüpfung und Quotient stetig differenzierbarer Abbildungen ebenfalls stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$ (die Wurzel im Nenner stellt kein Problem dar, da $2x^2t^2 + 1 \geq 1 > 0$ für alle x, t gilt); aus dem **Mittelwertsatz** folgt, dass f dann lokal-Lipschitz-stetig ist.

(b) Die Abbildung f ist als lokal-Lipschitz-stetige Funktion automatisch stetig und lokal-Orts-Lipschitz-stetig. Deswegen sind die Voraussetzungen des **Satzes von Picard-Lindelöf** erfüllt. Der Satz liefert die Existenz eines offenen Intervalls $I = (t_{\min}; t_{\max})$ und einer eindeutigen differenzierbaren Abbildung $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ mit $\varphi'(t) = f\big(t, \varphi(t)\big)$ sowie $\varphi(0) = 1$ und so, dass sich φ als Lösung der Differentialgleichung nicht fortsetzen lässt.

(c) Da die Abbildung φ differenzierbar ist, folgt aus dem **Mittelwertsatz**, für alle $t, s \in I$ mit (o.B.d.A.) $s < t$:

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq \sup_{\tau \in [s;t]} |\varphi'(\tau)| \cdot |t-s|.$$

Wegen $\varphi'(\tau) = f(\tau, \varphi(\tau))$ und f beschränkt (nach Aufgabenteil (a)) folgt die Existenz einer Konstanten $C \in (0;\infty)$ mit $|f(\tau,\varphi(\tau))| \leq C$ für alle $\tau \in I$ und damit

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq C \cdot |t-s|.$$

(d) Angenommen, es gelte $t_{\max} < \infty$. Sei $(t_k)_k$ eine beliebige Folge aus I mit $t_k \nearrow t_{\max}$. Aus Aufgabenteil (c) folgt dann $|\varphi(t_k) - \varphi(t_l)| \leq C \cdot |t_k - t_l|$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$. Da $(t_k)_k$ gegen $t_{\max}$ konvergiert, ist $(t_k)_k$ eine Cauchy Folge; nach der letzten Abschätzung ist $(\varphi(t_k))_k$ ebenfalls eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert ein $\widehat{x} \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{k\to\infty} \varphi(t_k) = \widehat{x}$. Beachte an der Stelle, dass $\widehat{x}$ *a priori* von der Folge $(t_k)_k$ abhängt. Da aber die Folge $(\varphi(t_k))_k$ für *jede* Folge $(t_k)_k$ mit $t_k \nearrow t_{\max}$ konvergiert, darf es nur einen Grenzwert geben: sind $(t_k)_k$ und $(s_k)_k$ zwei solche Folgen, so definiere die Folge $(u_k)_k$ durch $u_{2k} := t_k$ und $u_{2k+1} := s_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und bekomme eine neue Folge mit $u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} t_{\max}$ so, dass der Grenzwert von $(\varphi(u_k))_k$ mit den von $(\varphi(t_k))_k$ und $(\varphi(s_k))_k$ übereinstimmen muss (alle Teilfolgen einer konvergenten Folge haben denselben Grenzwert als die Folge selbst). Insgesamt existiert ein $\widehat{x} \in \mathbb{R}$ so, dass für *jede* Folge $(t_k)_k$ aus I mit $t_k \nearrow t_{\max}$ die Folge $(\varphi(t_k))_k$ gegen $\widehat{x}$ konvergiert. Nach Analysis I beweist dies $\lim_{t\to t_{\max}} \varphi(t) = \widehat{x}$. Aus Proposition 3.15 aus Kapitel 9 folgt dann, dass **sich φ als Lösung auf einem Intervall $I' = (t_{\min}; T)$ mit $T > t_{\max}$ fortsetzt**, Widerspruch zur Maximalität von $I = (t_{\min}; t_{\max})$.
Insgesamt haben wir bewiesen, dass $t_{\max} = \infty$ gilt.