Analysis II

Universität Regensburg, SS 2019

Dozent: Prof. Dr. Bernd Ammann — Übungsleitung: Dr. Karsten Bohlen

Übungsblatt 13

Abgabe bis Freitag 19.7.2019 um 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (*2 + 2 Punkte*)**.** *(a)* Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$x'(t) = \frac{\sqrt{2 - x(t)^2}}{x(t)}, \ x(0) = 1$$

und geben sie das maximale Existenzintervall an.
Hinweis: Umformen und $y(t) = 2 - x(t)^2$ substituieren.
(b) Finden Sie eine Lösung der Gleichung

$$x'(t) = \frac{1}{x(t)}$$

auf dem maximalen Existenzintervall für jedes $x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass keine weiteren Lösungen existieren.

Aufgabe 2 (*2 + 2 Punkte*)**.** Wir betrachten das inhomogene lineare System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$y' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

i) Bestimmen Sie zwei linear unabhängige Lösungen $y_1, y_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des homogenen Systems

$$y' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y.$$

Bestimmen Sie weiter die Lösung $y \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des homogenen Systems mit $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

ii) Bestimmen Sie nun die Lösung $y \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des inhomogenen Systems (1) mit $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3 (*3 + 1 Punkte*)**.** Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und stetige Funktionen $g, h \colon I \to \mathbb{R}$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$\varphi'(t) = g \cdot \varphi(t) + h \cdot \varphi(t)^\alpha$$

auf I, wobei $\varphi(t) > 0$ vorausgesetzt wird.
(a) Zeigen Sie, dass eine positive Funktion φ genau dann eine Lösung dieser Differentialgleichung ist, wenn die Funktion $\psi := \varphi^{1-\alpha}$ die Differentialgleichung

$$\psi'(t) = (1 - \alpha)(g \cdot \psi(t) + h)$$

löst.
(b) Bestimmen Sie eine positive Lösung der Differentialgleichung $x' = \frac{x}{3t} + tx^4$ mit $x(1) = 1$.

Aufgabe 4 (*1 + 1 +1 +1 Punkte*)**.** Wir betrachten die gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{2}$$

für $a, b \in \mathbb{R},\ y{:}\, I \to \mathbb{C},\ \ I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall. Weiter betrachten wir das lineare System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \tag{3}$$

i) Zeigen Sie: Ist (y, z) eine Lösung von (3), so ist y eine Lösung von (2). Ist y eine Lösung von (2), so kann man es auf eindeutige Art zu einer Lösung (y, z) von (3) ergänzen.

ii) Zeigen Sie: die Menge der Lösungen von (2) ist ein Vektorraum und bestimmen Sie dessen Dimension.

iii) Bestimmen Sie im Fall $a^2 \neq 4b$ zwei linear unabhängige Lösungen für (2) mit Hilfe des Ansatzes $y(t) = \exp(\lambda t)$.

iv) Nun sei $a^2 \neq 4b$ mit $a+b \neq -1$. Bestimmen Sie **eine** spezielle Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y'' + ay' + by = \exp(t) \tag{4}$$

mit dem Ansatz $y(t) = c\exp(\lambda t)$. Bestimmen Sie dann die Menge **aller** Lösungen von (4).