Analysis II

Universität Regensburg, SS 2019

Dozent: Prof. Dr. Bernd Ammann Übungsleitung: Dr. Karsten Bohlen

Übungsblatt 10

Abgabe bis Freitag 28.06.2019 um 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (*4 Punkte*)**.** Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} F_1(x,y_1,y_2) &= x^3 + y_1^3 + y_2^3 - 26, \\ F_2(x,y_1,y_2) &= xy_1 + y_1y_2 + y_2x + 3 \end{aligned}$$

lokal in der Nähe von $(3,-1,0)$ der Graph einer stetigen Funktion $f\colon (3-\epsilon, 3+\epsilon) \to \mathbb{R}^2$ ist, für ein $\epsilon > 0$. Berechnen Sie $f'(3)$.

Aufgabe 2 (*2 + 2 Punkte*)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte man folgende Gleichung im $\mathbb{R}^3$:

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} = xyz. \tag{G1}$$

(a) Zeigen Sie, dass offene Umgebungen U von $(1,-1)$ in $\mathbb{R}^2$ und V von 0 in $\mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft existieren: für alle $(x,y) \in U$ gibt es ein eindeutiges $z = g(x,y) \in V$ so, dass (x,y,z) die Gleichung (G1) löst.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $g\colon U \to V$ differenzierbar ist und berechnen Sie $g'(1,-1)$.

Aufgabe 3 (*2 + 2 Punkte*)**.** Man betrachte folgendes Gleichungssytem im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} e^x - y + x - z &= -1 \\ ye^{-z} - e^{-1} &= 0 \end{cases}. \tag{G2}$$

(a) Sei $(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) \in \mathbb{R}^3$ eine beliebige Lösung von (G2). Zeigen Sie, dass eine offene Umgebung U von $\hat{x}$ in $\mathbb{R}$ und C^1-Funktionen $g,h\colon U \to \mathbb{R}$ existieren mit $g(\hat{x}) = \hat{y}$, $h(\hat{x}) = \hat{z}$ und so, dass für $y = g(x)$ und $z = h(x)$ das Tripel $(x, g(x), h(x))$ für alle $x \in U$ das Gleichungssystem (G2) löst.

(b) Sei nun $(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) = (0,1,1)$ und $g,h\colon U \to \mathbb{R}$ wie in Aufgabenteil (a). Bestimmen Sie $g'(0)$ und $h'(0)$.

Aufgabe 4 (*4 Punkte*)**.** Gegeben sei die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \mapsto A^2$. Bestimmen Sie $f'(\mathbb{1}_n)$. Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen V, W von $\mathbb{1}_n$ in $\mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, sodass $f_{|V}\colon V \to W$ eine differenzierbare Umkehrfunktion besitzt. Dies nennen wir dann die lokal definierte *Wurzelfunktion*.