Übungsblatt 5

1. Aufgabe

1) Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass folgende Normen äquivalent sind:

$$\|u\|_1 := \|u\|_{H^{k,p}}, \tag{1}$$
$$\|u\|_2 := \max_{j=0\dots k} \|\nabla^j u\|_{L^p}, \tag{2}$$
$$\|u\|_3 := \left(\sum_{j=1}^{k} \|\nabla^j u\|_{L^p}^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{für } 1 < q < \infty \tag{3}$$

2) Es sei M kompakt und $(\varphi_1 : U_1 \to V_1, \cdots, \varphi_l : U_l \to V_l)$ ein Atlas von M, sowie $(\eta_i)_{i=1}^l$ eine Partition der Eins. Dann ist die folgende Norm ebenfalls äquivalent zu (1)-(3):

$$\|u\|_{H^{k,p}(\mathbb{R}^n)} := \sum_{j=1}^{l} \|(\eta_j \circ u) \circ \varphi_j^{-1}\|_{H^{k,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{4}$$

2. Aufgabe

Sei M eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit. Beweisen Sie, dass für alle $u \in C_c^\infty(M)$

$$\|\Delta u\|_{H^k(M)} \leq C\|u\|_{H^{k+2}(M)}, \text{ für ein } C > 0.$$

3. Aufgabe

Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ \cosh(\sqrt{x^2 + y^2}) \end{pmatrix}$$

und $M := F(\mathbb{R}^2)$. Bestimmen Sie die Geodätischen durch $p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Exponentialabbildung $\exp_p : T_pM \to M$. Berechnen Sie die Koeffizienten (g_{ij}) der Metrik g in Normalkoordinaten mit Zentrum p.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst durch ein Symmetrieargument, dass alle Geodätische durch p die Form $t \mapsto F\big(\tau(t)(x_0, y_0)\big) = \exp(t(x_0, y_0))$ mit $\tau'(0) = 1$ haben.

4. Aufgabe

Es sei $E \to M$ eine Vektorbündel vom Rang r über dem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ mit einem reellen bzw. hermitschen Zusammenhang und einem damit kompatiblen Zusammenhang ∇. Sei $U \xrightarrow{\varphi} V$ eine Karte, und seien $s_1, \cdots, s_r : U \to E$ auf U definierte Schnitte von E, sodass $(s_1(x), \cdots, s_r(x))$ eine Orthonormalbasis von E_x liefert für alle $x \in U$. Weiterhin seien

$\partial_1, \cdots, \partial_n$ die Koordinatenvektorfelder von φ, die wir mit den zugehörigen Derivationen identifizieren.

Zeigen Sie: Es existieren glatte Funktionen $b^i_{\alpha\beta}: U \to \mathbb{K}$ und $c_{\alpha\beta}: U \to \mathbb{K}$, so dass für alle Schnitte $\rho, \psi \in \Gamma(E)$ mit kompaktem Träger in U, geschrieben als $\rho = \sum_{\alpha=1}^r \rho^\alpha s_\alpha$ und $\psi = \sum_{\beta=1}^r \psi^\beta s_\beta$ gilt

$$\int_U \langle \nabla\rho, \nabla\psi \rangle \mathrm{dvol} = \int_M \sum_{\beta=1}^r \left(\Delta\rho^\beta + \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^r b^i_{\alpha\beta} \partial_i \rho^\alpha + \sum_{\alpha=1}^r c_{\alpha\beta} \rho^\alpha \right) \psi^\beta \,\mathrm{dvol}.$$

Pro Aufgabe 5 Punkte.