

Übungsblatt 3

1. Aufgabe

Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $x \in M$ und e_1, \dots, e_m eine Orthonormalbasis von $T_x M$. Seien K , ric und scal die Schnittkrümmung, der Ricci-Tensor und die Skalar-krümmung. Zeigen Sie

$$\text{ric}(e_i, e_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m K(\text{span}\{e_i, e_j\}), \quad \text{scal}(x) = \sum_{i=1}^m \text{ric}(e_i, e_i) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^m K(\text{span}\{e_i, e_j\}).$$

2. Aufgabe

Beweisen Sie, dass die stereographische Projektion

$$S^m \setminus \{(0, \dots, 0, 1)^T\} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \begin{pmatrix} (\sin \vartheta)y \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \mapsto (\cot(\vartheta/2))y, \quad \vartheta \in (0, \pi], \quad y \in S^{m-1}$$

ein konformer Diffeomorphismus ist.

3. Aufgabe

Es sei M eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und sei R der Riemannsche Krümmungstensor. Relativ zur Basis $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1}^n$ haben wir

$$\sum_{l=1}^n R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x^l} = R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Zeigen Sie, dass der Riemannsche Krümmungstensor folgende Form in der lokalen Karte $x: U \rightarrow M$ hat:

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jk}^l - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{ik}^l + \sum_{s=1}^n \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l - \sum_{s=1}^n \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l.$$

4. Aufgabe

Berechnen Sie Riemann-, Ricci-, Skalar- und Weyl-Krümmung von S^n , $S^2 \times \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^5$, \mathcal{H}^n und von $S^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$.

Je Aufgabe 5 Punkte.