

Das Yamabe-Problem: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2018

Prof. Dr. Bernd Ammann/ Dr. Karsten Bohlen

Abgabe am Freitag, den 13.4. in der Vorlesung.

Das Übungsblatt wird in der Übung am 17.04. besprochen.



Übungsblatt 1

1. Aufgabe

Untersuchen Sie, ob folgende Mengen glatte Untermannigfaltigkeiten sind:

- $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\} \subset \mathbb{R}^2$.
- $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^n + y^n + z^n = 1\} \subset \mathbb{C}^3$ für $n \in \mathbb{N}$. (Wir identifizieren \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2).

2. Aufgabe

Sei M der Rand des Einheitsquadrats in \mathbb{R}^2 , also die Menge

$$M := \{(x, y) \mid x \in [0, 1], y \in \{0, 1\}\} \cup \{(x, y) \mid x \in \{0, 1\}, y \in [0, 1]\}.$$

- Zeigen Sie, dass M homöomorph zu $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ ist und deshalb einen maximalen Atlas / eine glatte Struktur besitzt.
- Zeigen Sie, dass M keine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 ist.

3. Aufgabe

Sei $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2$ eine glatte Funktion und für $c \in \mathbb{R}$ sei

$$M_c := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = c\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

- Bestimmen Sie für welche c die Teilmenge $M_c \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine glatte Untermannigfaltigkeit ist. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Dimension von M_c .
- Zeigen Sie, dass die glatten Vektorfelder auf dem \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} X(x_1, x_2, x_3) &:= x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}, \\ Y(x_1, x_2, x_3) &:= x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}, \end{aligned}$$

sowie der Kommutator $[X, Y] = XY - YX$ sich zu glatten Vektorfeldern auf M_1 einschränken.

Je Aufgabe 5 Punkte.