

Übungsblatt 1

Übungsblatt 1 ist ein freiwilliges Übungsblatt, d.h. die Aufgaben werden nicht bewertet. Ihre Abgabe wird aber dennoch korrigiert und die Aufgaben werden in der Übung nächste Woche besprochen. Auch wenn es keine Punkte gibt, empfehlen wir, die Aufgaben sorgfältig zu bearbeiten.

1. Aufgabe

Wir betrachten die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\text{grad}V(\mathbf{x}(t))$$

wobei $m \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $V(x) = f(\|x\|)$ für eine glatte Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir definieren den Drehimpuls als $\mathbf{L}(t) := m\mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t)$. Zeigen Sie, dass der Drehimpuls erhalten bleibt, d.h. es gilt $\frac{d}{dt}\mathbf{L}(t) = 0$ für alle $t \in (a, b)$ für jede Lösung $\mathbf{x}(t)$ der Newtonschen Bewegungsgleichung.

2. Aufgabe

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum. Weiter sei $\omega: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine antisymmetrische und nicht ausgeartete Bilinearform.¹ Zeigen Sie: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Basis der Form $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ von V , so dass

$$\omega(u_j, u_k) = \omega(v_j, v_k) = 0, \quad \omega(u_j, v_k) = \delta_{jk}$$

für alle $j, k \in \{1, \dots, n\}$.

Hinweis: Konstruieren Sie zuerst geeignete u_1 und v_1 , und betrachten Sie dann

$$V_1 := \{x \in V \mid \omega(x, u_1) = \omega(x, v_1) = 0\}.$$

Bemerkung: Insbesondere folgt aus dieser Aufgabe, dass die Dimension von V gerade ist, $\dim V = 2n$.

3. Aufgabe

Auf $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die Differentialformen $\alpha \in \Omega^1\mathbb{R}^4$ und $\beta \in \Omega^2\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} \alpha &= dx^1 + x_2 dx^2, \\ \beta &= \sin x_2 dx^1 \wedge dx^3 + \cos x_3 dx^2 \wedge dx^4. \end{aligned}$$

(Die dx^i werden wie üblich bezüglich der Karte $x = \text{id}_{\mathbb{R}^4}$ gebildet.) Berechnen Sie $\alpha \wedge \beta$ und $d\beta$.

¹Erinnerung: Eine Bilinearform heißt *antisymmetrisch*, falls $\omega(x, y) = -\omega(y, x)$ für alle $x, y \in V$. Eine Bilinearform heißt *nicht ausgeartet*, falls aus $\omega(x, y) = 0$ für alle $x \in V$ folgt, dass $y = 0$.

4. Aufgabe

Sei $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ die Menge aller 2×2 -Matrizen mit Determinante 1. Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ eine Unter-Mannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{2 \times 2} \cong \mathbb{R}^4$ ist. Beweisen Sie, dass $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ diffeomorph zu $S^1 \times \mathbb{R}^2$ ist.

Symplectic Geometry and Classical Mechanics: Exercises

University of Regensburg, winter term 2017/18

Prof. Dr. Bernd Ammann/ Johannes Wittmann

Please hand in your solutions on Oct 27 before the lecture



Exercise Sheet 2

Exercise 1 (4 points)

Let $Q \subset \mathbb{R}^n$ be a k -dimensional submanifold of $\mathbb{R}^n$ with the induced metric. Show that a smooth curve $\mathbf{x}: (a, b) \rightarrow Q$ is a geodesic iff¹

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) \in (T_{\mathbf{x}(t)}Q)^\perp$$

for all $t \in (a, b)$.

Hint: For the definition of a geodesic see Prof. Garcke's script, Analysis IV, 8.6 Geodätische. You may use in your proof

$$\frac{\nabla}{dt}V(t) = \text{pr}_{T_{c(t)}M}\dot{V}(t)$$

for every smooth vector field V along the smooth path c .

Exercise 2 (4 points)

Let $m > 0$. We consider a Newtonian system

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}_0(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) + \mathbf{F}_{\text{constr}}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t)$$

constrained to a hypersurface $Q^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Show that the constraint force² is given by

$$\mathbf{F}_{\text{constr}}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) = mII(\dot{\mathbf{x}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{F}_0^\perp(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t)$$

where II is the second fundamental form of $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$ and $\mathbf{F}_0^\perp(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t)$ is the component of $\mathbf{F}_0(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t)$ perpendicular to Q . For a definition of II see Prof. Ammann's script, Analysis IV, 1.5 Hyperflächen.

Exercise 3 (4 points)

Let $Q \subset \mathbb{R}^n$ be a k -dimensional submanifold of $\mathbb{R}^n$ and let

$$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

a linear isometry³ with $A(Q) = Q$. Let $\mathbf{x}: (a, b) \rightarrow Q$, $a < 0 < b$, satisfy the Newton's law

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\text{grad}V(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{F}_{\text{constr}}$$

with holonomic constraint Q , $m > 0$. We assume that the potential $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is a smooth function with $V \circ A = V$, and that

$$A\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0), \quad A\dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}(0).$$

Prove that $A\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t)$ for all $t \in (a, b)$.

Hint: Show that $\tilde{\mathbf{x}}(t) := A\mathbf{x}(t)$ is also a solution of the Newton equation with holonomic constraint Q .

¹“iff” means “if and only if” (“genau dann, wenn”).

²We always assume $\mathbf{F}_{\text{constr}}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) \in (T_{\mathbf{x}(t)}Q)^\perp$.

³I.e., $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a linear isomorphism with $\|Ax\| = \|x\|$ for all $x \in \mathbb{R}^n$.

Symplectic Geometry and Classical Mechanics: Exercises

University of Regensburg, winter term 2017/18

Prof. Dr. Bernd Ammann/ Johannes Wittmann

Please hand in your solutions on Nov 3 before the lecture



Exercise Sheet 3

Exercise 1. (4 points)

For $n \in \mathbb{N}$ we consider the orthogonal group

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid AA^T = I_n\}$$

where $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is the identity matrix. Show that $O(n)$ is a submanifold of $\mathbb{R}^{n^2} = \mathbb{R}^{n \times n}$.

Hint: Show that I_n is a regular point of the map $\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$, $A \mapsto A^T A - I_n$.

Exercise 2: Planar pendulum. (4 points)

We consider the movement of a planar pendulum in a homogeneous gravitational field. This is a special case of the spherical pendulum of the lecture with vanishing angular momentum, i.e. $p_\theta = 0$. Then

$$\ddot{\phi} - \frac{g}{l} \sin \phi = 0.$$

Draw the orbits $t \mapsto (\phi(t), \dot{\phi}(t)) \in Z := (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R} \ni (\phi, \dot{\phi})$ and compare them to the curves of constant energy $E = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{g}{l} \cos \phi$. Determine the equilibria (= fixed-points of the flow), discuss whether they are stable/unstable. Are there homoclinic/heteroclinic/periodic orbits? Which of the periodic orbits are contractible?

Comment: To solve the exercise you might need some definitions given here.

Exercise 3. (4 points)

Let Q be a smooth n -dimensional manifold. We define the *cotangent bundle*

$$T^*Q := \coprod_{x \in Q} T_x^*Q$$

as the disjoint union of the dual spaces $T_x^*Q := (T_x Q)^*$. For any chart $Q \ni U \xrightarrow{q} V \subseteq \mathbb{R}^k$ of Q (where $U \subseteq Q$ means that U is an open subset of Q), we define a map

$$\Phi^q: q(U) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \coprod_{x \in U} T_x^*Q$$

by

$$\Phi^q(x, (p_1, \dots, p_n)^T) := \sum_{i=1}^n p_i dq^i|_{q^{-1}(x)}.$$

a) Show that Φ^q is a bijection.

b) Let $(\tilde{U}, \tilde{q})$ be another chart of Q s.t. $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$. Show that

$$(\Phi^q)^{-1} \circ \Phi^{\tilde{q}}: \tilde{q}(U \cap \tilde{U}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow q(U \cap \tilde{U}) \times \mathbb{R}^n$$

is a smooth map.

Hint: It may be helpful to look at 1.19 of Prof. Garcke's Analysis IV script.

*Remark: Combining a) and b) with Lemma 1.35 in John M. Lee's book "Introduction to Smooth Manifolds" (second edition), it follows easily that T^*Q is a smooth manifold of dimension $2n$ and each of the Φ^x is a chart of T^*Q .*

Exercise 4. (4 points)

Let Q be a smooth manifold. Let $\pi: T^*Q \rightarrow Q$, be the base point map, i.e. $\alpha \in T_{\pi(\alpha)}^*Q$ for every $\alpha \in T^*Q$. Let $Q \ni U \xrightarrow{q} V \subseteq \mathbb{R}^k$ be a chart of Q , and $q = (q^1, \dots, q^k)^T$. We define

$$p_i: T^*U \rightarrow \mathbb{R}, \quad p_i(\alpha) := \alpha\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right).$$

- a) Show that p_i is smooth and $\alpha = \sum_{i=1}^k p_i(\alpha) dq^i|_{\pi(\alpha)}$ for any $\alpha \in T^*U$.
- b) Show that $\lambda_{\text{can}} := \sum_{i=1}^k p_i \pi^*(dq^i)$ is a well-defined 1-form on T^*U . This form is called the *canonical 1-form*.
- c) Derive a formula for $\omega_{\text{can}} := -d\lambda_{\text{can}}$ in terms of the functions p_i and q^i and the exterior differential.
- d) Show that ω_{can} is everywhere non-degenerate, i.e. for every $\alpha \in T^*U$ it defines a non-degenerate bilinear map $T_\alpha(T^*U) \times T_\alpha(T^*U) \rightarrow \mathbb{R}$.
- e) Show that $\lambda_{\text{can}}(\alpha) = \alpha \circ (d\pi|_\alpha)$. Conclude that there is a unique 1-form λ_{can} on T^*U that coincides with the definition given in b) for each chart $Q \ni U \xrightarrow{q} V \subseteq \mathbb{R}^k$. Why is λ_{can} smooth?

Übungen zur Symplektischen Geometrie und klassischen Mechanik

Universität Regensburg, Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Bernd Ammann / Johannes Wittmann

Abgabe am 10.11.2017 in der Übung



Übungsblatt 4

Sie dürfen dieses Blatt und alle zukünftigen Blätter in Gruppen von bis zu maximal zwei Personen abgeben.

1. Aufgabe (4 Punkte).

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und $f: V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Wir nennen f C^2 strikt konvex, wenn es die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{x \in V \mid f(x) < \infty\}$ ist eine konvexe Teilmenge von V ,
- $\text{Inn}(f^{-1}(\mathbb{R})) \neq \emptyset$,
- $f|_{f^{-1}(\mathbb{R})}$ ist stetig,
- $f|_{\text{Inn}(f^{-1}(\mathbb{R}))}$ ist C^2 ,
- $\text{Hess } f|_x$ ist positiv definit für alle $x \in \text{Inn}(f^{-1}(\mathbb{R}))$.

Zeigen Sie: Ist f C^2 strikt konvex, so ist f konvex.

2. Aufgabe (4+2 Punkte).

a) Sei $V = \mathbb{R}$, $f: V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } x < -2 \\ 2|x| - 1 & \text{falls } -2 \leq x \leq -1 \\ |x|, & \text{falls } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x^2, & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2}, & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$$

Berechnen Sie die Legendre-Transformierte von f .

b) Sei $V = \mathbb{R}$, $f: V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1 - |x|^2}, & \text{falls } |x| \leq 1 \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Legendre-Transformierte von f .

c) (2 Bonuspunkte) Für $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}$ definiert man die q -Norm, $1 < q < \infty$ als

$$\|x\|_q := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^q \right)^{1/q}.$$

Sei nun $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als $f(x) := \frac{1}{2}\|x\|_q^2$. Zeigen Sie $\mathbb{L}f(p) := \frac{1}{2}\|p\|_r^2$, wobei r Hölder konjugiert¹ zu q ist.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis nutzen, dass

$$\|p\|_r = \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\langle p, x \rangle}{\|x\|_q}.$$

Dies ist eine Konsequenz der Hölder-Ungleichung und der assoziierten Gleichheitsdiskussion, siehe z.B. https://en.wikipedia.org/wiki/Hölder's_inequality.

3. Aufgabe (4 Punkte).

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und $f: V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex. Sei $x \in \text{Inn}(f^{-1}(\mathbb{R}))$.

a) Zeigen Sie, dass es mindestens ein $p_0 \in V^*$ gibt, so dass

$$f(y) \geq \langle p_0, y - x \rangle + f(x) \text{ für alle } y \in V. \quad (1)$$

b) Falls f stetig differenzierbar in einer Umgebung von x ist, dann ist $p_0 := df|_x$ der einzige Vektor in V^* , der (1) erfüllt.

4. Aufgabe (4 Punkte).

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und $f: V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Zeigen Sie: Ist f konvex, so ist $f|_{\text{Inn}(f^{-1}(\mathbb{R}))}$ stetig.

¹„ r Hölder konjugiert zu q “ bedeutet: es gilt $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$.

Übungen zur Symplektischen Geometrie und klassischen Mechanik

Universität Regensburg, Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Bernd Ammann / Johannes Wittmann

Abgabe am 17.11.2017 in der Vorlesung



Übungsblatt 5

1. Aufgabe (4 Punkte).

Sei (V, ω) ein $2n$ -dimensionaler symplektischer Vektorraum.¹ Sei $E \subset V$ ein Untervektorraum. Wir definieren *das symplektische orthogonale Komplement (von E in V)* als

$$E^{\perp\omega} := \{v \in V \mid \omega(v, w) = 0 \text{ für alle } w \in E\}.$$

Zeigen Sie:

- a) $E^{\perp\omega}$ ist ein Untervektorraum von V .
- b) Es gilt die Dimensionsformel: $\dim E + \dim E^{\perp\omega} = 2n$.
- c) Es gilt $(E^{\perp\omega})^{\perp\omega} = E$.

2. Aufgabe (4 Punkte).

Sei wieder (V, ω) ein $2n$ -dimensionaler symplektischer Vektorraum. Ein Untervektorraum $E \subset V$ heißt *isotrop (Lagrange, symplektisch)*, falls $E \subset E^{\perp\omega}$ ($E = E^{\perp\omega}$, $E \cap E^{\perp\omega} = \{0\}$). Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Untervektorraum $E \subset V$ gilt:

- a) E ist isotrop genau dann, wenn $\omega|_{E \times E} \equiv 0$. Insbesondere ist E genau dann Lagrange, wenn $\dim E = n$ und $\omega|_{E \times E} \equiv 0$.
- b) E ist symplektisch genau dann, wenn $E^{\perp\omega}$ symplektisch ist.
- c) E ist symplektisch genau dann, wenn $E + E^{\perp\omega} = V$.
- d) E ist symplektisch genau dann, wenn die Bilinearform $\omega|_{E \times E}$ nicht-entartet ist.

3. Aufgabe (4 Punkte).

Gegeben sei die Lagrange-Funktion eines elektrisch geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld

$$L(x, v, t) := \frac{1}{2}m\|v\|^2 + e\langle A(x, t), v \rangle - e\phi(x, t).$$

Hierbei sind $m, e \in \mathbb{R}_{>0}$, $x, v \in \mathbb{R}^3$, $t \in (a, b)$, sowie $A: \mathbb{R}^3 \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\phi: \mathbb{R}^3 \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Berechnen Sie

- a) die zu L gehörende Euler-Lagrange-Gleichung,
- b) die zu L gehörende Hamilton-Funktion.

¹Das heißt: V ist ein $2n$ -dimensionaler reeller Vektorraum und $\omega: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine antisymmetrische nicht-entartete Bilinearform.

Übungsblatt 6

1. Aufgabe (4 Punkte).

Seien (M_1, ω_1) und (M_2, ω_2) symplektische Mannigfaltigkeiten. Seien $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$, $i = 1, 2$ die Projektionen auf den ersten bzw. zweiten Faktor. Weiter sei $f : M_1 \rightarrow M_2$ eine glatte Abbildung.

- a) Zeigen Sie, dass $\omega_W := \pi_1^* \omega_1 - \pi_2^* \omega_2$ eine symplektische Form auf $W := M_1 \times M_2$ ist.
- b) Wir betrachten den Graph von f ,

$$\text{Graph}(f) := \{(x, y) \in W \mid y = f(x)\} \subset W.$$

Zeigen Sie, dass der Tangentialraum von $\text{Graph}(f)$ in $(x, y) \in \text{Graph}(f)$ gegeben ist durch

$$T_{(x,y)} \text{Graph}(f) = \{(v, df|_x v) \mid v \in T_x M_1\} \subset T_x M_1 \times T_y M_2 = T_{(x,y)} W.$$

Hinweis: Hierbei dürfen Sie ohne Beweis verwenden: Ist $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten, so ist der Graph von f eine glatte Untermannigfaltigkeit von $M \times N$ und die Abbildung $\text{id} \times f : M \rightarrow M \times N$, $x \mapsto (x, f(x))$, ist ein Diffeomorphismus auf den Graphen von f .

- c) Folgern Sie, dass die Abbildung $f : M_1 \rightarrow M_2$ symplektisch ist, genau dann, wenn der Graph von f eine isotrope Untermannigfaltigkeit von W ist.¹

2. Aufgabe: Die symplektische Gruppe (4 Punkte).

Die symplektische Standardform ist die nicht-entartete alternierende bilineare Abbildung

$$\omega_{\text{st}} : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega_{\text{st}}(X, Y) := g_{\text{st}}(JX, Y), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix},$$

wobei g_{st} das euklidische (Standard-)Skalarprodukt bezeichne. Wir definieren

$$\text{Symp}(2n) := \{\psi \in \text{GL}(2n, \mathbb{R}) \mid \forall X, Y \in \mathbb{R}^{2n} : \omega_{\text{st}}(\psi X, \psi Y) = \omega_{\text{st}}(X, Y)\}.$$

Wir definieren $f(\psi) := \psi^T J \psi - J$ und $\mathfrak{so}(2n) := \{A \in \text{GL}(2n, \mathbb{R}) \mid A = -A^T\}$. Zeigen Sie

- a) $\text{Symp}(2n)$ ist eine Untergruppe von $\text{GL}(2n, \mathbb{R})$,
- b) $\psi \in \text{Symp}(2n)$ genau dann, wenn $f(\psi) = 0$,
- c) $f(\text{GL}(2n, \mathbb{R})) \subset \mathfrak{so}(2n)$ und $f : \text{GL}(2n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{so}(2n)$ ist eine Submersion (d.h. $df|_{\psi} : \mathbb{R}^{(2n) \times (2n)} \rightarrow \mathfrak{so}(2n)$ ist surjektiv für alle $\psi \in \text{GL}(2n, \mathbb{R})$),
- d) $\text{Symp}(2n)$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $\text{GL}(2n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{(2n) \times (2n)}$. Bestimmen Sie die Dimension.

¹Ist (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit, so heißt N *isotrop*, falls für jedes $x \in N$ der Untervektorraum $T_x N \subset T_x M$ ein isotroper Untervektorraum von $(T_x M, \omega_x)$ ist.

3. Aufgabe (4 Punkte).

Sei (V, ω) ein $2n$ -dimensionaler symplektischer Vektorraum. Sei $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V wie in der zweiten Aufgabe des ersten Übungsblatts. Zeigen Sie

a) $\omega = \sum_{i=1}^n u_i^* \wedge v_i^*,$

b) $\omega^n := \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{n\text{-mal}} = n! u_1^* \wedge v_1^* \wedge \dots \wedge u_n^* \wedge v_n^*.$

Folgern Sie daraus

c) $\omega^n \neq 0.$

d) Ist $\psi \in \text{Symp}(2n)$, so gilt $\det(\psi) = 1.$

Übungen zur Symplektischen Geometrie und klassischen Mechanik

Universität Regensburg, Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Bernd Ammann / Johannes Wittmann

Abgabe am 01.12.2017 in der Vorlesung



Übungsblatt 7

1. Aufgabe (4 Punkte).

Wir betrachten die 2-Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und definieren

$$\omega_x(v, w) := \langle x, v \times w \rangle$$

für $v, w \in T_x S^2$, $x \in S^2$.

- a) Zeigen Sie, dass (S^2, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit ist.
- b) Stellen Sie ω in der orientierten Karte

$$F: (0, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow S^2, \quad (\theta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix},$$

dar und folgern Sie, dass ω die Volumenform von S^2 ist.

2. Aufgabe (4 Punkte).

Sei (M, ω) eine $2n$ -dimensionale symplektische Mannigfaltigkeit, $M \neq \emptyset$.

- a) Zeigen Sie, dass M orientierbar ist.

Da ω geschlossen ist, definiert ω eine Kohomologieklassse $a := [\omega] \in H_{dR}^2(M)$ in der de Rham-Kohomologie.

- b) Nun sei M geschlossen (d.h. kompakt und randlos). Zeigen Sie, dass $a^n := a \cup \dots \cup a := \underbrace{[\omega \wedge \dots \wedge \omega]}_{n\text{-mal}} \in H_{dR}^{2n}(M) \setminus \{0\}$.

Hinweis: Ein Integralsatz könnte hilfreich sein.

- c) Folgern Sie $a \in H_{dR}^2(M) \setminus \{0\}$.

Hinweis: Das für diese Aufgabe nötige Wissen über Differentialformen können Sie sich, falls notwendig, noch einmal mit Hilfe des Analysis IV Skripts von Prof. Garcke vergegenwärtigen.

Bemerkung: Es gilt, dass $H_{dR}^2(S^{2k}) = 0$ für $k > 1$. Damit folgt aus c), dass S^{2k} für $k > 1$ keine symplektische Mannigfaltigkeit sein kann.

3. Aufgabe: Minimalflächeneigenschaft holomorpher Kurven (4 Punkte).

Wir betrachten $\mathbb{R}^{2n}$ mit der symplektischen Standardform $\omega := \omega_{std}$. Weiter sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, beschränkt und mit glattem Rand. Zeigen Sie:

- a) Für alle $X, Y \in \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, gilt

$$\omega(X, Y)^2 \leq \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn X und Y $\mathbb{C}$ -linear abhängig sind. Hierbei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^{2n}$.

Hinweis: Für den Beweis kann es hilfreich sein, wenn Sie mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ auf $\mathbb{C}^n$ arbeiten, wobei $\langle X, Y \rangle_{\mathbb{C}} := X^T \bar{Y}$ und $\bar{Y}$ komponentenweise zu verstehen ist. Es gilt dann etwa $\operatorname{Re} \langle X, Y \rangle_{\mathbb{C}} = \langle X, Y \rangle$.

- b) Ist $F: \bar{G} \rightarrow \mathbb{C}^n$ eine glatte Abbildung¹, dann gilt die folgende Wirtinger-Ungleichung

$$\int_G F^* \omega \leq \operatorname{area}(F(G)) := \int_G \sqrt{\left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial x} \right\rangle \left\langle \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right\rangle^2} d(x, y).$$

Gleichheit gilt, falls F holomorph auf G ist.

- c) Sei $F_0: \bar{G} \rightarrow \mathbb{C}^n$ glatt und $F_0|_G \rightarrow \mathbb{C}^n$ holomorph. Dann gilt

$$\operatorname{area}(F_1(G)) \geq \operatorname{area}(F_0(G))$$

für alle glatten $F_1: \bar{G} \rightarrow \mathbb{C}^n$ die homotop zu F_0 mit festem Rand sind, d.h. es existiert eine glatte Abbildung $H: \bar{G} \times [0, 1] \rightarrow M$ mit $H(0, \cdot) = F_0$, $H(1, \cdot) = F_1$ und $H(t, \cdot)|_{\partial G} = F_0|_{\partial G}$ für alle $t \in [0, 1]$.

Hinweis: Sie dürfen hierbei ohne Beweis verwenden, dass unter diesen Voraussetzungen $\int_G F_0^ \omega = \int_G F_1^* \omega$ gilt. (Dies ist eine Folgerung aus dem Satz von Stokes für Gebiete mit nicht glattem Rand angewendet auf $\bar{G} \times [0, 1]$ und $H^* \omega$.)*

¹ $\bar{G}$ ist der Abschluss von G , nicht das komplex-konjugierte zu G

Übungen zur Symplektischen Geometrie und klassischen Mechanik

Universität Regensburg, Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Bernd Ammann / Johannes Wittmann

Abgabe am 08.12.2017 in der Vorlesung



Übungsblatt 8

1. Aufgabe (4 Punkte).

Sei (V, ω) ein $2n$ -dimensionaler symplektischer Vektorraum. Sei $L \subset V$ ein Lagrangescher Untervektorraum.

- a) Sei $(u_1, \dots, u_n)$ eine Basis von L . Zeigen Sie: Es existieren Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$, so dass $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ eine symplektische Basis von (V, ω) ist (d.h. eine Basis wie in der zweiten Aufgabe des ersten Übungsblattes).

Hinweis: Beginnen Sie damit, $v_1 \in (\text{span}(u_2, \dots, u_n))^{\perp_\omega}$ passend zu wählen.

- b) Zeigen Sie als Anwendung von a): jeder Lagrangesche Untervektorraum L von V besitzt ein Lagrangesches Komplement, d.h. einen Lagrangeschen Unterraum C mit $V = L \oplus C$.

- c) (Bonusaufgabe): Ist J eine mit ω kompatible komplexe Struktur auf V , so ist $J(L)$ ein Lagrangesches Komplement von L .

2. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ die offene Einheitskreisscheibe. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$F: B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}P^1, \quad z \mapsto [z : \sqrt{1 - \|z\|^2}]$$

symplektisch ist. Dabei versehen wir $B_1(0)$ mit der symplektischen Form ω , welche durch Einschränkung der symplektischen Standardform von $\mathbb{R}^2$ entsteht und auf $\mathbb{C}P^1$ haben wir die Fubini-Study-Form ω_{FS} .

Hinweis: Es könnte hilfreich sein, F zu einem kommutativen Dreieck über $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ zu ergänzen und mit $\hat{\omega}_{\text{FS}}$ zu rechnen.

3. Aufgabe (4 Punkte).

Wir betrachten zunächst die Funktion

$$F: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad z \mapsto \|z\|^2.$$

- a) Zeigen Sie $dF|_z = \sum_{j=1}^m (\bar{z}^j dz^j + z^j d\bar{z}^j)$.

Hinweis: Es kann hilfreich sein, wenn Sie die Formel für das Differential in Koordinaten nutzen: $dF = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial x^j} dx^j + \frac{\partial F}{\partial y^j} dy^j \right)$, wobei wir die Karte

$$\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}^{2m}, \quad z \mapsto (x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^m),$$

$x^j := \text{Re}(z^j)$, $y^j := \text{Im}(z^j)$, verwenden.

Nun sei $\alpha \in \Omega_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})$ gegeben durch

$$\alpha := \frac{i}{2\|z\|^2} \sum_{j=0}^n z^j d\bar{z}^j.$$

- b) Zeigen Sie $\hat{\omega}_{\text{FS}} = d\alpha$.

Hinweis: Aufgabenteil a) kann hilfreich sein.

Hinweis: Das äußere Differential von komplexwertigen Formen, oder allgemeiner von vektorraumwertigen Formen, ist analog zum gewöhnlichen äußeren Differential definiert. Bei Bedarf können Sie dies etwa unter https://en.wikipedia.org/wiki/Vector-valued_differential_form nachlesen.

- c) Folgern Sie, dass ω_{FS} geschlossen ist.

Übungen zur Symplektischen Geometrie und klassischen Mechanik

Universität Regensburg, Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Bernd Ammann / Johannes Wittmann

Abgabe am 15.12.2017 bis 12:00 Uhr bei Frau Bonn in M217.



Übungsblatt 9

1. Aufgabe (4 Punkte).

Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Weiter sei $X := \text{sgrad} f$ der symplektische Gradient von f . Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{L}_X \omega = 0.$$

2. Aufgabe (4 Punkte).

Sei (V, ω) ein $2n$ -dimensionaler symplektischer Vektorraum. Sei $L \subset V$ ein Lagrangescher Untervektorraum und C ein Lagrangesches Komplement von L in V . Für ein beliebiges $\alpha \in L^*$ definieren wir $\tilde{\alpha} \in V^*$ durch $\tilde{\alpha}(\ell \oplus c) := \alpha(\ell)$ für alle $\ell \in L, c \in C$. Zeigen Sie:

a) Für jedes $\alpha \in L^*$ gilt, dass $\Omega^{-1}\tilde{\alpha} \in C$.

b) Die Abbildung

$$\begin{aligned} F: L \times L^* &\rightarrow V, \\ (\ell, \alpha) &\mapsto \ell - \Omega^{-1}\tilde{\alpha}, \end{aligned}$$

ist ein symplektischer Isomorphismus. Dabei ist $\Omega: V \rightarrow V^*$ der Isomorphismus $\Omega(v) := \omega(v, \cdot)$. Weiter haben wir auf $L \times L^*$ die symplektische Standardform (siehe Vorlesung, erstes Beispiel in Kapitel II.1.).

3. Aufgabe (4 Punkte).

a) Zeigen Sie, dass die Wirkung von $U(n+1)$ auf $\mathbb{C}P^n$, gegeben durch,

$$A \cdot [z] := [Az]$$

für alle $A \in U(n+1)$ und $[z] \in \mathbb{C}P^n$ wohldefiniert ist, d.h. unabhängig von der Wahl des Vertreters von $[z]$ ist.

Nun betrachten wir die Abbildung

$$f: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad z \mapsto \log \|z\|^2.$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{2} \frac{i}{2} (df|_z(X) + idf|_z(iX)) = \alpha|_z(X) \quad (1)$$

für alle $z \in \mathbb{C}^{n+1}$, $X \in \mathbb{C}^{n+1}$. Dabei ist $\alpha \in \Omega_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})$ wie in der dritten Aufgabe von Blatt 8 definiert.

Bemerkung: Gleichung (1) besagt, dass α der komplex antilineare Anteil von $\frac{i}{2} d \log \|z\|^2$ ist.

- c) Folgern Sie, dass α invariant unter $U(n+1)$ ist.¹
- d) Folgern Sie, dass $d\alpha$ invariant unter $U(n+1)$ ist.
- e) Folgern Sie, dass ω_{FS} invariant unter $U(n+1)$ ist.

¹Es wirke die Liegruppe G glatt (von links) auf der Mannigfaltigkeit M . Für jedes $g \in G$ definieren wir $f_g: M \rightarrow M$ durch $f_g(x) := g \cdot x$ für alle $x \in M$. Wir sagen $\eta \in \Omega^k(M)$ ist *invariant unter G* , falls $(f_g)^*\eta = \eta$ für alle $g \in G$.

Übungen zur Symplektischen Geometrie und klassischen Mechanik

Universität Regensburg, Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Bernd Ammann / Johannes Wittmann

Abgabe am 22.12.2017 in der Vorlesung



Übungsblatt 10

1. Aufgabe (4 Punkte).

Wie in der Vorlesung betrachten wir die symplektische Fläche (S^2, ω) mit der symplektischen Form $\omega_x(v, w) = \langle x, v \times w \rangle$, wobei $x \in S^2$, $v, w \in T_x S^2$. Für $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir die Hamilton-Funktion

$$H: S^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x = (x^1, x^2, x^3) \mapsto a(x^3)^3 + bx^3.$$

a) Zeigen Sie, dass der Fluss des Hamiltonschen Systems gegeben ist durch

$$\Phi_t^H(x) = \Phi_t(x) = \begin{pmatrix} \cos((3a(x^3)^2 + b)t)x^1 - \sin((3a(x^3)^2 + b)t)x^2 \\ \sin((3a(x^3)^2 + b)t)x^1 + \cos((3a(x^3)^2 + b)t)x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die Periodenmenge $\text{Per}(S^2, \omega, H)$ in den Fällen

- $a = -1$ und $b = 3$,
- $a = -1$ und $b = 6$,
- $a = 1$ und $b = 0$,
- $a = 1$ und $b = 3$.

2. Aufgabe (4 Punkte).

Sei Q eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Wir betrachten die symplektische Mannigfaltigkeit $(T^*Q, \omega_{\text{can}})$, wobei $\omega_{\text{can}} = -d\lambda_{\text{can}} = \sum_{i=1}^n d(q^i \circ \pi) \wedge dp_i$.¹ Für jedes $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ haben wir einen Diffemorphismus

$$m_\mu: T^*Q \rightarrow T^*Q, \\ (x, \alpha) \mapsto (x, \mu\alpha),$$

wobei $x \in Q$, $\alpha \in T_x^*Q$. Zeigen Sie:

a) $m_\mu^* \pi^* dq^i = \pi^* dq^i$.

*Hinweis: Wie verhält sich m_μ mit der Projektion $\pi: T^*Q \rightarrow Q$?*

¹Erinnerung: Dabei entstehen die q^i und p_i wie folgt: Sei $Q \ni U \xrightarrow{q} V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte von Q . Dann ist

$$T^*Q \ni T^*U \xrightarrow{(q \circ \pi, p)} V \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n} \\ \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dq^i \mapsto ((q \circ \pi)(\alpha), \underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_n}_{:=p(\alpha)})$$

eine Karte von T^*Q .

b) $m_\mu^* p_i = \mu p_i$.

c) $m_\mu^* \omega_{\text{can}} = \mu \omega_{\text{can}}$.

d) $\text{vol}_{\frac{1}{n!} \omega_{\text{can}}^n}(T^*Q) = \infty$.

Hinweis: Sie dürfen die Diffeomorphismeninvarianz des Integrals von Formen verwenden.

3. Aufgabe (4 Punkte).

Wir definieren den reell projektiven Raum $\mathbb{RP}^n$ als die Menge der reellen Geraden in $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$\mathbb{RP}^n := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Der reell projektive Raum ist eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit und die Abbildung

$$\begin{aligned} i: \mathbb{RP}^n &\rightarrow \mathbb{CP}^n, \\ [x] &\mapsto [x], \end{aligned}$$

ist eine Einbettung.² Weiter ist die Projektionsabbildung $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^n$, $\pi(x) := [x]$, eine surjektive Submersion.

Zeigen Sie:

a) $\hat{\omega}_{\text{FS}}|_x(V, W) = 0$ für alle $V, W \in \mathbb{R}^{n+1}$ und alle $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Hinweis: Es kann hilfreich sein, dass $\hat{\omega}_{\text{FS}} = -\text{Im}(\hat{g}_{\text{FS}})$ gilt.

b) $\mathbb{RP}^n \subset \mathbb{CP}^n$ ist eine Lagrangesche Untermannigfaltigkeit.

c) Es gibt eine Tubenumgebung U von $\mathbb{RP}^n$ in $\mathbb{CP}^n$, eine Tubenumgebung V des Nullschnitts von $T^*\mathbb{RP}^n$ und einen Symplektomorphismus $\varphi: (U, \omega_{\text{FS}}) \rightarrow (V, \omega_{\text{can}})$ mit $\varphi|_{\mathbb{RP}^n} = \text{id}_{\mathbb{RP}^n}$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\mathbb{RP}^n \subset \mathbb{CP}^n$ eine geschlossene Untermannigfaltigkeit ist.

d) Es existiert kein Symplektomorphismus $\psi: (\mathbb{CP}^n, \omega_{\text{FS}}) \rightarrow (T^*\mathbb{RP}^n, \omega_{\text{can}})$.

Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis und verwenden Sie die 2. Aufgabe.

²Insbesondere bedeutet das, dass $\mathbb{RP}^n \subset \mathbb{CP}^n$ eine Untermannigfaltigkeit ist.

Übungen zur Symplektischen Geometrie und klassischen Mechanik

Universität Regensburg, Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Bernd Ammann / Johannes Wittmann

Abgabe am 12.01.2018 in der Vorlesung



Übungsblatt 11

1. Aufgabe (4 Punkte).

Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie die Jacobi-Identität für die Poisson-Klammer durch Rechnung in Darboux-Koordinaten. Es ist also zu zeigen, dass für alle $F, G, H \in C^\infty(M)$

$$\{\{F, G\}, H\} + \{\{H, F\}, G\} + \{\{G, H\}, F\} = 0$$

gilt.

2. Aufgabe (4 Punkte).

Wir betrachten die *Poisson-Klammer des starren Körpers*, gegeben durch

$$\{F, G\}(x) := \langle x, \nabla F|_x \times \nabla G|_x \rangle$$

für alle $F, G \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $x \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:

- a) Die Poisson-Klammer des starren Körpers definiert eine Poisson-Struktur auf $\mathbb{R}^3$.
Hinweis: Die Jacobi-Identität für das Kreuzprodukt kann hilfreich sein.
- b) Jedes $A \in \text{SO}(3)$ ist eine Poisson-Abbildung bezüglich dieser Poisson-Struktur.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $A(x \times y) = Ax \times Ay$ für alle $A \in \text{SO}(3)$, $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt.

Übungen zur Symplektischen Geometrie und klassischen Mechanik

Universität Regensburg, Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Bernd Ammann / Johannes Wittmann

Abgabe am 19.01.2018 bis 12:00 Uhr bei Frau Bonn in M217.



Übungsblatt 12

1. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $A = (A_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ eine schiefsymmetrische $n \times n$ -Matrix. Zeigen Sie, dass

$$\{F, G\}|_x := \sum_{i,j=1}^n A_{ij} x_i x_j \left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_x \left. \frac{\partial G}{\partial x_j} \right|_x$$

für $F, G \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, eine Poisson-Struktur auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

2. Aufgabe (4 Punkte).

Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $L \subset M$ eine geschlossene Lagrangesche Untermannigfaltigkeit. Weiter sei $Y \in \Gamma(TL)$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie, dass eine glatte Funktion $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit

$$\begin{aligned} H(x) &= 0, \\ X_H(x) &= Y(x), \end{aligned}$$

für alle $x \in L$.

*Hinweis: Sie dürfen folgende Aussage ohne Beweis verwenden: Ist M eine Mannigfaltigkeit, $N \subset M$ eine geschlossene Untermannigfaltigkeit und $\alpha \in \Gamma(T^*M|_N)^1$ mit $\alpha(v) = 0$ für alle $v \in TN$, so existiert eine glatte Funktion $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $H|_N = 0$ und $dH|_p = \alpha|_p$ für alle $p \in N$.*

3. Aufgabe (4 Punkte).

Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Weiter sei B der assoziierte Poisson-Tensor, d.h. $B_x = \omega_x(\Omega_x^{-1}, \Omega_x^{-1})$. Sei $x \in M$ beliebig. Wir betrachten die Abbildung

$$F: T_x^*M \rightarrow T_xM, \quad \alpha \mapsto B(., \alpha),$$

wobei wir $T_xM = (T_xM)^{**}$ vermöge der Abbildung $v \mapsto (\beta \mapsto \beta(v))$ identifizieren. Zeigen Sie, dass $\Omega_x^{-1} = F$.

¹Dabei ist $T^*M|_N := \bigsqcup_{x \in N} T_x^*N$ ein Vektorbündel über N .

Übungsblatt 13

1. Aufgabe (8 Punkte).

- a) Seien M_1 und M_2 (nicht-leere) Mannigfaltigkeiten positiver Dimension, und seien $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$ die Projektionen. Zeigen Sie: zu Vektorfeldern $X_1 \in \Gamma(TM_1)$ und $X_2 \in \Gamma(TM_2)$ gibt es genau ein Vektorfeld $L(X_1, X_2) \in \Gamma(T(M_1 \times M_2))$, so dass $L(X_1, X_2)$ π_1 -verwandt zu X_1 und π_2 -verwandt zu X_2 ist. Ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Gamma(TM_1) \oplus \Gamma(TM_2) &\rightarrow \Gamma(T(M_1 \times M_2)), \\ (X_1, X_2) &\mapsto L(X_1, X_2), \end{aligned}$$

linear, injektiv, surjektiv?

- b) Zeigen Sie folgende Identität für die Lie-Klammer

$$[L(X_1, X_2), L(Y_1, Y_2)] = L([X_1, Y_1], [X_2, Y_2]),$$

wobei $X_1, Y_1 \in \Gamma(TM_1)$, $X_2, Y_2 \in \Gamma(TM_2)$.

- c) Wir betrachten die wohldefinierten, graderhaltenden linearen Abbildungen $L_i: \Omega_*(M_i) \rightarrow \Omega_*(M_1 \times M_2)$, die gegeben sind durch

$$L_i(f_i) = f_i \circ \pi_i,$$

$$L_1(X_1) = L(X_1, 0), \quad L_2(X_2) = L(0, X_2),$$

für $f_i \in C^\infty(M_i)$, $X_i \in \Gamma(TM_i)$, sowie

$$L_1(A) = \sum_{\alpha} L(X_{\alpha}^1, 0) \wedge \dots \wedge L(X_{\alpha}^a, 0), \quad L_2(B) = \sum_{\beta} L(0, Y_{\beta}^1) \wedge \dots \wedge L(0, Y_{\beta}^b),$$

für $A = \sum_{\alpha} X_{\alpha}^1 \wedge \dots \wedge X_{\alpha}^a \in \Omega_a(M_1)$, $B = \sum_{\beta} Y_{\beta}^1 \wedge \dots \wedge Y_{\beta}^b \in \Omega_b(M_2)$. Zeigen Sie die folgende Identität für die Schouten-Klammern

$$L_i([A_i, B_i]) = [L_i(A_i), L_i(B_i)] \quad (1)$$

für alle $A_i, B_i \in \Omega_2(M_i)$, $i = 1, 2$.

Bonusaufgabe: Zeigen Sie (1) für alle $A_i, B_i \in \Omega_*(M_i)$.

- d) Sei B_i , $i = 1, 2$ ein Poisson-Tensor auf M_i , d.h. $B_i \in \Omega_2(M_i)$ mit $[B_i, B_i] = 0$, und sei $\{.,.\}_i$ die assoziierte Poisson-Struktur. Konstruieren Sie eine Poisson-Struktur $\{.,.\}$ auf $M_1 \times M_2$ mit den folgenden Eigenschaften

$$\{F_i \circ \pi_i, G_i \circ \pi_i\} = \{F_i, G_i\}_i \circ \pi_i, \quad \{F_1 \circ \pi_1, G_2 \circ \pi_2\} = 0 \quad (2)$$

für alle $F_i, G_i \in C^\infty(M_i)$.

Hinweis: Für den Beweis der Jacobi-Identität kann es hilfreich sein mit der Schouten-Klammer zu arbeiten und zunächst $[L_1(B_1), L_2(B_2)] = 0$ zu zeigen.

Hinweis: Um (2) zu zeigen, dürfen sie ohne Beweis verwenden, dass

$$L_1(A)|_{(p_1, p_2)}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = A|_{p_1}(\alpha_1 \circ L(., 0), \dots, \alpha_k \circ L(., 0))$$

für $A \in \Omega_k(M_1 \times M_2)$, $\alpha_i \in T_{(p_1, p_2)}^*(M_1 \times M_2)$ und analog für L_2 .

Übungen zur Symplektischen Geometrie und klassischen Mechanik

Universität Regensburg, Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Bernd Ammann / Johannes Wittmann

Abgabe am 02.02.2018 in der Vorlesung



Übungsblatt 14

1. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $(M, \{.,.\})$ eine Poisson-Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie

$$X_{\{F,G\}} = -[X_F, X_G]$$

für alle $F, G \in C^\infty(M)$.

2. Aufgabe (4 Punkte).

Sei M eine Mannigfaltigkeit und $X, Y \in \Gamma(TM)$ zwei Vektorfelder auf M mit $[X, Y] = 0$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\{F, G\} := \partial_X F \partial_Y G - \partial_Y F \partial_X G,$$

$F, G \in C^\infty(M)$ eine Poisson-Struktur auf M definiert.

b) Sei $H \in C^\infty(M)$. Zeigen Sie, dass für die Poisson-Struktur aus a) die folgende Identität gilt:

$$X_H = X \partial_Y H - Y \partial_X H.$$

3. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $(\mathfrak{g}, [.,.])$ eine endlich dimensionale Lie-Algebra.¹ Auf dem Dualraum $\mathfrak{g}^*$ definieren wir die *Lie-Poisson Klammer* durch

$$\{F, G\}(\mu) := \mu([dF|_\mu, dG|_\mu])$$

für $F, G \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ und $\mu \in \mathfrak{g}^*$.

a) Begründen Sie, dass die Lie-Poisson Klammer unter Verwendung der Identifikation $(\mathfrak{g}^*)^* = \mathfrak{g}$ wohldefiniert ist, d.h. begründen Sie schrittweise, dass $\{F, G\}(\mu) \in \mathbb{R}$. (Insbesondere müssen Sie die Glattheit von $\{F, G\}: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$ nicht zeigen.)

b) Zeigen Sie, dass $\{.,.\}$ eine Poisson-Struktur auf $\mathfrak{g}^*$ definiert. Zeigen Sie dies durch direktes Nachrechnen und unter Verwendung der Identität

$$d\{F, G\}|_\mu = [dF|_\mu, dG|_\mu] - d^2 F|_\mu((\text{ad}_{dG|_\mu})^* \mu, \cdot) + d^2 G|_\mu((\text{ad}_{dF|_\mu})^* \mu, \cdot) \quad (1)$$

für $F, G \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, $\mu \in \mathfrak{g}^*$.² Hierbei ist für $\xi \in \mathfrak{g}$ die Abbildung $\text{ad}_\xi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ definiert durch $\text{ad}_\xi(\eta) := [\xi, \eta]$ und $(\text{ad}_\xi)^*: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ die duale Abbildung gegeben durch $(\text{ad}_\xi)^*(\mu) = \mu \circ \text{ad}_\xi$. (Gleichung (1) müssen Sie nicht zeigen.)

c) *Bonusaufgabe*: Zeigen Sie die Gleichung (1).

¹In der Definition in der Vorlesung war die Notation $\mathfrak{g} = V$ und $[.,.] = b(.,.)$.

²Erinnerung: Ist V ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum und $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung, so ist $df: V \rightarrow L(V; \mathbb{R})$ glatt und $d^2 f := d(df): V \rightarrow L(V; L(V; \mathbb{R})) = L(V, V; \mathbb{R})$, wobei $L(V, V; \mathbb{R})$ die multilinearen Abbildungen $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet. Weiter ist d^2 symmetrisch, d.h. $d^2 f|_x(v, w) = d^2 f|_x(w, v)$ für alle $x, w, v \in V$.