Übungen zur Symplektischen Geometrie und klassischen Mechanik

Universität Regensburg, Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Bernd Ammann / Johannes Wittmann

Abgabe am 02.02.2018 in der Vorlesung

Übungsblatt 14

1. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $(M, \{.,.\})$ eine Poisson-Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie

$$X_{\{F,G\}} = -[X_F, X_G]$$

für alle $F, G \in C^\infty(M)$.

2. Aufgabe (4 Punkte).

Sei M eine Mannigfaltigkeit und $X, Y \in \Gamma(TM)$ zwei Vektorfelder auf M mit $[X, Y] = 0$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\{F, G\} := \partial_X F \, \partial_Y G - \partial_Y F \, \partial_X G,$$

$F, G \in C^\infty(M)$ eine Poisson-Struktur auf M definiert.

b) Sei $H \in C^\infty(M)$. Zeigen Sie, dass für die Poisson-Struktur aus a) die folgende Identität gilt:

$$X_H = X \, \partial_Y H - Y \, \partial_X H.$$

3. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $(\mathfrak{g}, [.,.])$ eine endlich dimensionale Lie-Algebra. [1] Auf dem Dualraum $\mathfrak{g}^*$ definieren wir die *Lie-Poisson Klammer* durch

$$\{F, G\}(\mu) := \mu\left([dF|_\mu, dG|_\mu]\right)$$

für $F, G \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ und $\mu \in \mathfrak{g}^*$.

a) Begründen Sie, dass die Lie-Poisson Klammer unter Verwendung der Identifikation $(\mathfrak{g}^*)^* = \mathfrak{g}$ wohldefiniert ist, d.h. begründen Sie schrittweise, dass $\{F, G\}(\mu) \in \mathbb{R}$. (Insbesondere müssen Sie die Glattheit von $\{F, G\} \colon \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ nicht zeigen.)

b) Zeigen Sie, dass $\{.,.\}$ eine Poisson-Struktur auf $\mathfrak{g}^*$ definiert. Zeigen Sie dies durch direktes Nachrechnen und unter Verwendung der Identität

$$d\{F,G\}|_\mu = [dF|_\mu, dG|_\mu] - d^2F|_\mu((\mathrm{ad}_{dG|_\mu})^*\mu, .) + d^2G|_\mu((\mathrm{ad}_{dF|_\mu})^*\mu, .) \tag{1}$$

für $F, G \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, $\mu \in \mathfrak{g}^*$. [2] Hierbei ist für $\xi \in \mathfrak{g}$ die Abbildung $\mathrm{ad}_\xi \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ definiert durch $\mathrm{ad}_\xi(\eta) := [\xi, \eta]$ und $(\mathrm{ad}_\xi)^* \colon \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ die duale Abbildung gegeben durch $(\mathrm{ad}_\xi)^*(\mu) = \mu \circ \mathrm{ad}_\xi$. (Gleichung (1) müssen Sie nicht zeigen.)

c) *Bonusaufgabe:* Zeigen Sie die Gleichung (1).

---

[1] In der Definition in der Vorlesung war die Notation $\mathfrak{g} = V$ und $[.,.] = b(.,.)$.

[2] Erinnerung: Ist V ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum und $f \colon V \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung, so ist $df \colon V \to L(V;\mathbb{R})$ glatt und $d^2 f := d(df) \colon V \to L(V; L(V;\mathbb{R})) = L(V,V;\mathbb{R})$, wobei $L(V,V;\mathbb{R})$ die multilinearen Abbildungen $V \times V \to \mathbb{R}$ bezeichnet. Weiter ist d^2 symmetrisch, d.h. $d^2 f|_x(v,w) = d^2 f|_x(w,v)$ für alle $x, w, v \in V$.