Analysis II für Physiker: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2017
Prof. Dr. Bernd Ammann/ M.Sc. Johannes Wittmann

Keine Abgabe und Bewertung. Das Übungsblatt wird in der Zentralübung am 24.07.2017 oder am 26.07.2017 besprochen.

Übungsblatt 13

1. Aufgabe *Der gedämpfte harmonische Oszillator*

Wir betrachten wieder die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' + ay' + by = 0$$

für $a, b \in \mathbb{R}$. In Blatt 12, 4. Aufgabe, iii) wurden zwei linear unabhängige Lösungen im Fall $a^2 \neq 4b$ bestimmt.[1]

i) Bestimmen Sie zwei linear unabhängige Lösungen im Fall $a^2 = 4b$.
Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $y(t) = t^\alpha \exp(\lambda t)$.

ii) Für welche $a \in \mathbb{R}$ und $b > 0$ besitzen die in i) und Blatt 12, 4. Aufgabe, iii) konstruierten Lösungen unendlich viele Nullstellen?

2. Aufgabe

i) Berechnen Sie $\exp(At)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

mit $\omega \in \mathbb{R}$.

ii) Bestimmen Sie die Lösung $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ von

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Aufgabe

Zeigen Sie folgende Aussagen über die Matrix-Exponentialfunktion:

i) Für jede diagonalisierbare Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{spur}(A))$$

wobei $\operatorname{spur}(A) = \sum_{i=1}^n a_{jj}$.

ii) Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $\exp(tA^T) = (\exp(tA))^T$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

iii) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, so ist $\exp(A)$ symmetrisch und positiv definit.

---

[1] In einer ersten Version der Angabe war ein Tippfehler enthalten, es sollte $y\colon I \to \mathbb{C}$ heißen.