Analysis II für Physiker: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2017
Prof. Dr. Bernd Ammann/ M.Sc. Johannes Wittmann
Abgabe am 13.07.2017 bis 12:00 Uhr im Zettelkasten

Übungsblatt 11

1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ -x_1^2 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{pmatrix}.$$

i) Existiert eine Stammfunktion für F? Wenn ja, geben Sie eine Stammfunktion an.

ii) Bestimmen Sie für die Schraubenlinie $\gamma:[0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) := (\cos t, \sin t, t)^T$ das Integral

$$\int_\gamma \langle F, dx \rangle.$$

iii) Wiederholen Sie i) und ii) für $G:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$G(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2 x_3 \\ e^{x_2} - x_1 x_3 \\ -x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe: Oszillierende Magnetfelder induzieren elektrische Felder/Transformator Teil 1 (4 Punkte)

Sei $B:\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ das zeitabhängige Vektorfeld[1] definiert durch

$$B(x,t) := \sin t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Weiter sei E ein zeitabhängiges Vektorfeld mit

$$\operatorname{rot} E + \frac{d}{dt} B = 0.$$

Zusätzlich nehmen wir an, dass E die Gestalt

$$E(x,t) = \begin{pmatrix} F_1(x,t) \\ F_2(x,t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, hat. Berechnen Sie

$$\int_\gamma \langle E(x,t), dx \rangle$$

für $\gamma:[0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) := (\cos t, \sin t, 0)^T$. *Hinweis: Satz von Green.*

---

[1] D.h. $B:\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ist eine glatte Funktion und wir schreiben $B = B(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, und fassen t als Zeit auf. Analog für E. Dann sind div, rot und ∇ immer bezüglich der $\mathbb{R}^3$-Komponente zu verstehen. Z.B. ist $(\operatorname{div} B)(x,t) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial B_j}{\partial x_j}(x,t)$.

3. Aufgabe: Magnetfeld um einen elektrischen Leiter/Transformator Teil 2 (4 Punkte)

Sei $B: \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$B(x_1, x_2, x_3) := \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

i) Zeigen Sie: $\operatorname{rot} B = 0$

ii) Beweisen Sie, dass es eine Funktion $\varphi: B_1((1,0,0)^T) \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\nabla \varphi = B|_{B_1((1,0,0))}.$$

iii) Berechnen Sie

$$\int_\gamma \langle B(x), dx \rangle$$

für $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) := (\cos t, \sin t, 0)$.

4. Aufgabe: Homogene Maxwell-Gleichungen (4 Punkte)

Seien $E, B: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ zeitabhängige Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$ mit

$$\operatorname{div} B = 0,$$
$$\operatorname{rot} E + \frac{d}{dt} B = 0.$$

Benutzen Sie im folgenden (ohne Beweis), dass ein zeitabhängiges glattes Vektorfeld $A: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ existiert mit $\operatorname{rot} A = B$.

i) Zeigen Sie: Für jedes $t \in \mathbb{R}$ existiert eine glatte Funktion $\phi_t: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$\nabla \phi_t|_x = -E|_{(x,t)} - \frac{d}{dt} A|_{(x,t)}.$$

Hinweis: Proposition 3.18.

ii) Die Funktion $(x,t) \to \phi_t(x)$ ist glatt. *Hinweis: Beweis von Proposition 3.18. Sie dürfen bei dieser Aufgabe Ableitungen mit Integralen vertauschen, ohne dies zu begründen. Dies bezieht sich sowohl auf die Existenz als auch auf den Wert der Ableitung/des Integral.*