Analysis II für Physiker: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2017
Prof. Dr. Bernd Ammann/ M.Sc. Johannes Wittmann
Abgabe am 06.07.2017 bis 12:00 Uhr im Zettelkasten

Übungsblatt 10

1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $\Omega := (0,1) \times (0,4\pi)$ und $\Psi\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\Psi(r,\phi) := (r\cos\phi, r\sin\phi, \phi)$.

i) Zeigen Sie, dass $M := \Psi(\Omega)$ eine Untermannigfaltigkeit ist.

ii) Bestimmen Sie T_aM für ein beliebiges $a \in M$.

iii) Zeigen Sie
$$\mathrm{vol}_2(M) = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1+r^2}\, dr.$$

2. Aufgabe (4 Punkte)

Seien

$$S^2_+ := \{x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1, x_3 > 0\},$$
$$S^2_- := \{x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1, x_3 < 0\}.$$

Berechnen Sie $\mathrm{vol}_2(S^2_+)$ und $\mathrm{vol}_2(S^2_-)$ mit Hilfe von Beispiel 2.26 aus der Vorlesung. Folgern Sie $\mathrm{vol}_2(S^2) = 4\pi$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ und $\gamma'(a) = \gamma'(b)$. Weiter sei $\gamma|_{[a,b)}$ injektiv. Zeigen Sie:

i) $M := \gamma([a,b])$ ist eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. *Hinweis: Folgender Satz aus der Analysis I kann hilfreich sein: Sind X und Y metrische Räume, X kompakt, $f\colon X \to Y$ stetig und bijektiv, dann ist $f^{-1}\colon Y \to X$ stetig. (Siehe z.B. Satz 12.31 in der Analyis I Vorlesung von Prof. Dolzmann.)*

ii) Für alle Riemann-integrierbaren Funktionen $f\colon M \to \mathbb{R}$ gilt
$$\int_M f(x)\,\mathrm{dvol}_k(x) = \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\, dt.$$

4. Aufgabe (4 Punkte)

Es sei $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < \|x\| < 2\}$.

i) Zeigen Sie, dass Ω ein Gebiet mit C^1-Rand ist, bestimmen Sie $\partial\Omega$ und die äußere Normale $\nu(x)$ für alle $x \in \partial\Omega$.

ii) Zeigen Sie, dass für jedes stetige $f\colon \overline{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \|x\| \leq 2\} \to \mathbb{R}$

$$\int_{\partial\Omega} f(x) \mathrm{dvol}_1(x) = \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)\, dt + 2 \int_0^{2\pi} f(2\cos t, 2\sin t)\, dt$$

gilt.

iii) Berechnen Sie

$$\int_\Omega \operatorname{div}\left(\frac{x}{\|x\|^2}\right) dx$$

mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes (Satz 3.4 aus der Vorlesung).