Analysis II für Physiker: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2017
Prof. Dr. Bernd Ammann/ M.Sc. Johannes Wittmann

Präsenzblatt (keine Abgabe und Bewertung)

1. Aufgabe

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R},$$
$$\mathbb{R} \ni y \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$$

stetig sind, aber f nicht stetig im Ursprung $(0,0)$ ist.

2. Aufgabe

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \ln(1+x^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$|f(x) - x^2| \leq \frac{1}{32}$$

für alle $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
Hinweis: Wenden Sie die Taylor-Polynom-Approximation geschickt an.

3. Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die kleinst-möglichen Konstanten $C_1 \in \mathbb{R}$ und $C_2 \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|x\|_\infty \leq C_1 \|x\|_2, \qquad \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_\infty.$$

4. Aufgabe (Schraubenlinie)

Es seien $a, b, c, r \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $r > 0$. Berechnen Sie für alle $t \in [a,b]$ den Geschwindigkeitsvektor $\gamma'(t)$ und die Bogenlänge der Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ct \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [a,b]$.