Übungen zur Differentialgeometrie

Universität Regensburg, Wintersemester 2015/16
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dipl.-Math. Manuel Streil

Übungsblatt 5

1. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei (M^m, g) eine zusammenhängende semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $m \geq 3$ mit der Eigenschaft, dass in jedem Punkt $p \in M$ die Schnittkrm̈mung $K(E)$ unabhängig von der Ebene $E \subset T_pM$ ist.
Zeigen Sie die Existenz einer glatten Funktion $\kappa : M \to \mathbb{R}$, sodass

$$g(R(X,Y)Z,T) = \kappa \cdot (g(Y,Z)g(X,T) - g(X,Z)g(Y,T))$$

für alle Vektorfelder $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Es seien M, N Riemannsche Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension, wobei N zusammenhängend sei.

a) Es seien $h, \tilde{h} : N \to M$ lokale Isometrien, und es existiere ein Punkt $p \in N$ mit $h(p) = \tilde{h}(p)$ und $d_ph(v) = d_p\tilde{h}(v)$ für alle $v \in T_pN$. Zeigen Sie, dass dann schon $h = \tilde{h}$ gilt.

b) Es sei $f : M \to M$ eine Isometrie. Zeigen Sie, dass die Zusammenhangskomponenten von $\mathrm{Fix}(f) = \{p \in M \mid f(p) = p\}$ Untermannigfaltigkeiten von M sind.

Hinweis: Verwenden Sie, dass für alle $q \in M$ die Exponentialabbildung $\exp_q$ ein lokaler Diffeomorphismus in einer Umgebung von $0 \in T_qM$ ist und dass (lokale) Isometrien Geodäten auf Geodäten abbilden.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f : M \to M$ eine Isometrie.

a) Zeigen Sie, dass f die Schnittkrümmung invariant lässt. Das heißt, für alle Punkte $p \in M$ und Ebenen $E \subset T_pM$ gilt $K(d_pf(E)) = K(E)$.

b) Zeigen Sie, dass $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit der induzierten Metrik konstante Schnittkrümmung hat.

4. Aufgabe (4 Punkte)
Es seien $u_0, u_1, v_0, v_1 \in \mathbb{R}$ mit $u_0 < u_1$ und $v_0 < v_1$. Wir betrachten glatte Funktionen $f, g : (v_0, v_1) \to \mathbb{R}$ mit $f'(v)^2 + g'(v)^2 \neq 0$ und $f(v) \neq 0$ für alle $v \in (v_0, v_1)$ und setzen

$$\begin{aligned} \varphi : U = (u_0, u_1) \times (v_0, v_1) &\to \mathbb{R}^3 \\ (u, v)^\top &\mapsto (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v))^\top . \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass φ eine Immersion ist, das heißt, in jedem Punkt $p \in U$ ist $d_p\varphi$ injektiv.

Das Bild $S = \varphi(U)$ ist die Fläche, die durch Rotation der Kurve $v \mapsto (f(v), g(v))$ entsteht. Die Bilder unter φ der Kurven $u =$ konst. bzw. $v =$ konst. heißen Meridiane bzw. Breitenkreise von S.

b) Zeigen Sie, dass die induzierte Metrik in den Koordinaten (u, v) durch

$$g_{11} = f^2, \quad g_{12} = 0 \quad \text{und} \quad g_{22} = (f')^2 + (g')^2$$

gegeben ist.

c) Folgern Sie für die lokalen Gleichungen einer Geodäten, dass

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2ff'}{f^2}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} = 0$$

und

$$\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 0.$$

d) Es sei γ eine Geodäte und B_t der Breitenkreis, der durch $\gamma(t)$ verläuft. Zeigen Sie, dass für den Winkel $\beta(t) \in [0, \pi)$ zwischen B_t und $\gamma(t)$ die Clairaut-Gleichung

$$r(t)\cos\beta(t) = \text{konst.}$$

gilt. Dabei bezeichnet $r(t)$ den Radius von B_t.

Abgabe in der Vorlesung am 19.11.2015