Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux
Andreas Hermann

WS 2009/10

Semi-Riemannsche Geometrie

12. Übungsblatt

Abgabe am 26.01.2010 in der Vorlesung

1. Aufgabe
Sei (M^n, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit nichtpositiver Schnittkrümmung. Man bezeichne mit J ein Jacobi-Feld längs einer Geodätischen von (M^n, g).

1. Zeigen Sie, dass $g(J, \frac{\nabla^2 J}{dt^2})$ eine nichtnegative Funktion ist.
2. Zeigen Sie, dass $g(J, J)''$ nichtnegativ ist.
3. Leiten Sie daraus her, dass J entweder identisch verschwindet oder höchstens eine Nullstelle besitzt.

2. Aufgabe
Sei (M^2, g) eine zweidimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : I \longrightarrow M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische von (M^2, g). Sei Y ein glattes Vektorfeld längs γ mit $g(Y(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$ und $g(Y(t), Y(t)) = 1$ für alle $t \in I$.

1. Zeigen Sie, dass Y parallel längs γ ist.
2. Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Zeigen Sie, dass $f \cdot Y$ genau dann ein Jacobi-Feld längs γ definiert, wenn $K \cdot f + f'' = 0$ auf I erfüllt ist, wobei K die Schnittkrümmung von (M^2, g) bezeichnet.

3. Aufgabe
Sei $M := S^1 \times \mathbb{R}$ die Zylinderfläche, wobei $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Man versehe M mit der von den kanonischen Metriken induzierten Produktmetrik. Bestimmen Sie eine Basis des Raumes der Jacobi-Felder längs des Kreises $\gamma(t) := (\sin(t), \cos(t), 0)$ und skizzieren Sie sie.

4. Aufgabe
Man betrachte $S^1 := \{x = (x_1, x_2, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ als eingebettete Untermannigfaltigkeit von $S^3 := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\| = 1\}$.

1. Zeigen Sie, dass die kanonischen Basisvektoren $e_3 := (0, 0, 1, 0)$ und $e_4 := (0, 0, 0, 1)$ parallele Schnitte des Normalenbündels von $S^1 \subset S^3$ definieren.

2. Leiten Sie die Jacobi-Felder konstanter Länge von S^3 längs $\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t), 0, 0)$ her.