Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux
Andreas Hermann

WS 2009/10

Semi-Riemannsche Geometrie

10. Übungsblatt

Abgabe am 12.01.2010 in der Vorlesung

1. Aufgabe
Sei $C := \{x = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \cosh(x_0)^2\}$. Berechnen Sie die zweite Fundamentalform (im $\mathbb{R}^5$), die Ricci- und die Skalarkrümmung von (M, g), wobei g die vom euklidischen Skalarprodukt induzierte riemannsche Metrik ist. *(Hinweis: zeigen Sie, dass die zweite Fundamentalform punktweise zwei Eigenwerte hat, κ mit Vielfachheit 1 und $-\kappa$ mit Vielfachheit 3.)*

2. Aufgabe
Man betrachte eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit (M^n, g) und bezeichne mit ∇ bzw. R den Levi-Civita-Zusammenhang bzw. den riemannschen Krümmungstensor von (M^n, g). Wir definieren den $(0,4)$-Tensor $\tilde{R}$ durch $g(R(X,Y)Z, W) = \tilde{R}(X, Y, Z, W)$,

1. Sei $p \in M$ ein Punkt. Zeigen Sie, dass für alle $X, Y, Z, T, U \in T_pM$ folgende Identitäten erfüllt sind:

   $$(\nabla_X \tilde{R})(Y, Z, T, U) = -(\nabla_X \tilde{R})(Z, Y, T, U) = -(\nabla_X \tilde{R})(Y, Z, U, T) = (\nabla_X \tilde{R})(T, U, Y, Z).$$

2. Für ein Tensorfeld $A \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ definieren wir die Divergenz $\mathrm{div}(A) \in \Gamma(T^*M)$ als

   $$\mathrm{div}(A)(X) := \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j (\nabla_{e_j} A)(e_j, X) \qquad \forall X \in TM,$$

   wobei $\{e_j\}_{1 \le j \le n}$ eine lokaler orthonormaler Rahmen von TM sei, d.h. $g(e_i, e_j) = \varepsilon_i \cdot \delta_{ij}$ mit $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$.
   Beweisen Sie mit Hilfe der zweiten Bianchi-Identität:

   $$\mathrm{div}(\mathrm{ric}) = \frac{1}{2} d\,\mathrm{scal}.$$

(Hinweis: für einen fixierten Punkt $p \in M$ kann $\{e_j\}_{1 \le j \le n}$ so gewählt werden, dass $(\nabla e_i)_{|p} = 0$ gilt; wie kann dies erreicht werden?)

3. Berechnen Sie nun
$$\mathrm{div}(\mathrm{ric} - \frac{1}{2}\mathrm{scal}\, g).$$

3. Aufgabe
Diese Aufgabe besteht aus der 4. Aufgabe von Blatt 9.

Wir wünschen Ihnen eine frohe Weihnachtszeit und einen guten Rutsch ins neue Jahr!